

■本資料のご利用にあたって(詳細は「利用条件」をご覧ください)

本資料には、著作権の制限に応じて次のようなマークを付しています。
本資料をご利用する際には、その定めるところに従ってください。

***** : 著作権が第三者に帰属する著作物であり、利用にあたっては、この第三者より直接承諾を得る必要があります。

CC : 著作権が第三者に帰属する第三者の著作物であるが、クリエイティブ・コモンズのライセンスのもとで利用できます。

 : パブリックドメインであり、著作権の制限なく利用できます。

なし : 上記のマークが付されていない場合は、著作権が東京大学及び東京大学の教員等に帰属します。
無償で、非営利的かつ教育的な目的に限って、次の形で利用することを許諾します。

- I 複製及び複製物の頒布、譲渡、貸与
- II 上映
- III インターネット配信等の公衆送信
- IV 翻訳、編集、その他の変更
- V 本資料をもとに作成された二次的著作物についての I からIV

ご利用にあたっては、次のどちらかのクレジットを明記してください。

東京大学 UTokyo OCW 学術俯瞰講義
Copyright 2014, 岡本和夫

The University of Tokyo / UTokyo OCW The Global Focus on Knowledge Lecture Series
Copyright 2014, Kazuo Okamoto

数学の学術俯瞰講義も これで4回目です

- * 第1回 数理の世界
- * 第2回 数学を創る
- * 第3回 国境なき数学
- * 第4回 数学—革新の歴史と伝統の力



学術俯瞰講義

社会を根底から変えるパワー

可能性が生まれる

数学の魅力
加藤 和也
立教大学名誉教授



現象を創成する
藤原 順吉
東京大学名誉教授



代数学の世界
～数論とその応用～
柱 利行
京都大学名誉教授



最適化の数学
～応用数学の視点～
室田 一雄
理化学研究所名誉教授



ファイナンスの数学
植岡 成雄
東京大学名誉教授



幾何学の営み
古田 幹雄
東京大学名誉教授



主題科目
テーマ講義

数理の世界

—— 新世紀の数学を拓く ——

4月19日 → 7月19日

本曜日 5時限 16時20分 ▶ 17時50分
駒場キャンパス 18号館ホール

<http://www.komed.c.u-tokyo.ac.jp/gfk/>

数学を創る—数学者達の挑戦—

コーディネータ・ナビゲータ: 岡本和夫 (理学部)



数学はどうやって創られたか

岡本和夫 (理学部)、室田一雄 (工学部)

第1回 10/8

数学はどうやって創られたか



ことばを創り、世界を創る

斎藤毅 (理学部)

第2回 10/15

Mathematics "On Campus"

第3回 10/22

数の体系を創る

第4回 10/29

数と図形の共進化



脳と情報の数学を創る

甘利俊一 (理化学研究所)

第5回 11/5

情報の仕組み: 驚き、確率、幾何学

第6回 11/12

脳の仕組み: 脳内情報の表現、記憶、学習の数理



目の錯覚の数学を創る

新井仁之 (理学部)

第7回 11/19

数学で探る錯視の世界

第8回 11/26

脳の中のウェーブレット

第9回 12/3

錯視が創る新たな数学—ウェーブレットからフレームレットへ—



形を理解するための数学を創る

坪井俊 (理学部)

第10回 12/10

惑星の軌道を理解する

第11回 12/17

多面体の形と曲面の上の軌道の形

第12回 1/14

形の見分け方と数学の視点



文化と数学

岡本和夫 (理学部)

第13回 1/21

文化と数学

教科書にはのっていない数学のお話



東大ナビ
utnav.jp

テキストでお読みいただける講義をGET!
詳しくは utnav.jp にアクセス
または mail@utnav.jp に寄ってください
東京大学 教務企画課

駒場 キャンパス 18号館ホール 木曜日 5時限 (16:20-17:50)

<http://www.gfk.c.u-tokyo.ac.jp/>

学術 俯瞰 講義

主 題 科 目 / テ ー マ 講 義 1、2 年 生 対 象

国境なき数学 ー ことばを越えて社会とともに

コーディネータ・ナビゲータ



室田一雄 (工学部)



坪井 俊 (理学部)

インタラクタ



岡本和夫 (大学評価・学位授与機構)

歴史の中を歩く数学

岡本和夫 (大学評価・学位授与機構)

- | | | |
|-----|-------|-------|
| 第1回 | 10/12 | 数学の形 |
| 第2回 | 10/19 | 数学の誕生 |

生命の数学ーモデルの力

合原一幸 (生産技術研究所)

- | | | |
|-----|-------|-------|
| 第3回 | 10/26 | 脳の数学 |
| 第4回 | 11/2 | ガンの数学 |



通信、符号から現代数学の最先端へ

河東泰之 (理学部)

- | | | |
|-----|-------|---------------------|
| 第5回 | 11/9 | 通信の効率化の数学ーネットワーク符号化 |
| 第6回 | 11/16 | インターネットと暗号の数学 |
| 第7回 | 11/30 | 誤り訂正符号と数学 |



ネットワークの数理ーつながりを解く

増田直紀 (工学部)

- | | | |
|------|-------|-----------------|
| 第8回 | 12/7 | ネットワークがもつ普遍的な構造 |
| 第9回 | 12/14 | 不等性の数理 |
| 第10回 | 12/21 | ネットワーク上の感染症伝播 |



デタラメさの効用と $1+1=0$ の世界

松本 真 (理学部)

- | | | |
|------|------|--------------------------|
| 第11回 | 1/11 | 気がかぬうちに、デタラメさのお世話に |
| 第12回 | 1/18 | デタラメさを作るのって、難しい |
| 第13回 | 1/25 | $1+1=0$ の世界の数学で、デタラメさを作る |



駒場 キャンパス 18 号館ホール 水曜日 5 時限 (18:20-17:50)
http://www.gfk.c.u-tokyo.ac.jp/



東大ナビ
utnav.jp

数学—革新の歴史と伝統の力

コーディネータ:坪井 俊(理学部)

ナビゲータ:緒方芳子(教養学部)



数学のかたち 岡本和夫(名誉教授/大学評議員・学友会会長)

第1回	4/10	数学—伝統の力	
第2回	5/8	数学—発想の力	

整数と有理数の狭間で 石井志保子(理学部)

第3回	4/17	整数と有理数の狭間で その1	
第4回	4/24	整数と有理数の狭間で その2	

確率過程モデルの発展の歴史 楠岡成雄(工学部)

第5回	5/15	確率過程モデルとしての双六	
第6回	5/22	確率微分方程式のアイデア	

統計学の過去と未来 竹村彰通(工学部)

第7回	5/29	統計学の歴史	
第8回	6/5	統計学の今後	

指数関数と微分方程式 儀我美一(理学部)

第9回	6/12	複利と指数関数	
第10回	6/19	残留放射性物質量を記述する方程式の抽象化	
第11回	6/26	抽象論で微分方程式を解くには	

金融危機への対処と数理科学—前日本銀行副総裁の経験と省察 西村清彦(経済学部)

第12回	7/3	世界金融危機と数理的思考	
第13回	7/10	楽観と悲観の数理経済学	

駒場キャンパス 21 KOMCEE レクチャーホール 木曜日 5時限 (16:30-18:00)

<http://www.gfk.c.u-tokyo.ac.jp/>



学術俯瞰講義のプラン

- * 数学のかたち
- * 整数と有理数の狭間で
- * 確率過程モデルの発展の歴史
- * 統計学の過去と未来
- * 指数関数と微分方程式
- * 金融危機への対処と数理科学

学術俯瞰講義のプラン

- * 数学のかたち(易しい)
- * 整数と有理数の狭間で(優しい)
- * 確率過程モデルの発展の歴史(新しい)
- * 統計学の過去と未来(広い)
- * 指数関数と微分方程式(深い)
- * 金融危機への対処と数理科学(魅せる)

学術俯瞰講義

数学

－革新の歴史と伝統の力

2014年度夏学期

第1回「数学－伝統の力」

2014/04/10 岡本和夫

授業のプラン

数学の広がりや、高等学校までに学ぶ題材を選んで振り返ってみよう。

併せて

- * 数学とはどんな学問か考えてみよう。
- * 諸科学と数学の関係を考えてみよう。
- * 数学史の授業ではありません。
- * とにかく楽しんでください！



やさしいけれど難しい

数学を楽しむ

問題を見つける

1から9の数字を1回だけ使って次の式を完成させなさい

$$\begin{array}{r} \quad \square \quad \square \quad \square \\ \quad \square \quad \square \quad \square \\ + \quad \square \quad \square \quad \square \\ \hline \quad \square \quad \square \quad \square \end{array}$$

1から9の数字を1回だけ使って次の式を完成させなさい

$$\begin{array}{r} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

1から9の数字を1回だけ使って次の式を完成させなさい

$$\begin{array}{r} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \end{array}$$



243

$$\begin{array}{r} 243 \\ + 576 \\ \hline 819 \end{array}$$

134

$$\begin{array}{r} 134 \\ + 658 \\ \hline 792 \end{array}$$

142

$$\begin{array}{r} 142 \\ + 695 \\ \hline 837 \end{array}$$

215

$$\begin{array}{r} 215 \\ + 748 \\ \hline 963 \end{array}$$

271

$$\begin{array}{r} 271 \\ + 593 \\ \hline 864 \end{array}$$

162

$$\begin{array}{r} 162 \\ + 387 \\ \hline 549 \end{array}$$

271

$$\begin{array}{r} 271 \\ + 683 \\ \hline 954 \end{array}$$

218

$$\begin{array}{r} 218 \\ + 349 \\ \hline 567 \end{array}$$

計算に必ず繰り上がりが1回だけあり、答えの数字の和が必ず18になるらしい！

	3	2	4
	6	5	7
	9	8	1

+

)

計算に必ず繰り上がりが1回だけあり、答えの数字の和が必ず18になることを示しなさい

A vertical addition problem is shown. The first row contains the numbers 1, 8, and 2 in boxes. The second row contains the numbers 4, 9, and 3 in boxes. A blue curved arrow points from the 8 in the first row to the 1 in the second row, indicating a carry-over. To the left of the second row is a plus sign and a closing parenthesis. A horizontal line is drawn below the second row. Below the line, the result 6, 7, and 5 are shown in boxes, which are enclosed in a red rectangular frame.

	1	8	2
+	4	9	3
	6	7	5

(1, 8, 9) (2, 7, 9) (3, 7, 8) (3, 6, 9) (4, 6, 8) (4, 5, 9) (5, 6, 7)

243

$$\begin{array}{r} 576 \\ \hline 819 \end{array}$$

134

$$\begin{array}{r} 658 \\ \hline 792 \end{array}$$

142

$$\begin{array}{r} 695 \\ \hline 837 \end{array}$$

215

$$\begin{array}{r} 748 \\ \hline 963 \end{array}$$

271

$$\begin{array}{r} 593 \\ \hline 864 \end{array}$$

162

$$\begin{array}{r} 387 \\ \hline 549 \end{array}$$

271

$$\begin{array}{r} 683 \\ \hline 954 \end{array}$$

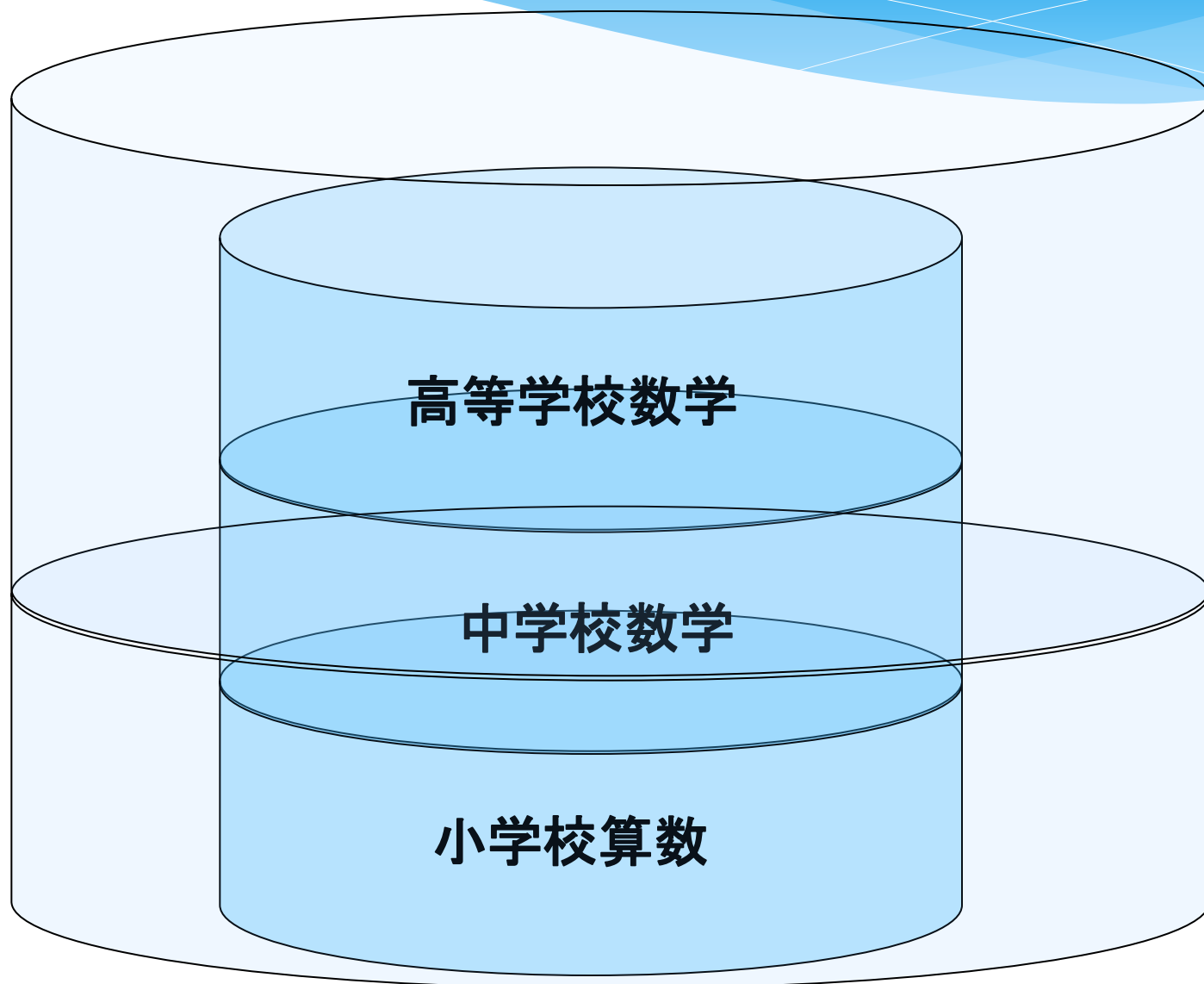
218

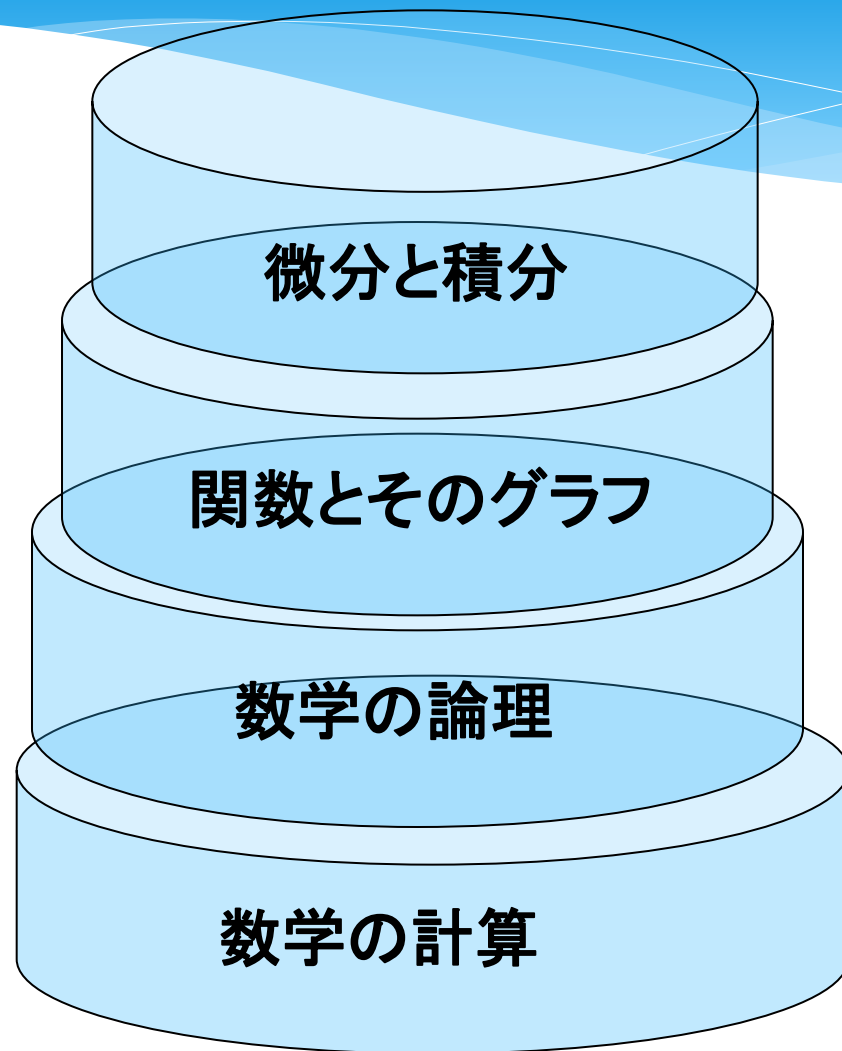
$$\begin{array}{r} 349 \\ \hline 567 \end{array}$$

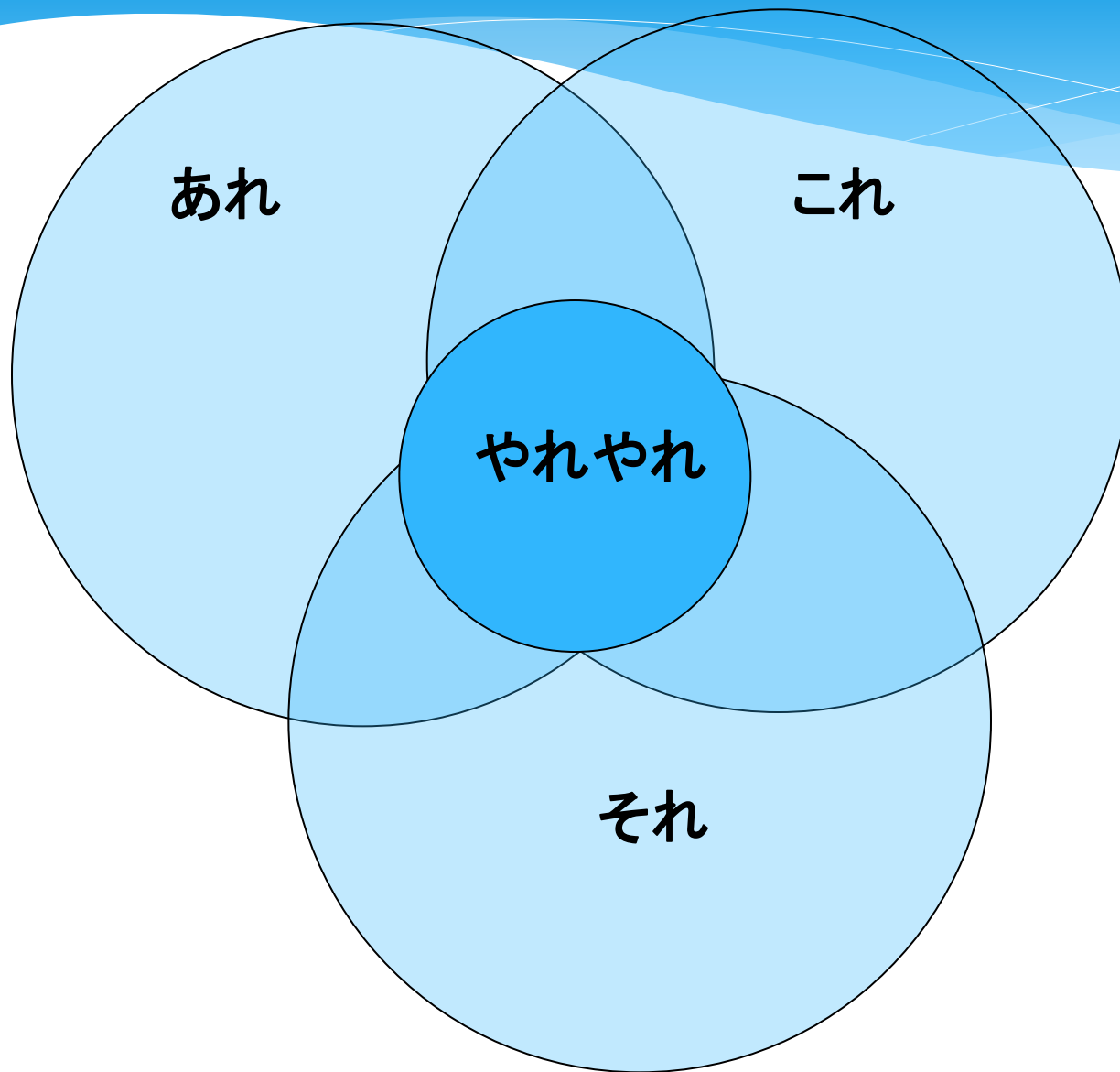
1から9の数字を1回だけ使って次の式を完成させるとき、何通りの答えがあるか？

$$\begin{array}{r} \\ \\ \hline \end{array}$$

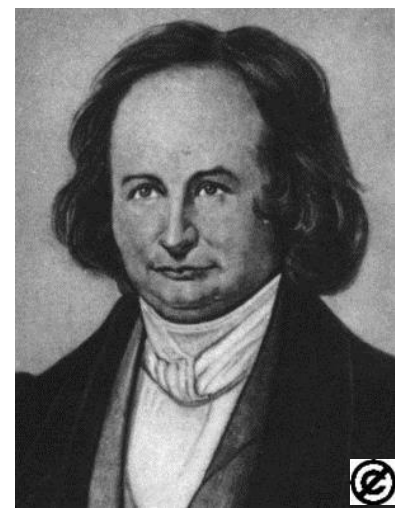
$$1 = 0.999999999\ldots$$

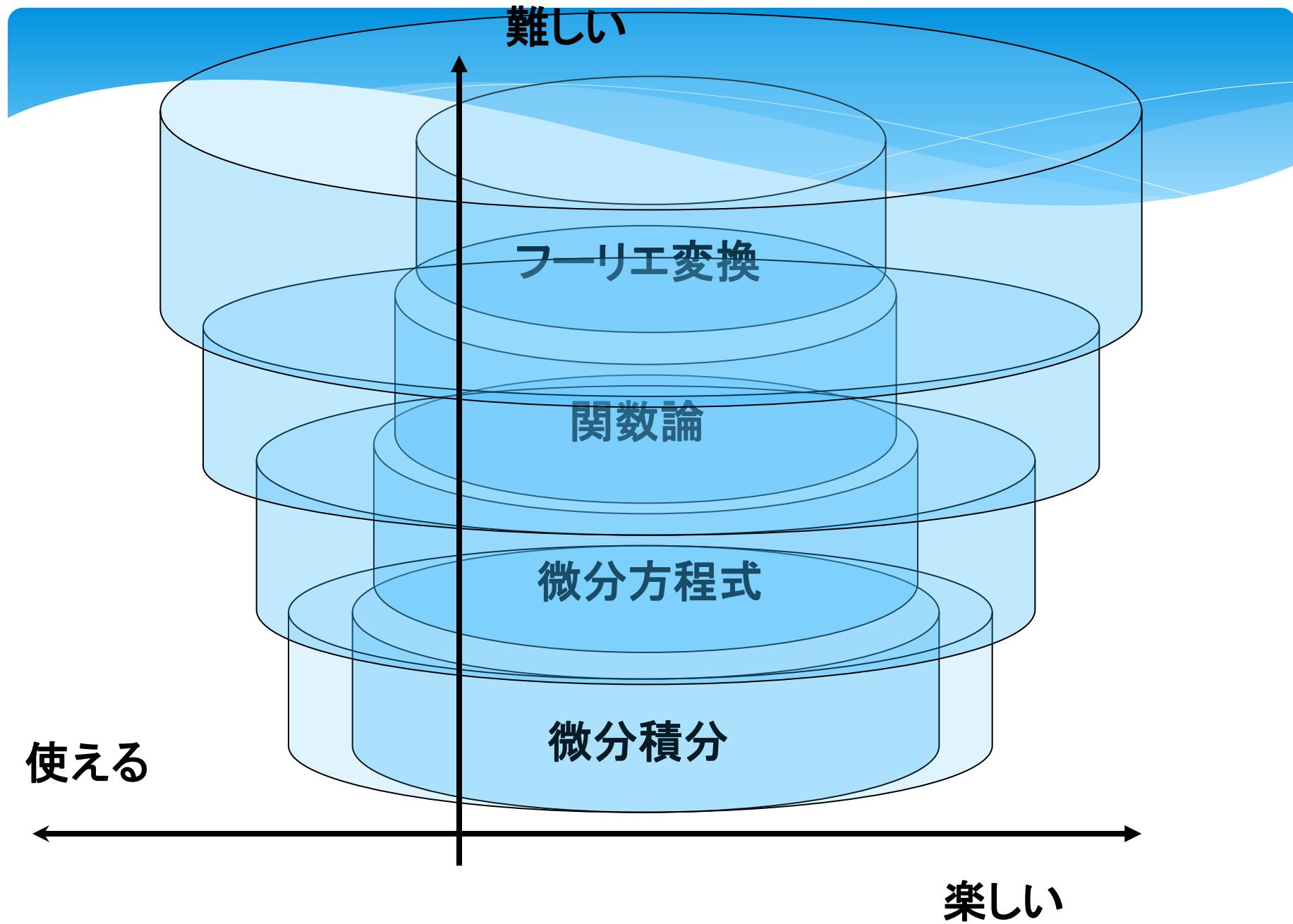






時間がいくら
あっても・・・





難しい

各論

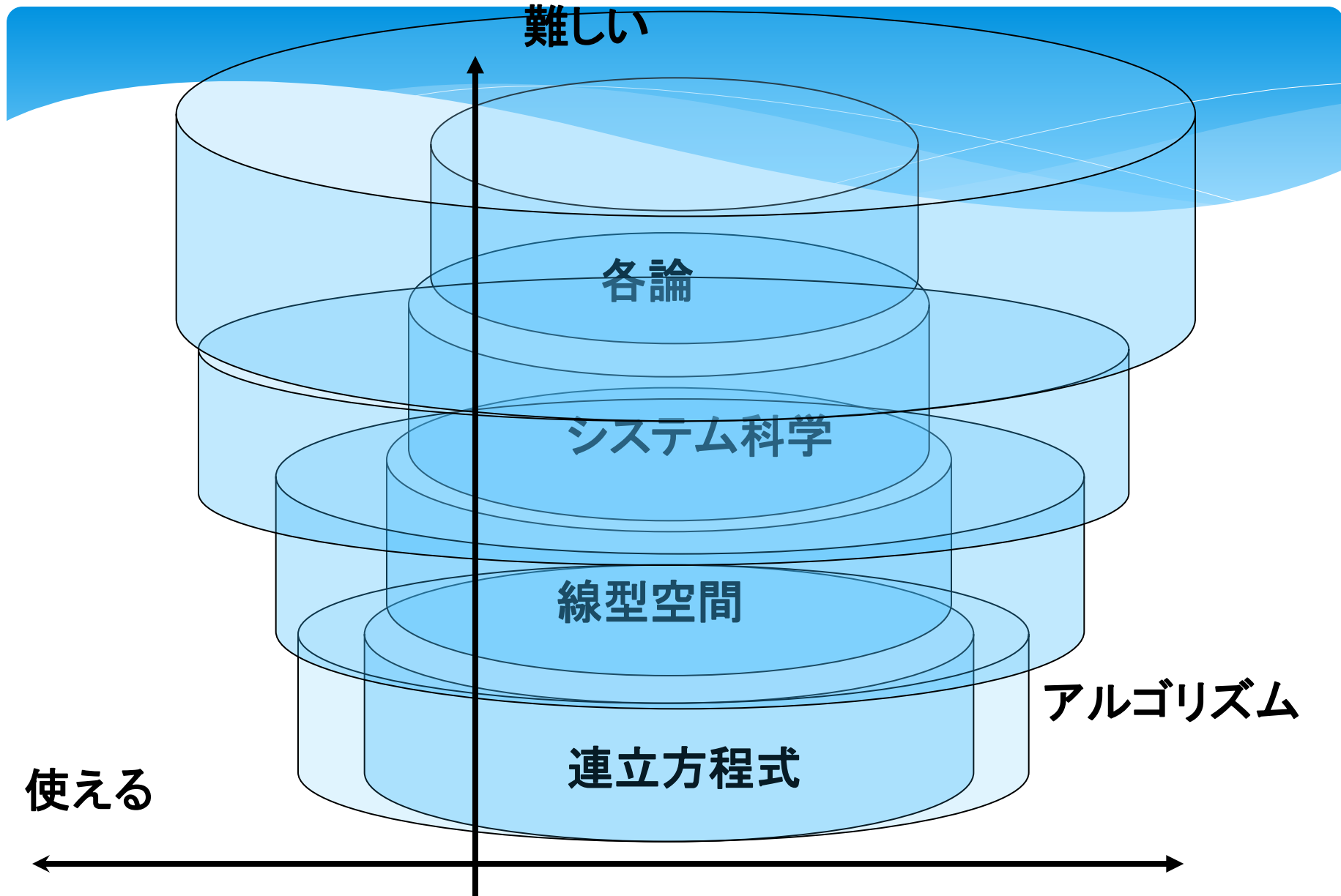
システム科学

線型空間

連立方程式

アルゴリズム

使える



数学の構造

数学は
縦の構造

後はお任せ

微分方程式

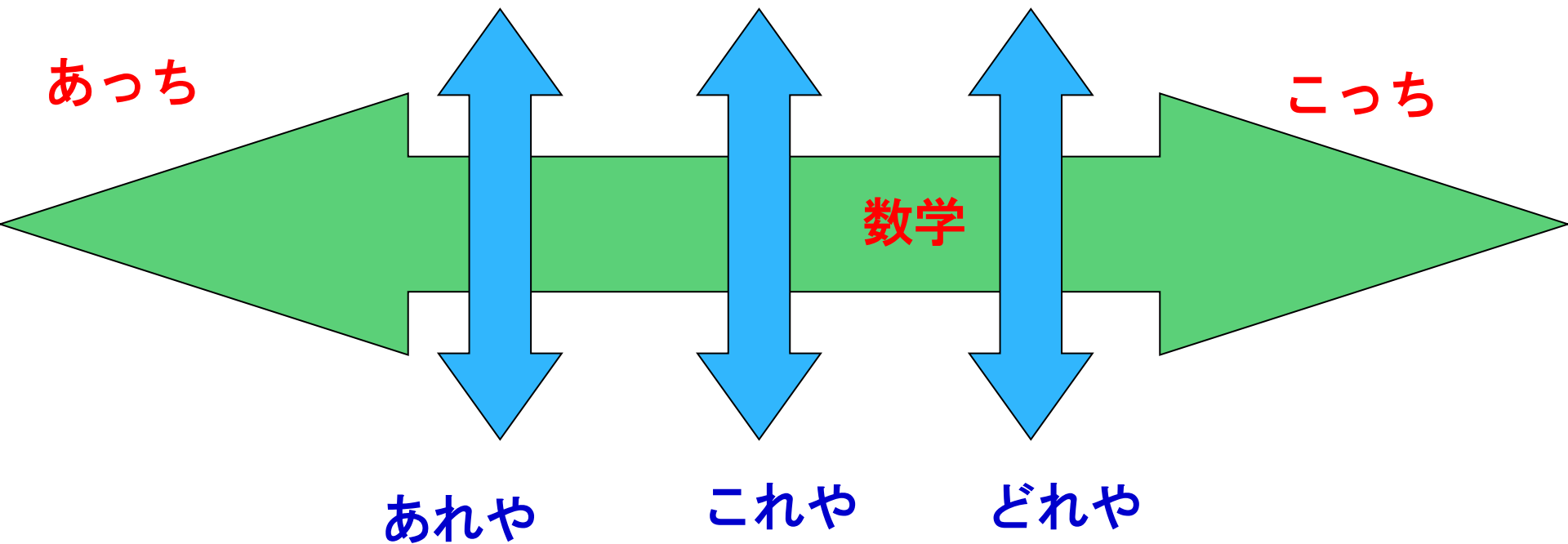
線型空間

微分積分

これでは
十分では
ない！

数学の働き

* 科学技術の中で見れば...





数学と公式

見方を変える
本質を見出す

数学の公式は使えるか？

- * 公式をたくさん知っていれば、たくさんことができるか？
- * 公式を知らないと数学はできないか？
- * 数学を使える、ということと、公式を知っていることは同じか？

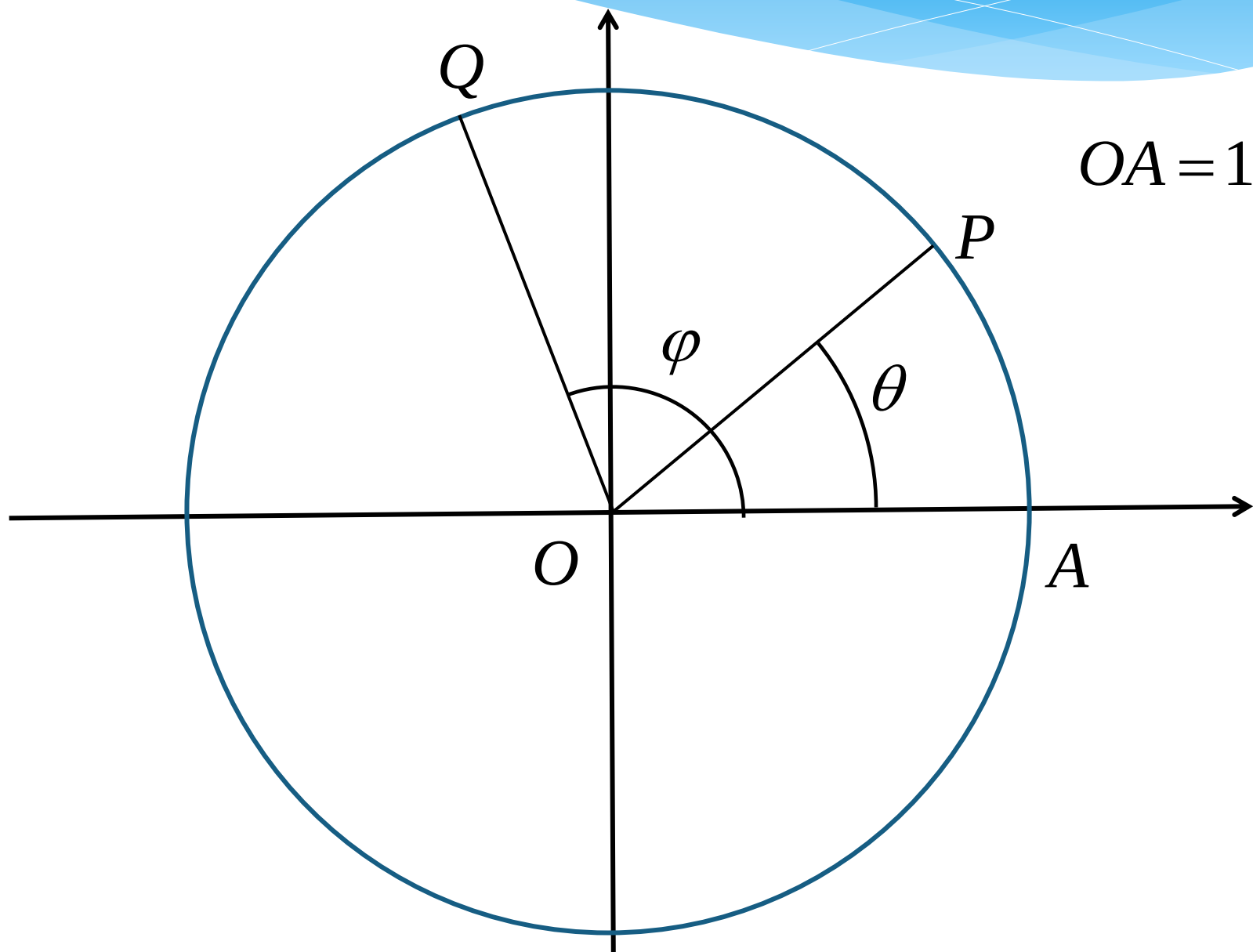
一番面倒な公式

もちろん、高等学校で学んだものに限る

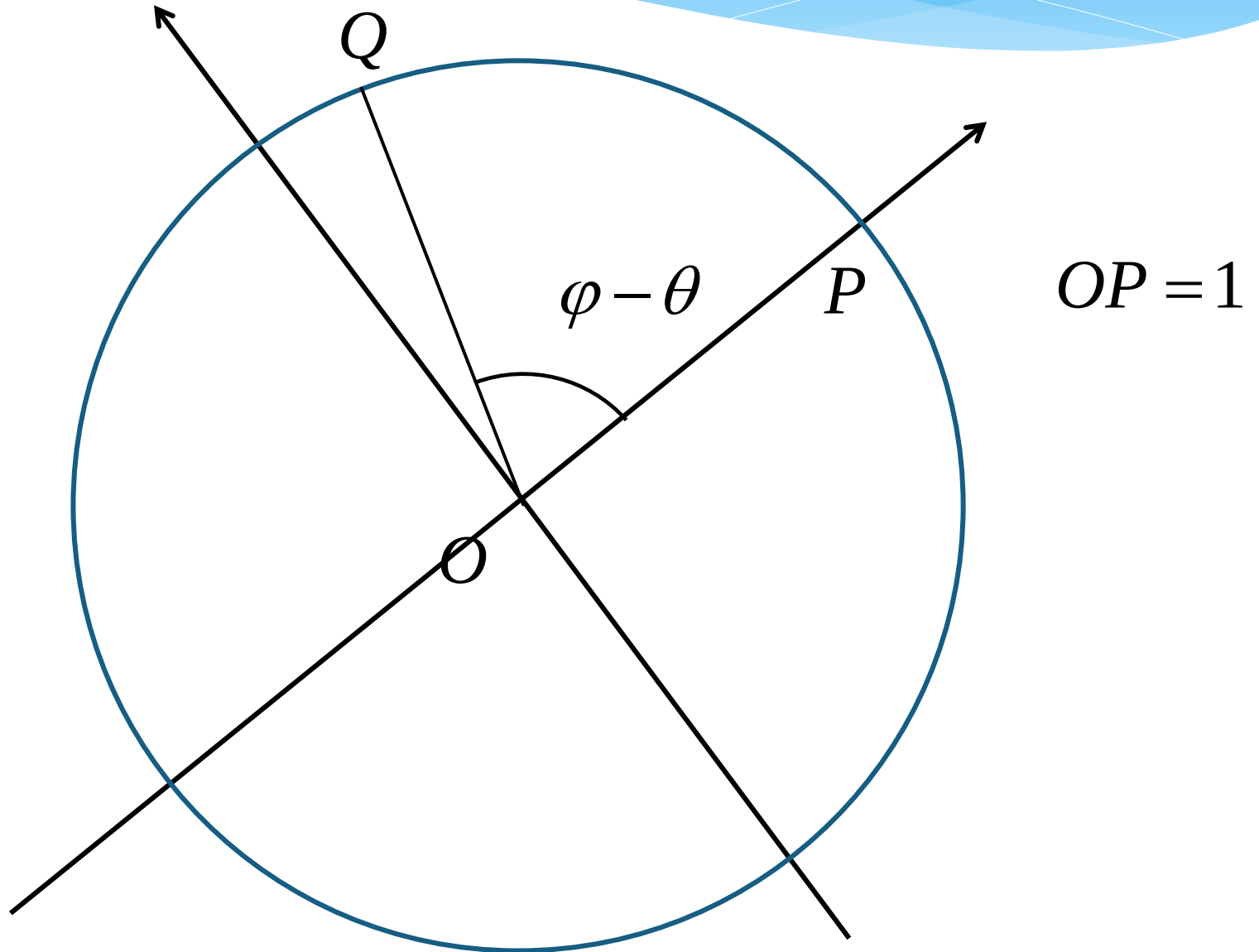
多分、三角関数の加法定理

$$\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta = \cos(\varphi - \theta)$$

$$PQ^2 = (\cos \varphi - \cos \theta)^2 + (\sin \varphi - \sin \theta)^2$$



$$PQ^2 = (\cos(\varphi - \theta) - 1)^2 + \sin^2(\varphi - \theta)$$




$$\begin{aligned} &(\cos \varphi - \cos \theta)^2 + (\sin \varphi - \sin \theta)^2 \\ &= \\ &(\cos(\varphi - \theta) - 1)^2 + \sin^2(\varphi - \theta) \end{aligned}$$

$$\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta = \cos(\varphi - \theta)$$

三角関数の加法定理の他の公式はこれから従う

2次方程式の根の公式

$$x^2 + 2ax + b = 0$$

$$(y = x + a)$$

$$y^2 = D$$

$$(D = a^2 - b)$$

$$y = \pm\sqrt{D}$$

3次方程式の根の公式

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$$

$$(y = x + a)$$

$$y^3 + 3py + 2q = 0$$

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{p^3 + q^2}} - \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} \quad (D = p^3 + q^2)$$

$$(u - v)^3 = u^3 - v^3 - 3uv(u - v)$$

3次方程式の根の公式(使用中)

$$y^3 + 3py + 2q = 0$$

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{p^3 + q^2}} - \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$$

$$f(y) = y^3 + 3py + 2q$$

$$f'(y) = 3y^2 + 3p$$

$p > 0$ ならば、ただ一つの実根

3次方程式の根の公式(使用中)

$$y^3 + 3py + 2q = 0$$

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{p^3 + q^2}} - \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$$

$$y^3 + 6y + 2 = 0 \quad (p = 2, \quad q = 1) \qquad y = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$$

$$y^3 + 3y + 4 = 0 \quad (p = 1, \quad q = 2)$$

$$y = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} - \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \qquad y = -1$$

数学の証明

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = -1$$

両辺の値はともに $y^3 + 3y + 4 = 0$ の根

この方程式はただ一つの実根を持つ

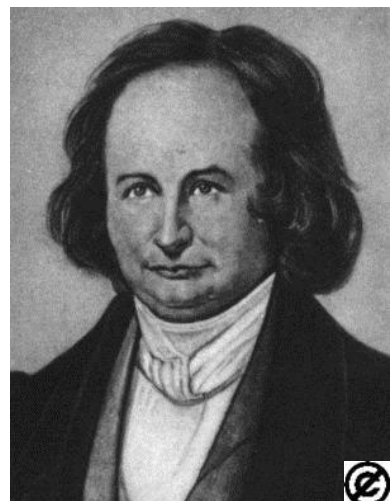
よって与式は成り立つ

数学の応用について 純粋数学と応用数学

- * 新しい数学がどのように創られるのか
- * 自然現象や社会現象から新しい
数学を作る
応用数学
- * 数学から数学を作る
純粋数学

数学に対する2つの姿勢

- * ... mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, ...
- * 1830年7月2日付、ヤコービからルジャンドルあて手紙、原文フランス語



Carl Gustav Jacob Jacobi
1804-1851

Adrien-Marie Legendre
1752-1833

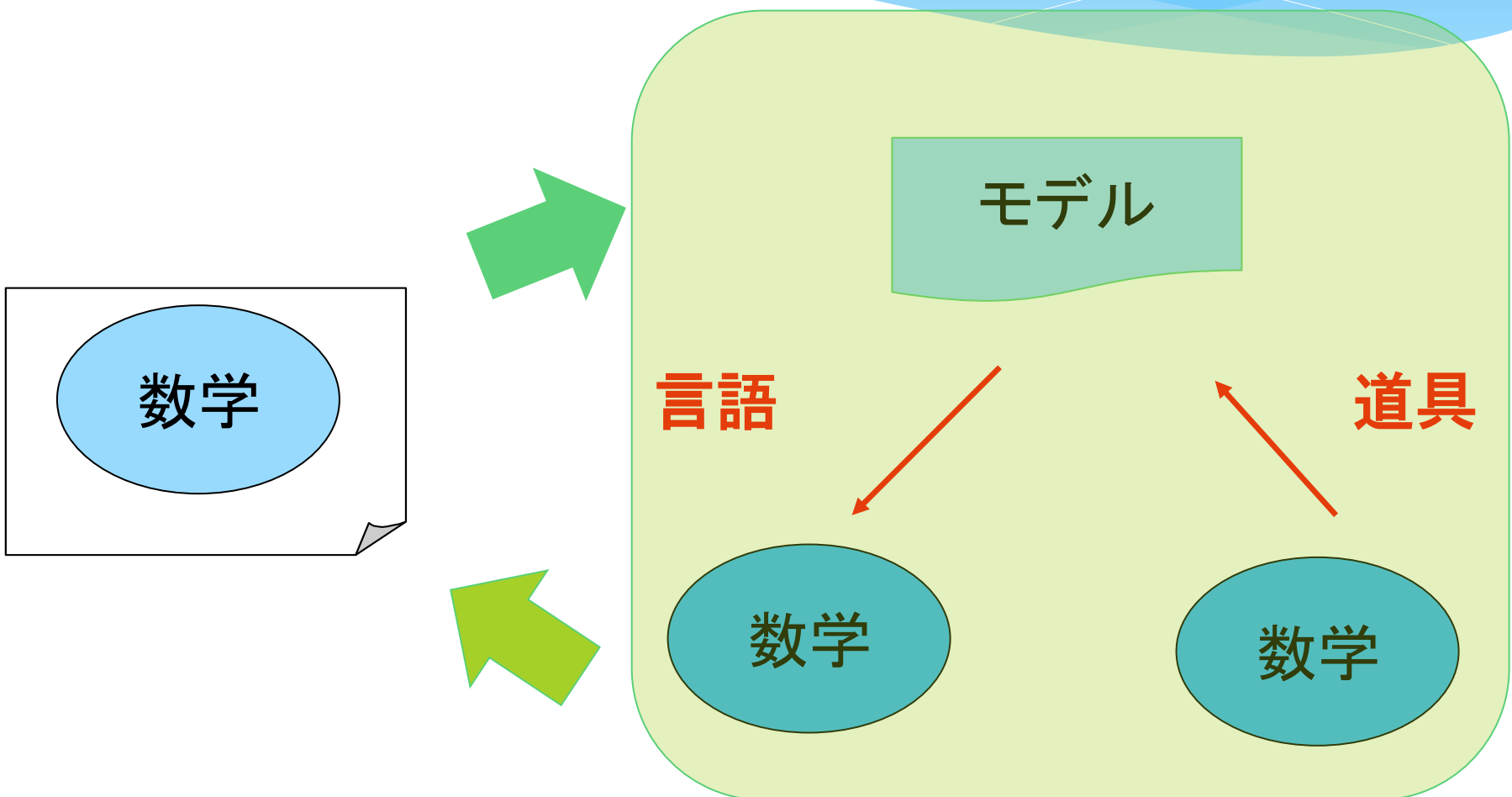


フーリエ氏の意見では数学の主目的は公共に役立つことと自然現象の解明にあるとのこと。しかし彼も哲学者ならば知っているべきですが、学問の唯一の目標は人間精神の名誉にあって、その意味では数に関する問題も世界の体系についての問題と同じ価値があるのです。

Jean Baptist Joseph Fourier
1768 -1830



数学の形





そうかもしれないけれど

どうやって気が付いた？

誰が見つけた？

不思議な話

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 11 = 13 \times 17$$

$$\begin{aligned} 123789^2 + 561945^2 + 642864^2 \\ = 323787^2 + 761943^2 + 242868^2 \end{aligned}$$

不思議な話

$$\blacksquare 23789^2$$

$$\blacksquare 61945^2$$

$$\blacksquare 42864^2$$

$$\blacksquare 23787^2$$

$$\blacksquare 61943^2$$

$$\blacksquare 42868^2$$

不思議な話

$$\begin{aligned} 23789^2 + 61945^2 + 42864^2 \\ = \\ 23787^2 + 61943^2 + 42868^2 \end{aligned}$$

不思議な話

$$3789^2 + 1945^2 + 2864^2$$

=

$$3787^2 + 1943^2 + 2868^2$$

不思議な話

$$789^2 + 945^2 + 864^2 = 787^2 + 943^2 + 868^2$$

不思議な話

$$89^2 + 45^2 + 64^2 = 87^2 + 43^2 + 68^2$$

不思議な話

$$9^2 + \quad 5^2 + \quad 4^2$$

=

$$7^2 + \quad 3^2 + \quad 8^2$$

$$81 + 25 + 16 = 49 + 9 + 64 = 122$$

不思議な話

$$12378 \blacksquare^2 \quad 56194 \blacksquare^2 \quad 64286 \blacksquare^2$$

$$32378 \blacksquare^2 \quad 76194 \blacksquare^2 \quad 24286 \blacksquare^2$$

不思議な話

$$12378^2 + 56194^2 + 64286^2 \\ = \\ 32378^2 + 76194^2 + 24286^2$$

数学は楽観的な見方が勝利する

証明が簡単、とは言っていない

不思議な話

$$1237^2 + 5619^2 + 6428^2$$

=

$$3237^2 + 7619^2 + 2428^2$$

$$1^2 + 5^2 + 6^2 = 3^2 + 7^2 + 2^2$$

不思議な話

$$\blacksquare 2378 \blacksquare^2$$

$$\blacksquare 6194 \blacksquare^2$$

$$\blacksquare 4286 \blacksquare^2$$

$$\blacksquare 2378 \blacksquare^2$$

$$\blacksquare 6194 \blacksquare^2$$

$$\blacksquare 4286 \blacksquare^2$$

不思議な話

$$2378^2 + 6194^2 + 4286^2$$
$$=$$
$$2378^2 + 6194^2 + 4286^2$$

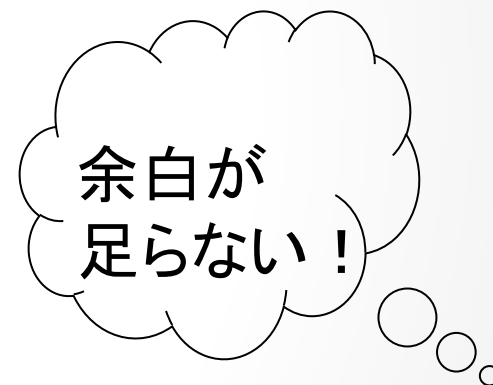
数学は楽観的な見方が勝利する

本当か？

フェルマーの最終定理

$$x^n + y^n = z^n$$

$$xyz \neq 0 \quad n \geq 3$$



整数の解 (x, y, z)
は存在しない



$$x^3 + y^3 = z^3 \quad xyz \neq 0$$

$$w^4 + x^4 + y^4 = z^4 \quad wxyz \neq 0$$

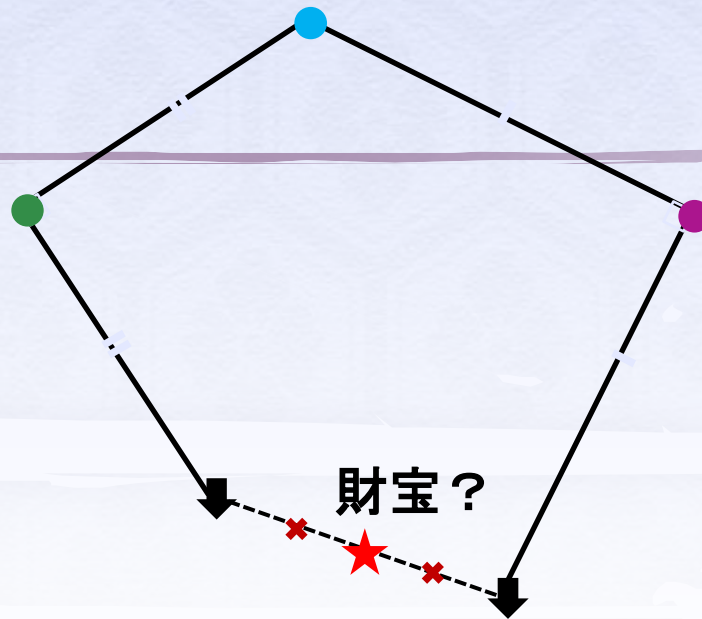
$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 \\ = 20615673^4$$

$$v^5 + w^5 + x^5 + y^5 = z^5 \quad vwxyz \neq 0$$

$$\bullet 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5 \quad \bullet$$

宝探し(宿題)

次ページとその次に問題が書いてあります。最後のページが解答用紙です。次回までに考えておいてください。



『ある島に井戸と松の木と梅の木がある。

井戸から松の木まで歩いていき、左回りに90度向きを変え、同じ距離だけ進み、そこに杭を打つ。

次にもう一度井戸に戻って、井戸から梅の木まで歩いていき、右回りに90度向きを変え、同じ距離だけ進み、そこに杭を打つ。

この杭と杭の真ん中の地点に財宝を埋めた』

と、古文書には書いてある。その財宝を見付けようと、行ってみると松の木と梅の木はあるが、井戸が埋まってしまっていて、見付けられなかった(杭は打てず、悔いが残る?)。

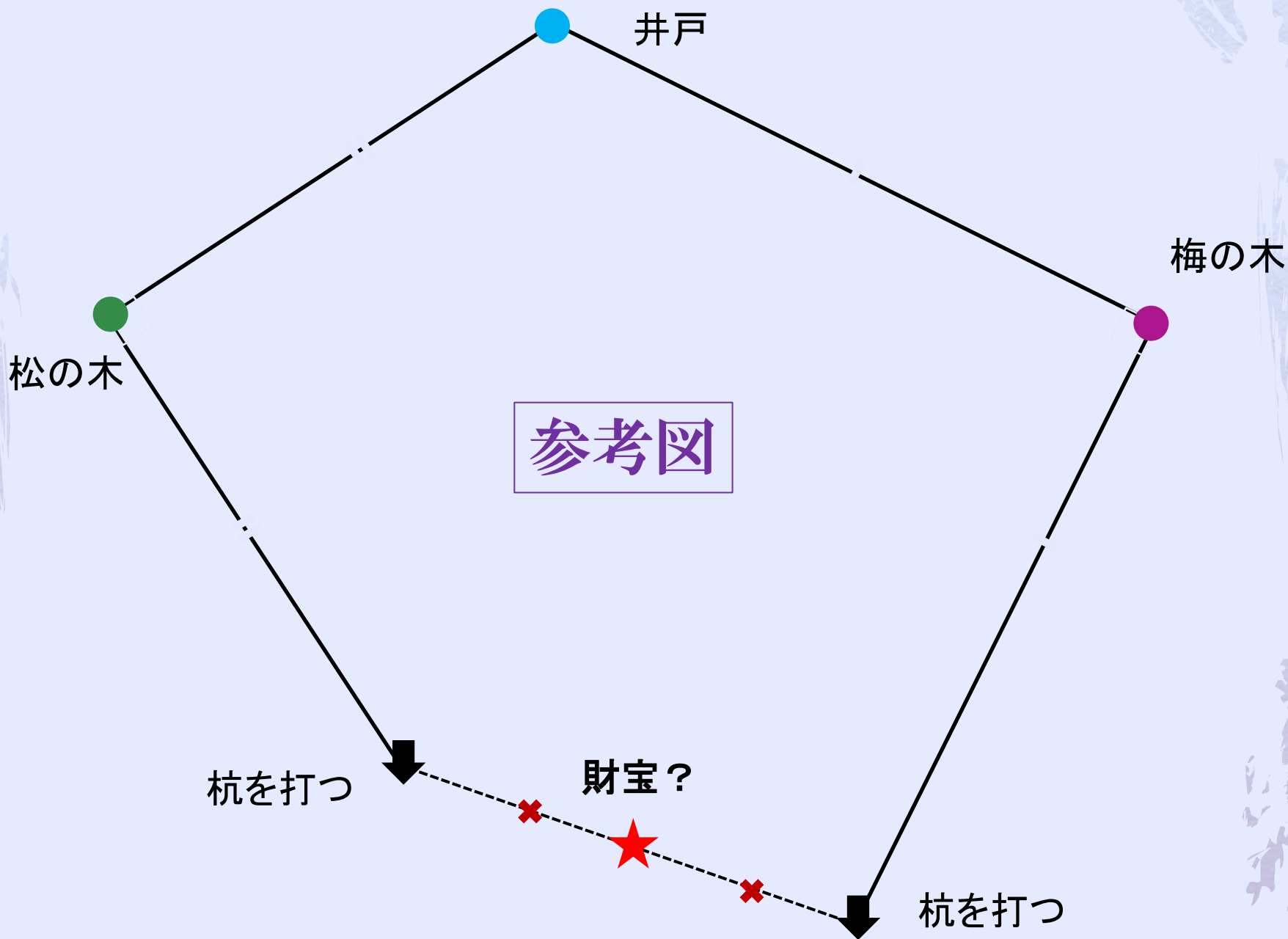
【『高等学校指導要領解説 数学編』(文部科学省、平成21年11月)、第1部2章6節「数学活用」、p.61より引用、一部修文】

もし井戸の場所が分っていれば、財宝の位置は作図で求めることができます。
そのイメージを次ページに示してあります。文章だけではわかりにくいので参照してください。

松の木と梅の木だけでは、財宝は見つからないのでしょうか？

松の木と梅の木の場所だけを指定したシートを2枚つけておきました。
井戸の位置を自分で決めて、財宝の場所を特定したらどうなるのでしょうか。
正確に作図してください。

そこから、何か気が付くことはあるのでしょうか？



梅の木



松の木



財宝は何処に！