指数関数と微分方程式

大学院数理科学研究科
儀我 美一

第3回　2014年6月26日（木）

内容

0. はじめに
1. 複利と指数関数
2. 残留放射性物質等を記述する方程式の抽象化
3. 抽象論で微分方程式を解くには

3. 抽象論で微分方程式を解くには

3.1 偏微分方程式のたて方

拡散方程式を例に

3.2 ２つの関数の距離

3.3 作用素の指数関数

3.1 偏微分方程式のたて方
拡散方程式を例に

偏微分: t（例えば時刻）と x（例えば位置）による関数
$u = u(t, x)$ を考える。

$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$: x を固定したときの t についての微分

$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$: t を固定したときの x についての微分

偏微分方程式: 未知関数とその偏導関数の関数関係を与える方程式

偏微分を扱う上での注意

　関数の独立変数が何であるかを常に確認すること。

例：$F(t,x) = f(t, x+t^2)$ を t で偏微分した関数と、$f(t,x)$ を t で偏微分して x に $x+t^2$ を代入したものとは異なる

偏微分方程式のたて方（拡散方程式）

① 独立変数は何か。時刻　t　$(t > 0)$

位置　x　$(-\infty < x < \infty)$

② 未知関数：密度 $\rho = \rho(t, x)$　（実数値）

③ 表現したい法則

質量保存則、Fickの法則

質量保存則の表現

(i) 区内 (a,b) での物質の総質量の時間変化率

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(t,x)\,dx$$

(ii) 1点 p で左から右に移動する質量（流量） $j(t,p)$

(a,b) での質量の変化率 ＝ 両端から流入する質量

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(t,x)\,dx = -\big(j(t,b) - j(t,a)\big)$$

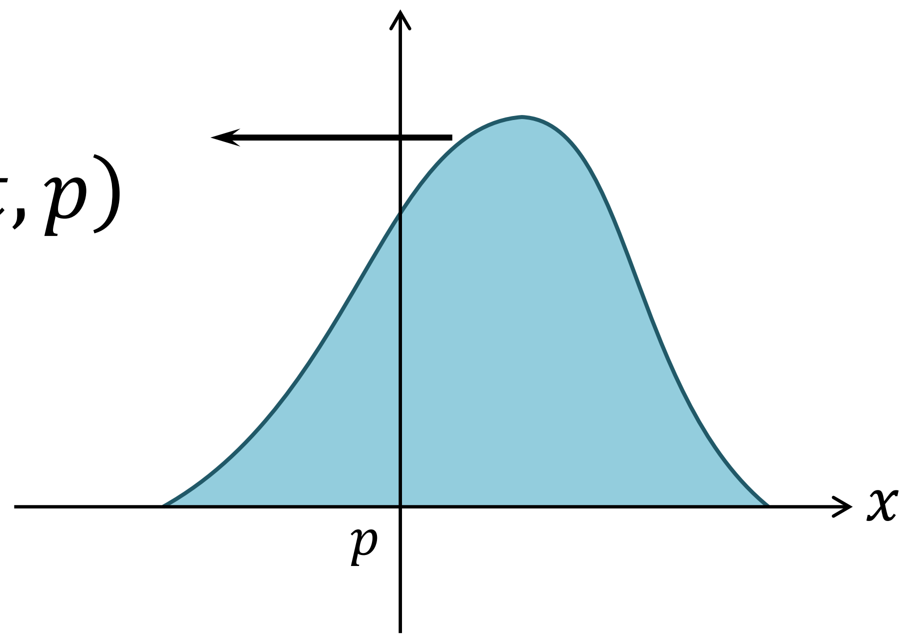
［物質の生成、消滅は考えていない］

Fickの法則

1点 p での流量は $-\rho$ の傾きに正比例する。

$$j(t,p) = -k\frac{\partial\rho}{\partial x}(t,p)$$

$k > 0$　定数



表現したい法則

考えている区間 I の中のすべての区間 (a, b) の中で

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^b \rho(t,x)\,dx = -(j(t,b) - j(t,a)) \\ j(t,p) = -k\dfrac{\partial \rho}{\partial x}(t,p), \qquad p = a, b \end{cases}$$

が $t > 0$ で成立する

微分積分学の基本定理

$$j(t,b) - j(t,a) = \int_a^b \frac{\partial j}{\partial x}(t,x)\,dx.$$

積分記号下の微分ができて

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(t,x)\,dx = \int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x)\,dx$$

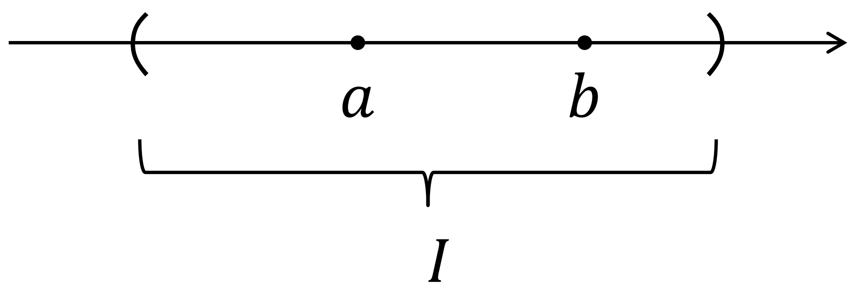
とすると、表現したい法則は

$$\int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x)\,dx = -\int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\right)(t,x)\,dx.$$

表現したい法則（積分形）

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x) - k\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(t,x) \right\} dx = 0$$

が I の中の任意の区間 (a,b) 上、$t > 0$ で成立



変分学の基本補題の一つの形

課題　f を I での（実数値）連続関数とする。

I の任意の部分区間 (a,b) で $\int_a^b f\,dx = 0$

とすると $f = 0$ となることを証明せよ。

表現したい法則(微分形)

積分形の{　　}内が連続であれば、{　　}内がゼロ。すなわち

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x) - k\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad x \in I, \quad t > 0$$

が得られる。この方程式を**(線形)拡散方程式**または**熱(伝導)方程式**という。

[熱方程式の場合 ρ は温度、Fickの法則はFourierの法則]

境界条件、初期条件

　熱方程式だけでは ρ は決まらない。常微分方程式（独立変数がひとつの偏微分方程式）と同様に初期条件が必要。また I が有界区間の場合は、I の両端での境界条件が必要。

「境界での流量なし」を表現すると

Neumann（ノイマン）条件　$\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0$　（I の両端）

「境界で常に密度が 0」を表現すると

Dirichlet（ディリクレ）条件　$\rho = 0$　（I の両端）

初期値境界値問題（Dirichlet条件）

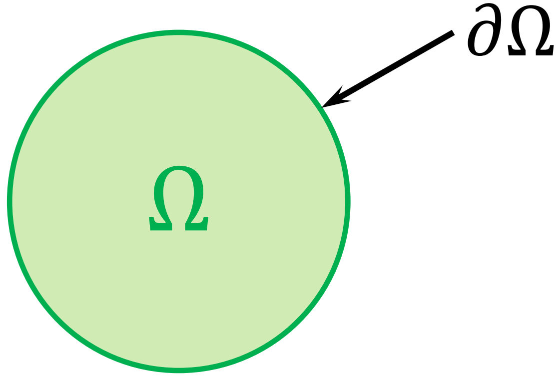
$$\mathrm{IVP}\ \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}(t,x) = k\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(t,x), \quad x \in I, \quad t > 0 \\ \rho(t,x) = 0, \quad x \in \partial I = I \text{ の両端}, \quad t > 0 \\ \rho(0,x) = \rho_o(x), \quad x \in I \end{cases}$$

与えられた初期値に対して、IVP を満たす ρ を求めよ。

高次元の場合

Ω を物質がある3次元内の有界領域とする。
（つまり十分大きな球に含まれる連結な開集合とする。）

$$
\mathrm{IVP}\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = k\Delta\rho \quad \text{in} \quad \Omega, \quad t > 0 \\ \rho = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \rho = \rho_o \quad \text{in} \quad \Omega \quad \text{at} \quad t = 0 \end{cases}
$$



$$\rho = \rho(t, \vec{x}), \vec{x} = (x, y, z)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplacian（ラプラシアン）

導出：数理科学Ⅰ，Ⅲ参照：微積分の基本定理の応用であるガウスの発散定理を用いる。

難易度

	難	易
独立変数の数	多い	少ない
従属変数の数	多い	少ない
微分の階数	多い	少ない
構造	非線形	線形［熱方程式など］

偏微分方程式を常微分方程式、
常微分方程式を代数方程式にしばしば帰着

1次元熱方程式のDirichlet問題

Fourierによる Fourier級数による解法（1811年頃）
ジャン・バティスト・ジョゼフ・フーリエ
（1768〜1830）

関数の無限和が含まれている。
どのような意味で収束するのか？
（20世紀までの解析学の大問題であった）

アメリカ数学会発行のMathematical Reviews（数学評論）による数学分野の分類

00 一般
01 歴史と伝記
03 数理論理及び数学基礎論
05 組合せ論
06 順序，束，順序代数構造
08 一般代数系
11 数論
12 体論と多項式
13 可換環と可換代数
14 代数幾何学
15 線形と多重線形代数; マトリックス理論
16 結合的環と代数
17 非結合的環と代数
18 カテゴリー論，ホモロジー代数
19 K理論
20 群論とその一般化
22 位相群，リー群
26 実関数
28 測度と積分
30 複素一変数関数
31 ポテンシャル論
32 複素多変数関数と解析空間
33 特殊関数
34 常微分方程式
35 偏微分方程式
37 力学系・エルゴード理論
39 差分方程式と関数方程式
40 列，級数，総和可能性
41 近似と展開
42 フーリエ解析
43 抽象調和解析
44 積分変換，演算子法
45 積分方程式
46 関数解析
47 作用素論
49 変分法，最適制御，最適化
51 幾何学
52 凸幾何と離散幾何
53 微分幾何学
54 一般位相空間論
55 代数的位相幾何学
57 多様体と胞複体
58 大域解析，多様体上の解析
60 確率論と確率過程
62 統計学
65 数値解析
68 計算機科学
70 質点と質点系の力学
74 変形可能な固体力学
76 流体力学
78 光学，電磁気学
80 古典的熱力学，熱の移動
81 量子論
82 統計力学，物質の構造
83 相対論と重力理論
85 天文学と宇宙物理学
86 地球物理学
90 OR理論，数理計画法
91 ゲーム理論，経済学，社会科学および行動科学
92 生物学およびその他の自然科学
93 システム理論，制御
94 情報と通信，回路
97 数学教育

The 2000 Mathematics Subject Classification, by editors of Mathematical Reviews and Zentralblatt fur Mathematik. http://www.ams.org/msc/pdfs/classifications2000.pdf (Japanese translation by Department of Mathematics, Hokkaido University)

高次元問題

領域Ωが球や直方体といった比較的簡単な形状でないと、「解」は具体的な関数では書けなくなってくる。どのように解を捉えたらよいか？

→ 関数解析、関数空間

3.2 2つの関数の距離

偏微分方程式を関数の空間に値をとる常微分方程式とみなしたい。

- 第2回: 複素数値関数の常微分方程式

  ベクトル値関数の常微分方程式

を扱った。

熱方程式 $(k = 1)$ のDirichlet条件つき問題を考えよう。

熱方程式を常微分方程式とみるために

まず、時刻 t に対して Ω 上の関数$[x \mapsto \rho(t,x)]$を対応する写像、すなわち

$$t \mapsto \rho(t,\cdot)$$

を u で表す。Ω 上の定義された x を変数とする関数を１点とみることがポイント（パラダイムシフト）。

関数空間

　個々の関数を考えるのではなく、似た性質を持つ関数全体を考える。ベクトル空間であることが多いが、通常無限次元（無限自由度）である。これを統制するには、きちんとした収束概念、つまり２つの関数が近い、遠いを記述する必要がある。

ノルム

$C[0,1]$ ＝ 閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体

$f \in C[0,1]$ に対して

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| | 0 \leq x \leq 1\}$$

と置く。つまり $|f|$ の最大値とする。

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

と置く。共にノルムであるが、性質が大きく異なる。

参考: $\|\cdot\|$ がベクトル空間 V のノルムであるとは、次の３条件を満たすことである。

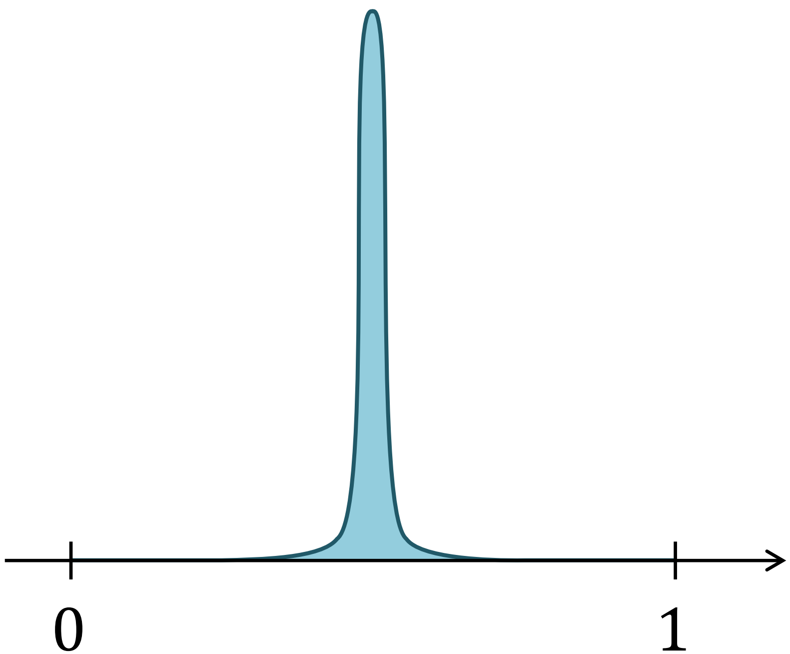
(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|cx\| = |c|\|x\|,\ \ c$ スカラー

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ （三角不等式）

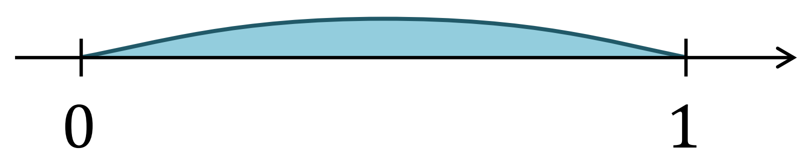
ノルムによる関数の大きさの比較

$\|f\|_\infty$ 大, $\|f\|_1$ 小



$\|f\|_\infty$ 小

（$\|f\|_1$ も小）

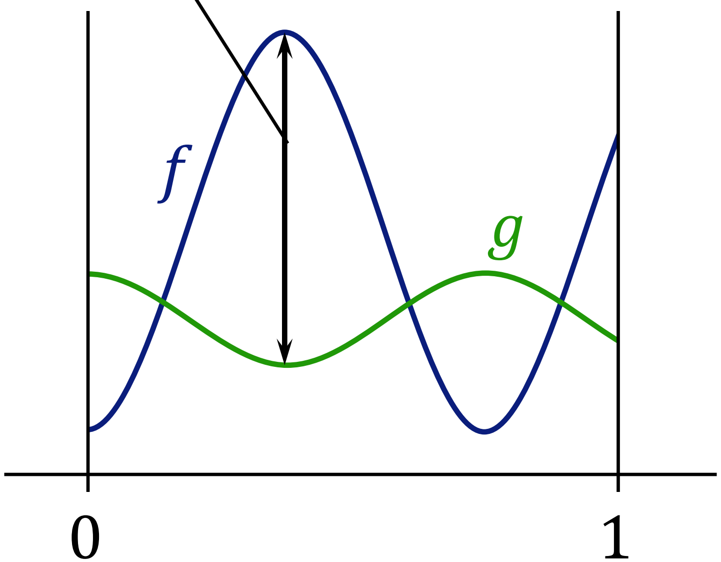


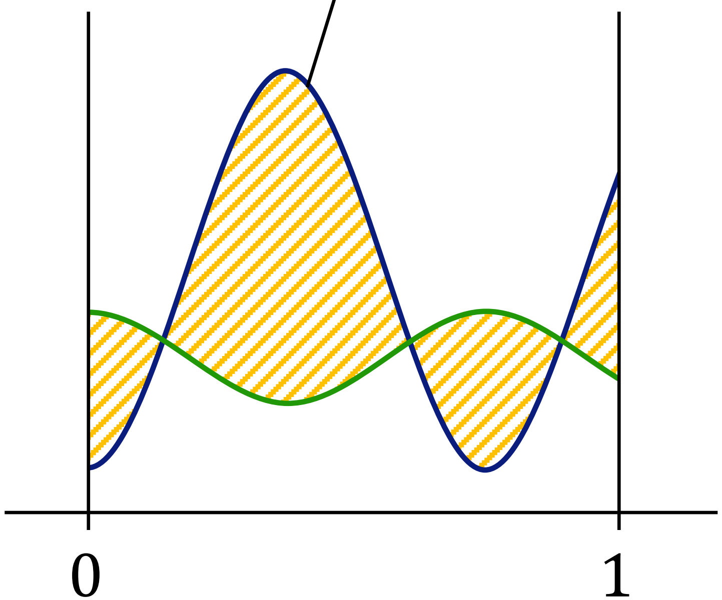
2つの関数の近さ、遠さ

ノルムを用いると2つの関数の距離を定義できる。（距離が定まると収束概念が作られる（「集合と位相」数学科４学期））

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$$

$$d_1(f,g) = \|f-g\|_1$$





完備性

有理数全体と実数全体の違い。有理数全体は隙間あり。「極限」をとると極限値が有理数でなくなることがある。実数全体はそのようなことはない。完備である。

$C[0,1]$ に対して $\|\cdot\|_\infty$ をノルムとすると完備。しかし

$C[0,1]$ に対して $\|\cdot\|_1$ をノルムとすると完備ではない。

完備でない空間は扱いにくい。

Hilbert空間とBanach空間

Hilbert空間 ＝ 完備内積空間

Banach空間＝ 完備ノルム空間

ダーヴィト･ヒルベルト
（1862～1943）

ステファン･バナッハ
（1892～1945）

* Credit: Home Page of Stefan Banach
http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/e-index.html

熱方程式を常微分方程式とみる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta \rho \quad \text{in} \quad \Omega, \quad t > 0 \\ \rho = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \quad t > 0 \\ \rho = \rho_o \quad \text{in} \quad \Omega \quad \text{at} \quad t = 0 \end{cases}$$

これを $u: t \mapsto \rho(t,\cdot)$ を用いて、X（$= C[0,1]$ など）に値をとる関数の常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta_D u, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X \quad (u_0 = \rho_o) \end{cases}$$

とみる。Δ_D はDirichlet条件付Laplace作用素。

作用素という考え方

$$x \to \boxed{\quad} \to Ax$$

例1　λ正数

$$-\lambda \text{倍} \quad x \text{ 実数} \longmapsto -\lambda x$$

例2　$i = \sqrt{-1}$

$$i \text{ 倍} \quad z \text{ 複素数} \longmapsto iz$$

$$z = a + ib \longmapsto iz = -b + ia$$

定数倍を、数を数に移す「作用素」とみなす。

作用素としての行列

例3 $A: n \times n$ 行列

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto Ax$$

例えば $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto Ax = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

行列 A を、ベクトルを別のベクトルに移す作用素とみなす。

作用素としての偏微分

$$u \longmapsto \Delta_D u$$

Δ_D を、関数 u に対して $\Delta_D u$ を対応させる作用素とみなす。

3.3 作用素の指数関数

X をBanach空間として、A を X での線形作用素とする。このとき

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, \qquad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

を解け。（ $A = \Delta_D$ として）

有界作用素の指数関数

　A が X 上連続の場合は $\|Au\|$ が $\|u\| \leq 1$ 上有界であるため（A を有界作用素という）、指数関数 $\exp A$ を

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

で定義できる。したがって解 $u = (\exp tA)\, u_0$ で与えられる。

偏微分方程式への応用

偏微分作用素 Δ_D の場合は有界作用素ではなく、定義域も X 全体ではない。どのようにして $\exp A$ を構成するか。

（$\exp(-\Delta_D)$ は構成できない、負の時間方向にはよほど関数空間を小さくしないと、熱方程式は解けない。）

Δ_D の指数関数を用いると、熱方程式の解は $u(t) = \exp(t\Delta_D)\, u_0$ と表される。

吉田近似による構成法

$$A_\lambda = A\,(I-\lambda A)^{-1} = \frac{A}{1-\lambda A},\quad \lambda > 0$$

を A の吉田 (Yosida) 近似という。A_λ は A が非有界でも有界である。

$$(\exp A)f = X-\lim_{\lambda\downarrow 0}(\exp A_\lambda)f$$

で定義。$(I-\lambda A)^{-1}$ に適切な条件があれば、$\exp tA$ が $t>0$ で定義できる。

[関数解析の抽象的定理として記述。Hille − Yosida の定理]

Hilleによる方法

（E. Hille, 1894～1980）

$$(\exp A)f = X - \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{A}{n}\right)^{-n} f$$

で定義。これは指数関数の定義そのもの。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{r}{n}\right)^{-n} = 1/\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{(-r)}{n}\right)^{n} = 1/e^{-r} = e^{r}$$

$\left(I - \frac{A}{n}\right)^{-1}$:吉田作用素

差分法との対応

$$\frac{du}{dt} = Au$$

（陽的オイラー法） $\dfrac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = Au^n$ で

時刻 $n\Delta t$ の値を u^n で近似。

（陰的オイラー法） $\dfrac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = Au^n$

$$\Leftrightarrow u^n = (I - \Delta t\, A)u^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow u^{n+1} = (I - \Delta t\, A)^{-1}u^n.$$

$\Delta t = \dfrac{1}{n}$ とすると $u(1) \approx \left(I - \dfrac{A}{n}\right)^{-n} u_0.$

吉田耕作教授
（Yosida, Kôsaku 1909～1990）

Kosaku Yoshida (1969), The Oberwolfach Photo Collection
http://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=4614

本学名誉教授

半群論創設: $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \quad t, s > 0$

著書 ”Functional Analysis” は現在でも関数解析の重要文献

関数解析の偏微分方程式への爆発的応用につながる

発展1．放物型半群（例：$\exp(t\Delta_D)$）

- 熱伝導方程式のように平滑化効果の強い「半群」のクラスの放物型半群論の定式化（加藤敏夫、吉田耕作）
- Navier-Stokes方程式の解の構成へ（加藤敏夫、藤田宏 1962）

定義　$\exp tA$ が**放物型**であるとは、$t\|A(\exp tA)f\|/\|f\|$ が $(0,1)$ で有界であることをいう。

放物型半群（続き）

具体的な作用素 A の $\exp tA$ が放物型かどうかは難しい

$A = \Delta_D$,　$X = L^p(\Omega)$,　$1 < p < \infty$　S. Agmon …..

$X = C(\overline{\Omega})$　K. Masuda（増田久弥 ’72）

A: Stokes作用素 L^p 型 $(1 < p < \infty)$　V. A. Solonnikov ’77

Y. G. ’81

$X = C(\overline{\Omega})$型　K. Abe – Y. G. ’13

発展2．非線形半群

- $\dfrac{du}{dt} = A(u)$,　A が極大単調作用素

X : Hilbert空間の場合の解法

高村幸男 ’67, Brezis……

非線形の問題でも、例えば凸関数の勾配流の場合の解が構成できるようになった。

$$\frac{du}{dt} = -\operatorname{grad}\varphi(u)$$

まとめ

- 時間発展型の偏微分方程式を、関数空間に値をとる関数についての常微分方程式と考えることにより、半群論を適用できる可能性が出てくる。
- 関数解析の抽象論を用いることにより、類似の方程式が一斉に解ける。
- 抽象的には作用素の指数関数をどう作るかが鍵。