■本資料のご利用にあたって（詳細は「利用条件」をご覧ください）

本資料には、著作権の制限に応じて次のようなマークを付しています。
本資料をご利用する際には、その定めるところに従ってください。

＊：著作権が第三者に帰属する著作物であり、利用にあたっては、この第三者より直接承諾を得る必要があります。

CC：著作権が第三者に帰属する第三者の著作物であるが、クリエイティブ・コモンズのライセンスのもとで利用できます。

：パブリックドメインであり、著作権の制限なく利用できます。

なし：上記のマークが付されていない場合は、著作権が東京大学及び東京大学の教員等に帰属します。無償で、非営利的かつ教育的な目的に限って、次の形で利用することを許諾します。

Ⅰ　複製及び複製物の頒布、譲渡、貸与
Ⅱ　上映
Ⅲ　インターネット配信等の公衆送信
Ⅳ　翻訳、編集、その他の変更
Ⅴ　本資料をもとに作成された二次的著作物についてのⅠからⅣ

ご利用にあたっては、次のどちらかのクレジットを明記してください。

東京大学　UTokyo OCW　学術俯瞰講義
Copyright 2014, 儀我美一

The University of Tokyo / UTokyo OCW　The Global Focus on Knowledge Lecture Series
Copyright 2014, Yoshikazu Giga

指数関数と微分方程式

大学院数理科学研究科
儀我 美一

第2回　2014年6月19日（木）

内容

0. はじめに
1. 複利と指数関数
2. 残留放射性物質等を記述する方程式の抽象化
3. 抽象論で微分方程式を解くには

2. 残留放射性物質等を記述する方程式の抽象化

2.1 C14年代測定法

2.2 オイラーの公式

2.3 連立系と指数関数

2.1 C14年代測定法

考古学の発掘物の年代測定等

- 炭素原子

　大部分　$^{12}\mathrm{C}$　：　陽子6、中性子6

　同位体　$^{14}\mathrm{C}$　（$^{13}\mathrm{C}$ もある）

- 空気中の $^{14}\mathrm{C}$ の量はほぼ一定
（作られる量と崩壊する量は等しい）
- 空気中での $^{14}\mathrm{C}$ と $^{12}\mathrm{C}$ の質量比は一定
- 植物は炭素を多量に含む。生きている間は代謝により植物内の $^{14}\mathrm{C}$ と $^{12}\mathrm{C}$ の比は空気中の比と等しい。

- 植物が枯れたりして代謝が止まると、その後は $^{14}\mathrm{C}$ は植物内に取り込まれずに減る一方である。

「代謝が止まってから現在までの経過時間を求める」($\mathrm{C}14$年代測定法)

［黒田成俊『微分積分』共立講座21世紀の数学、2002］

放射性元素の崩壊を表す方程式

- ある原子核（親原子核と呼ぶ）が放射線を放出して（放射能）、他の原子核に崩壊する現象
- 時刻 t での親原子核の量を $f(t)$ とすると、$f(t)$ の減少率は一定

$$\text{減少率} = -\frac{f'(t)}{f(t)} \qquad f'(t) = \frac{df}{dt}$$

- 減少率を λ とすると

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\lambda \qquad (*)$$

となる微分方程式（関数とその微分の関数関係を表す）を得る。
（λ を当該原子核の**崩壊定数**という）

指数関数の定義

前回

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{で定義}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{x}{n}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k}\,{}_nC_k\, x^k$$

x^k の係数は

$$\frac{1}{n^k}\,{}_nC_k = \frac{1}{k!}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$n\to\infty$ とするとこの量は $\dfrac{1}{k!}$ に収束

指数関数の定義（続き）

つまり

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \quad (0! = 1 \text{ とする})$$

となる。この級数はすべての x で収束することが知られている。

指数関数と微分方程式

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$$

証明の一つの考え方: $\frac{d}{dt}t^k = kt^{k-1}$ に注意

$$\frac{d}{dt}e^{at} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^k}{k!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{kt^{k-1}}{k!}$$ （項別に微分: 自明ではない）

$$= a\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(at)^j}{j!} = ae^{at}$$ （$k-1=j$ と置く）

放射性元素の崩壊を表す微分方程式の解

$$f(t) = ce^{-\lambda t}$$ と置くと

$$f'(t) = -\lambda f(t)$$

を満たす。c は定数。

（これ以外の $f(t)$ で微分方程式 $(*)$ を満たす微分可能な関数は存在しない。）

微分方程式と関数

命題　初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{df(t)}{dt} = f(t), \quad t > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

を満たす関数は e^t である。

つまり微分方程式により関数が特徴づけられる。

$F = f(t)e^{-t}$ と置くと $\frac{dF}{dt} = 0$ となる。$F(0) = 1$ なので、このような方程式を満たす F は $F \equiv 1$ しかない（自明ではない）。

半減期

崩壊定数 λ の場合、$f(T)$ が $f(0)$ の半分になる最初の T（半減期）を求めよ。

$$\frac{f(T)}{f(0)} = \frac{ce^{-\lambda T}}{c} = \frac{1}{2}$$

両辺の自然対数（e^t の逆関数）を取ると

$$T = \frac{1}{\lambda}\log 2$$

$^{14}\mathrm{C}$ の崩壊定数は $\lambda = 1.21 \times 10^{-4}$、

半減期5728年

C14年代測定法

- 植物サンプルが代謝を止めた時刻を $t = 0$
- t の単位を年とする。
- t におけるサンプル内の $^{14}\mathrm{C}$ の量を $m(t)$、$^{12}\mathrm{C}$ の量を M とする。M は一定とする。

- $^{14}\mathrm{C}$ の崩壊定数を λ とする。つまり数学モデル

$$\frac{m'(t)}{m(t)} = -\lambda \qquad (*)$$

に従って $m(t)$は変化する。

- 測定できる量 : t_0 時間経過後（現在）の同位体の量の比 $r(t) = \frac{m(t)}{M}$ の $t = t_0$ での $r(t_0)$

経過時間 t_0 の推定

$^{14}\mathrm{C}$ と $^{12}\mathrm{C}$ の量の比 $r(t)$ は

$$r(t) = \frac{1}{M}m(0)e^{-\lambda t} = r(0)e^{-\lambda t}$$

同位体の量の比 $r(t_0)$ がわかれば

$$e^{\lambda t_0} = \frac{r(0)}{r(t_0)}$$

より t_0 が求められる。（$r(0)$ は現在の空気中の同位体比と同じとする。）

つまり $$t_0 = \frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{r(0)}{r(t_0)}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}(\log r(0) - \log r(t_0))$$

（半減期5728年の8倍弱の4万年程度まで有効）

2.2 オイラーの公式

複素数 z に対して e^z を

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

で定義しよう。実数のときと同様に

$$\frac{d}{dt} e^{at} = a e^{at}$$

（ a は複素数）

$a = i$ の場合

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = iz\,, \quad i = \sqrt{-1} \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

という複素数に値を取る関数についての微分方程式を考える。

$$解: z(t) = e^{it}$$

これはどのような複素数値解か？

$$|z|^2 = z(t)\overline{z(t)} = e^{it}\overline{e^{it}} = e^{it}e^{-it} = 1 \text{（指数法則）}$$

単位円周上を動く。

実部・虚部の満たす方程式

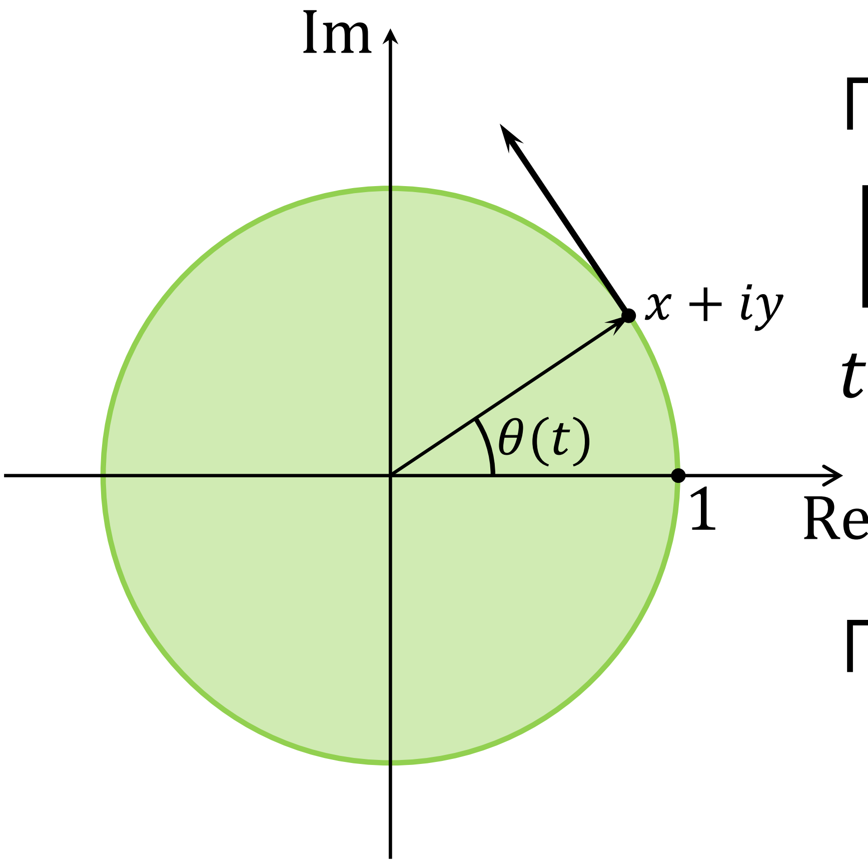
$z(t) = x(t) + iy(t)$（実部・虚部に分ける）

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = iz$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

とも書ける。

複素数平面上での動き



「円周上を半径に直角な方向 $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ に一定の速度 1 で動く」

$t = 0$ では $x(0) + iy(0) = 1$

「$z(t)$ の偏角 $\theta(t)$ が $\dfrac{d\theta}{dt} = 1,\ \theta(0) = 0$ 」と同値

$$\therefore \theta = t$$

オイラーの公式

$$x(t) = \cos\theta(t), \quad y = \sin\theta\,(t)$$

なので $\theta(t) = t$ がわかると

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t}$$

を得る。

注：角度はラジアンで測っている。$\theta^\circ = \frac{360}{2\pi}\theta$

$360^\circ = 2\pi$ （単位円周の長さ）

余弦関数、正弦関数の微分

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x$$

より　$$\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t, \ \frac{d}{dt}\sin t = \cos t$$

を得る。よって

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos t = -\cos t\,,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\sin t = -\sin t\,.$$

余弦関数、正弦関数の特徴づけ

実は

$$\frac{d^2c}{dt^2} + c = 0, \quad c(0) = 1, \quad c'(0) = 0$$

を満たすただ一つの解 c が $\cos t$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + s = 0, \quad s(0) = 0, \quad s'(0) = 1$$

を満たすただ一つの解 s が $\sin t$ にほかならない。

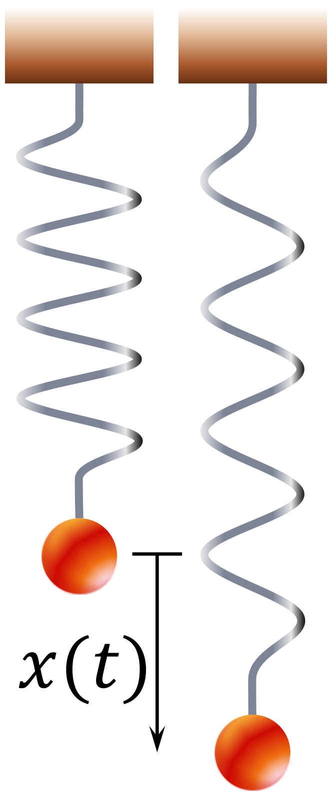
余弦関数、正弦関数の特徴づけ（続き）

連立方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

を満たす解 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ にほかならない。

バネの振動の方程式



質量 m の物体をバネにつるし、運動させたとする。静止の位置からの伸びを $x(t)$ とする。Newtonの法則によると、加速度は加わる力に等しい。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

またHookeの法則により $F = -kx$ （k : バネ定数）。

よって $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ なる方程式が得られる。

一般解

$m, k > 0$ とする

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

任意定数 C_1, C_2 は初速度と初期位置により決まる。

（２年前期の総合科目「数理科学Ⅱ」を参照）

連立系へ

高階方程式は必ず連立１階の方程式に直せる。
（逆は一般には不可能）

バネの振動の方程式の例

$\frac{dx}{dt} = -y$ と置くと

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.3 連立系と指数関数

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \overrightarrow{x_0}$$（初期値）

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$: n 次元ベクトル

A: $n \times n$ 行列

この初期値問題を解くにはどうすればよいか

抽象的解決法

行列の指数関数を定義すればよい。

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \qquad （定義）$$

（ A^0 は単位行列とする）

解は $\vec{x}(t) = \exp(At)\,\overrightarrow{x_0}$ のはず。なぜならば
$\frac{d}{dt}\exp(At) = A(\exp At)$.

例 1

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\text{ならば}\exp tA=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$$

例 2（課題）

(i) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ の場合の $\exp tA$ は？

(ii) $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ の場合の $\exp tA$ は？

（$\cos t$，$\sin t$ のTaylor展開を用いてよい。）

例 3（課題）

A を実交代行列とする。すなわち $A = -{}^tA$ とする。このとき

$$(\exp tA)^t(\exp tA)$$

は単位行列となることを何らかの方法で示せ。

行列の指数関数

⇒ Lie環、Lie群の考え方へ

マリウス・ソーフス・リー (S. Lie)

（1842～1899）

$\exp tA$ の計算法

A の固有ベクトルの方向に関しては容易。

固有値に重複があると複雑。Jordanの標準形

線形代数の活用。

（２年前期の総合科目「数理科学Ⅱ, Ⅳを参照）

まとめ

- 指数関数を用いてさまざまな微分方程式が解ける
- 三角関数は指数関数の親戚（オイラーの公式）

偏微分方程式の解法へ

熱伝導方程式の初期値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u(0) = u_0$$

$$(\ u(0, \vec{x}) = u_0(\vec{x}), \vec{x} = (x, y, z)\ )$$

解は $u(t) = e^{t\Delta} u_0$ ？

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$