整数と有理数の狭間で

–数学者の問題意識ー

目次

- 油分け（江戸時代の数学の楽しみと現代数学）

  ４月１７日

- 整数を多項式に代入する

  ４月２４日

映画ダイハード　３

著作権の都合により
この部分の講義映像を削除しました

『ダイ・ハード3』（ジョン・マクティアナン［監督］、
ブルース・ウィリス［主演］、20世紀フォックス［配給］、1995年）
「3ガロンの容器と5ガロンの容器で4ガロンの水を得て、
量りの上に置いて爆弾を止める場面」を使用

５ガロンと3ガロンのタンクで　４ガロンを取り分けよ

- 目分量は駄目
- 各タンクの，すり切りいっぱいを使え
- 時間内にできなければ爆発が起こるぞ

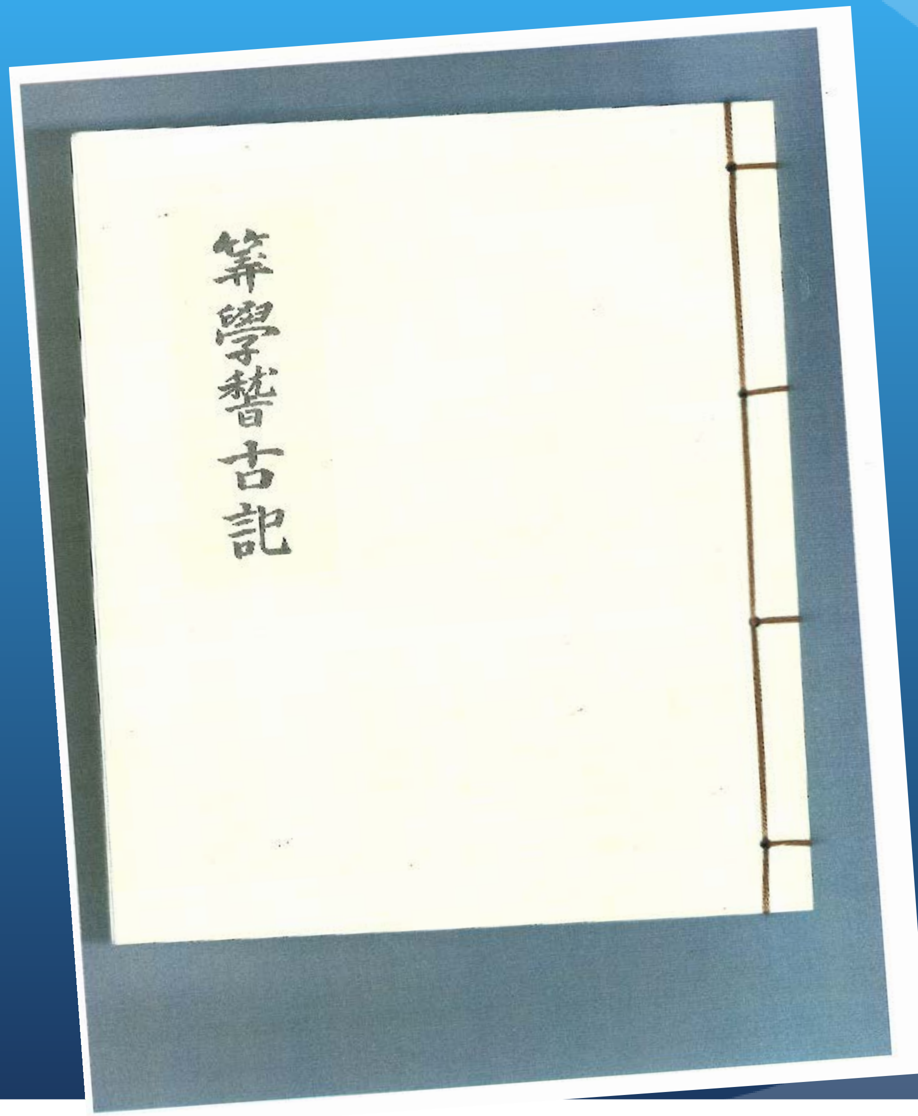
マクレーン刑事の解法

- T5で水を汲む
- その水をT3に移し替える
- （T5には２ガロン残る）
- T3の水を噴水に戻す
- T5にある２ガロンを、T3に移す
- T5で水を汲む
- その水をT3に移す（１ガロンだけ入る）
- T5には４ガロンが残る

別解

- T3 で２回水をくみ，T5 に移し替える.
- T5 は一杯になり，T3に１ガロン残る.
- T5 の水は噴水池にもどし，T3 の１ガロンをT5 に移す.
- T3 で水をくみ T5 に移し替える.
- これで T5 に 4 ガロンが入っていることになった.

江戸時代からある油分けの問題



この本の著者　林五郎兵衛さん

- 中をちょっと覗いてみよう

油をわくる秘事

油壱斗を二人してわけるに但し桝三升桝と七升ますしかなし五升づゝわくる時ハ先三升の桝にてくみ三ばいをて此内を七升桝へ一ばい残し跡の二升を又桶より三升合せ都合て五升づゝとなる也

伏見稲の傳

銘壱ヶ年四万人ハ割ハ[illegible] 日ニ [illegible]

餅 [illegible] 日ニ [illegible]

米 五万石 [illegible] 代金 日ニ [illegible]

金 弐拾万両 [illegible] 日ニ 弐百箱

麦 九万石 [illegible] 日ニ 百八十俵

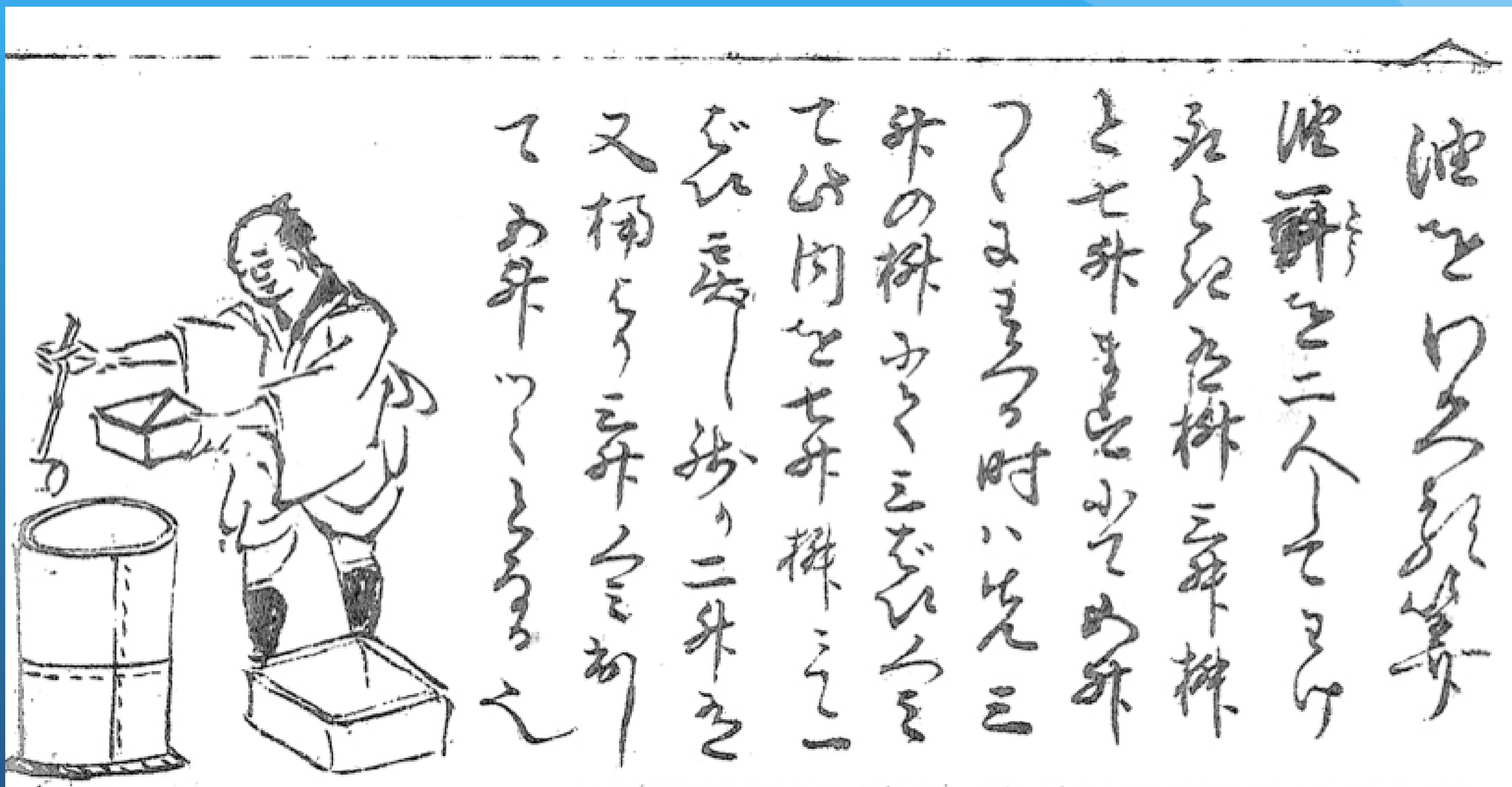
麦 三千六百石 [illegible] 俵数 日ニ 八十俵

酒 [illegible] 日ニ 百四[illegible]

味 [illegible] 割人数日ニ [illegible]

板 八千枚 [illegible] 代金 日ニ [illegible]

大判 一枚 [illegible] 日ニ [illegible]



桶A から７升のますと３升のますで，５升の油をとりだせ

林五郎兵衛さんの解法

Ｍ３で油をくみM7に移し替える

- これを３回繰り返す　（M3に２升残っている）
- M7の油を元の桶に戻し，M3にある２升をＭ７に移す
- M3であらたに油をくみ，M7に移し替える
- これでM7に５升の油が入ったことになった

他にも解法がある

- 皆さん考えてみてください

解法はただひとつではない

- いかに効率よい手順で取り分けられるかを考える問題
- いい答えを見つけるのが大切
- これは高校までの数学と同じ

では現代の数学は何を考えるか？

- 答があるかないかを考える

  どんな条件の下で答があるかをはっきりさせる
- 答があるとしたらそれをすべて求める
- 可能な限り一般的な設定で答を求める

これはどういうことなのか？

- 油分けの問題を例にとって見てみよう

簡単のために
問題をちょっと変えてみよう

- ２つの枡を使って　桶A に入っている油を桶B に移すことにする
- ２つのますだけを使って油を取り分けるばあいは，取り分ける油の量は大きい方のますの容量を超えることはできない.
- しかし桶Bに移す問題ならば取り分ける油の量に上限はいらない
- 例えば２合と５合の升で，31合の油を取り分けられるかという問題も可能

それでは問題を設定しよう

- r, s を正の整数とする.
- 樽A に十分多くの油が入っているとする
- r 合のます Mr と，s 合のます Ms を使って　任意の整数 n 合の油を樽B に移したい.
- どんな n についてもこれが可能であるためには r と s はどのような条件を満たさなければならないか？
- その条件を満たしているとき，樽Bに n 合を移す手順の一般解は？

すぐに分かること

- 例えば、r, s がともに偶数だったら取り分けられる油の量も偶数でしかあり得ない
- これを一般化すると，r, s がともに d の倍数の場合，取り分けられる油の量も d の倍数
- d > 1 の場合，任意の n 合を取り分けることは出来ない.
- r と s の最大公約数 gcd(r, s)=1 でなければならない.

では gcd(r, s)=1 なら

どんな n 合でも樽 B に移すことができるのか

答はイエス！

- Mr で油を樽B に移すと樽Bの油の量は＋ r
- Msで油を樽B に移すと樽Bの油の量は＋ s
- 同様に
- Mr で油を樽Bから樽A に戻すと樽B の油の量は　－ r
- Ms で油を樽Bから樽A に戻すと樽B の油の量は　- s

- どんな手順でも樽Bの中にある油の量は常に
- $\alpha r + \beta s$ (α, β は整数）　の形
- だから任意の n に対して
- $\alpha r + \beta s = n$
- となるような 整数 α, β を見つけられれば良い.

gcd(r, s)=1 であったから

- α r + β s = 1 となるような整数 α, β は存在する.
- ここで整数 α, β がともに正となることはない
- ともに負となることもないことに注意
- 両辺に n をかける
- nα r + nβ s = n
- (nα) r + (nβ) s = n

$(n\alpha)\, r + (n\beta)\, s = n$ は何を言っているのか

- $\alpha > 0$, $\beta < 0$ の時
- Mr で $n\alpha$ 回油を樽A から樽B に移し，Ms で $-n\beta$ 回 樽Bから樽A に油を戻すと，
- 樽B には n 合の油が残る
- これで「gcd(r, s)=1 ならば任意の n 合を樽Bに移す手順がある」ということが証明できた
- この証明は一般的な手順も示している．

- Mr で nα 回油を樽A から樽B に移し，Ms で nβ 回 樽Bから樽A に油を戻すというのが一般解
- しかしこれは実際の作業としてはあまり手際が良くない.
- 江戸時代の数学者から笑われるかもしれない
- マクレーン刑事は爆発で帰らぬ人に
- しかしこれはどのような r, s, n についても有効な方法で数学的にはシンプルな方法
- これが現代の数学

では最初の問題に戻ろう

- 桶Bがなくて，Mr と Ms だけから n 合の油を取り出すことはできるか？
- ますの中に最終的に収まらなければならない.
- n < max {r, s} でなければならない.
- では　n < max {r, s} ならばいつでも n 合の油を取り出せるのか？

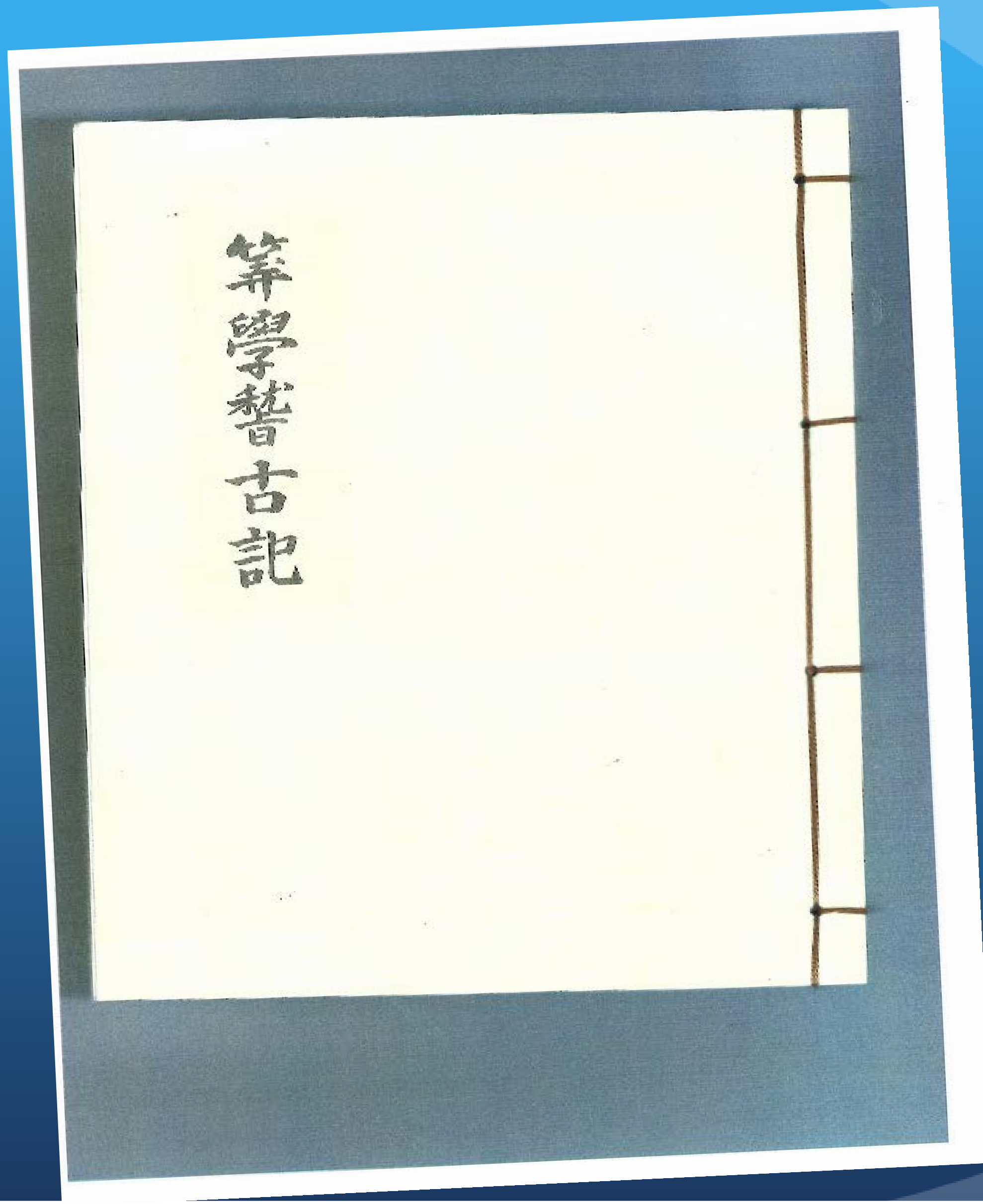
すぐ分かること

- やはり先ほどの場合と同じように gcd(r, s) = 1 であることが必要

問題

- gcd (r, s) =1 で $n < \max\{r, s\}$ のとき, Mr と Ms だけを用いて n 合の油を取り出せるか？

さて、算学稽古記に戻ろう


筭學稽古記

林五郎兵衛

林五郎兵衛さんは

- 江戸時代末期から明治時代にかけて生きた,
  富山県高岡市のお医者さん　（高岡市は石井の故郷）
- 数学が大好きで、医業のかたわら日々算学を勉強していた.
- 彼が書いた算学の練習帳がこの「算学稽古記」.
- 彼のひ孫の林武雄（内科医）さんが石井の父（内科医）の友人.
- ある日林武雄先生が石井の実家を訪れこう言った.

「君の娘さんは数学者だってね.

これをプレゼントしたいんだけど」

そしてこの「算学稽古記」をくださった.

数学は一部のエリートだけのものではなかった

- 昔から日本には小さな地方都市にも数学の大好きな人がいた
- あちこちのお寺に算学の問題と解答を書いた絵馬が残っている.
- いまでも地方の小さな大学から素晴らしい才能を持った若い研究者が出てきている.
- これは数学の素敵な特性

もうすこしinternational な話

証明を知らない数学者

- シュリニバサ・ラマヌジャン

（**Srinivasa Aiyangar Ramanujan**、

1887年12月22日 - 1920年4月26日）

Srinivasa Ramanujan

Photo from the Oberwolfach Photo Collection
http://owpdb.mfo.de/detail?photoID=2328

ラマヌジャン

- インドの数学者
- 数学以外の成績が悪くて大学を落第
- マドラス（インド）で事務員をしながら数学を勉強
- 数学的発見をイギリスの数学者たち
  （ヒル、ベイカー、ボブソン，ハーディー）
  に送る

しかし

- ヒル，ベイカー，ボブソンは手紙を無視
- ハーディーも一旦は手紙をゴミ箱へ

ゴッドフレイ・ハロルド・ハーディ

その後テニスに行った ハーディー先生

- ラマヌジャンの手紙が何だか気になる
- 戻ってゴミ箱から取り出した手紙を読み返してみると. . .
- 色々な公式が書かれている.
- よく知られている公式もあった.
- よくわからないものもあった.
- しかしハーディー自身が発見して, まだ発表していない結果も書かれていた.

ハーディーはラマヌジャンを呼び寄せた

- イギリスのケンブリッジにやってきたラマヌジャン
- ハーディーとディスカッション
- ハーディーは「彼は天才だ」と見抜いた.

しかし

- ラマヌジャンは証明の概念を持たなかった
- 多くの公式を証明したわけではなかった
- ラマヌジャンは「神様のお告げ」だと言う
- 何らかの方法で深く考えたのだろうと思われる
- どんな方法かは未だに謎である

ラマヌジャンの公式の一例

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(4^n 99^n n!)^4}$$

ラマヌジャンとハーディーは名コンビ

- ラマヌジャンが朝持ってきた公式に、ハーディーは1日をかけて証明を付ける
- どんどん論文ができる
- ハーディーがいなければラマヌジャンの業績はあり得なかった
- ラマヌジャンのアイデアがなければハーディーは論文を書けなかった

有名なエピソード

- ある日ハーディーはラマヌジャンに会った時,
- 「ここに来る途中，乗ったタクシーのナンバーが 1729

  だったよ．たいして面白い数ではないね」と言った.
- ラマヌジャンは
- 「いやいや面白い数だよ，それは２通りの立方数の和で表される最小の数です」と言った.

$$\mathbf{1729=12^3+1^3}$$

$$=10^3 + 9^3$$

ラマヌジャンは全ての整数と個人的なお友達

これがきっかけで、
「タクシー数」というものが
研究されるようになった.

n 次タクシー数　Ta(n) とは？

- ２つの異なる立方数の和として n 通りに表される最小の正整数のこと

そこで現代数学は考える.

- どんな n についても Ta(n) は存在するのか
- つまり，n 通りの　立方数２つの和で表される正整数は存在するのか？
- YES
- 後にハーディー自身が証明した.

数学者の座右の銘

- Publish or Perish

早い者勝ちの世界

- 同じ定理を他の人がすでに出版していたらその定理は，たとえ自分の力だけで証明したとしても，自分の業績にはならない．
- きびしい世界

それでも数学者は考え続ける

- 考えることが好きだから,
- 数学が美しいから

- これは日本中にいた、
  無数の林五郎兵衛さんと同じ

皆さんも

考えることが好きになってほしい