整数を式に入れてみよう

石井 志保子

n ：整数

n^2：整数

n^3：整数

⋮

n：整数　a：整数

$a \cdot n$：整数

$a \cdot n^2$：整数

$a \cdot n^3$：整数

$\vdots$

これらをたしてみよう

n： 整数　　$a_{0,}\, a_{1,}\, a_{2,} \cdots a_d$: 整数

$$a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0$$

整数！

x： 変数　$a_0, a_1, \cdots a_d$： 整数

$$f(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$$

このような式を整数係数の多項式

整数係数の多項式 $f(x)$ に

どんな整数 $x = n$ を代代入しても

その値 $f(n)$ は整数

では有理数(分数)係数の

多項式を考えてみよう

$a_{0,} a_{1,} a_{2,} \cdots a_d$：有理数

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

例：$f(x) = \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{3} x^2 + \frac{3}{4} x + \frac{2}{5}$

有理数係数の多項式に

整数を代入すると値は

整数になるか？

なったりならなかったり

例 $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}x \ + 1$

$f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{31}{12}$ 整数でない！

$f(60) =$ 整数

ではどんな整数を代入しても

値が整数になるような

有理数係数の多項式はあるか？

例えば

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$f(2) = \frac{1}{2}4 = 2 \qquad OK$$

$$f(1) = \frac{1}{2}1 = \frac{1}{2} \qquad No!$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$f(3) = \frac{1}{2} \times 9 - \frac{1}{2} \times 3 = 3$$

$$f(4) = \frac{1}{2} \times 16 - \frac{1}{2} \times 4 = 6$$

$$\vdots$$

(答)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

にどんな整数を代入しても

値は整数になる

なぜ？

n： 任意の整数

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n\,(n-1)$$

どちらかが偶数

n がどんな整数であっても

$$f(n) = \frac{1}{2}n\,(n-1)$$

は整数

同じ考え方をもっと進めてみよう

$$②, 3, ④, 5, ⑥, 7, ⑧ \cdots$$

2の倍数は1つおきに出てきた

$$2, ③, 4, 5, ⑥, 7, 8, ⑨, 10\cdots$$

3の倍数は2つおきに出てくる

$$\overbrace{7,\ 8,\ \underline{\underline{9}}}^{\text{３個の数の並び}}$$

↑

必ず１つが３の倍数

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

を考えてみよう

n：任意の整数

$$n\,(n-1)(n-2)$$

１つは3の倍数

少なくとも1つは2の倍数

したがって

$$f(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

は整数

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

- にどんな整数 x=n を代入しても，値は整数になる

- 定義：　このように　どんな整数を代入しても値が整数になるような，有理係数多項式 $f(x)$ を

- 　　　　数値的多項式と呼ぶ

- 数値的多項式は他にどんなものがあるか

さっきの考え方をもっと押し進めてみよう

８個の数の並び

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

＝

↑

その中に必ず８の倍数がある

$$f(x) = \frac{\overbrace{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)}^{r\text{個}}}{r \cdot (r-1)\ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

n： 任意の数

$$\overbrace{n, n-1, \ldots n-r+2, n-r+1}^{r\text{個の数の並び}}$$

必ず1つは r の倍数

必ず1つは $r-1$ の倍数

⋮

必ず1つは 2 の倍数

$$f(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r \cdot (r-1) \dots \cdot 2 \cdot 1}$$

は整数

例 $f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

$$f(13)=\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$f(13) = \frac{13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot 10}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1}$$

$$f(13) = \frac{13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot \overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}$$

$$f(13) = \frac{13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot \overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}$$

$$= 13 \cdot 11 \cdot 5$$ 整数

$$f(x) = \frac{x(x-1)\ldots(x-r+1)}{r \cdot (r-1)\ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \binom{x}{r}$$ と表す

これは実は皆さんの良く知っているもの

$$n \geq r > 0$$ 自然数のとき

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$\binom{x}{r} = \frac{x(x-1)\ldots(x-r+1)}{r \cdot (r-1)\ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

の x にどんな整数を代入しても

値は整数になることがわかった

これを２項係数多項式と呼ぶ

どんな整数を代入しても

値が整数になる

有理係数の多項式は

他にもあるの？

あるある

すぐに分かるのは

- 数値的多項式 $\begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ の和
- 数値的多項式の整数倍 $c\begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix}$
- もっと一般的に書くと

$\binom{x}{r}$達に整数の係数をつけて
和をとったもの

$$c_r\binom{x}{r}+c_{r-1}\binom{x}{r-1}+\cdots+c_0$$

$c_{0,}\dots\ c_r$は整数

他にはあるの？

実はこれだけ

定理　任意の整数を代入すると値が
整数になる有理係数多項式 $f(x)$ は,
次の形のみ

$$f(x) = c_r \binom{x}{r} + c_{r-1} \binom{x}{r-1} + \cdots + c_1 \binom{x}{1} + c_0$$

$(c_{0,} \ldots c_r$ は整数$)$

これは数学の定理の典型的な形

1. 数学的対象Pがある性質Qをもつ

2. ある性質Qをもつのは対象Pのみである

何らかの性質を持つものをすべて決定したい

- これが現代の数学者の問題意識

前回の油分けの時と同様,

- 答があるかないかを考える
- あるとしたら答を全て求める

このような定理にたどり着くと数学者は安心する

ちょっと待てよ！

2項係数多項式の積は？

$$\binom{x}{r}\binom{x}{s}$$

$$\binom{x}{r_1}\binom{x}{r_2}\cdots\binom{x}{r_n}$$

この定理は何か抜けている？

- 大丈夫！
- この定理は、先ほどの積の形の数値的多項式も

$$f(x) = c_r \binom{x}{r} + c_{r-1} \binom{x}{r-1} + \cdots + c_1 \binom{x}{1} + c_0$$

このように表されるという事を示している

実は強力な定理

では定理の証明をしよう

[証明]　$f(x)$を, 任意の整数を代入すると値が整数になる有理多項式とする

$$f(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

($a_{0,}$ … a_rは有理数)

$a_r \neq 0$ のとき, r を $f(x)$ の次数と呼ぶ

次数 r に関する帰納法で示そう

(Ⅰ) $r = 0$の時, $f(x) = c_0$ (c_0: 整数)

たしかに定理の主張はみたされている

(Ⅱ) $r > 1$とし, $r - 1$まで主張は

正しいとしよう

$$\binom{x}{r} = \frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}$$

$$\binom{x}{r} = \frac{x^r}{r!} + term\ of\ degree\ \leq r-1$$

$$\binom{x}{r} = \frac{x^r}{r!} + term\ of\ degree\ \leq r - 1$$

$$f(x) = a_r x^r + term\ of\ degree\ \leq r - 1$$

$$f(x) = a_r \cdot r!\binom{x}{r} + a'_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_0{}'$$

とかける

これを順にくり返してやることにより

$$f(x) = c_r \binom{x}{r} + c_{r-1} \binom{x}{r-1} + \cdots + c_0$$

$c_{0,} \ldots c_r$は有理数の形にできる

$c_{0,}\ c_{1,} \ldots c_r$が整数になることを示そう

$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ と定義すると

これも任意の整数を代入すると, 値が

整数になる多項式

次数はn次より低い

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

$$= c_r \binom{x+1}{r} + c_{r-1} \binom{x+1}{r-1} + \cdots$$

$$-c_r \binom{x}{r} - c_{r-1} \binom{x}{r-1} - \cdots$$

$$\Delta\binom{x}{r} = \binom{x}{r-1}$$ なので

$$\Delta f(x) = c_n\binom{x}{r-1} + c_{n-1}\binom{x}{r-2} + \cdots + c_1$$

次数は$r-1$次！

帰納法の仮定より

$c_{r,}c_{r-1}\dots c_1$は整数

ではc_0は？

$$c_0 = f(x) - c_r\binom{x}{r} - c_{r-1}\binom{x}{r-1} - \cdots - c_1\binom{x}{1}$$

任意の整数nに対し

$$c_0 = \underbrace{f(n)}_{\text{整数}} - \underbrace{c_r\binom{n}{r} - \cdots - c_1\binom{n}{1}}_{\text{整数}}$$

よってc_0も整数

[証明終]

皆さんもこれからこのような形の定理に
数多く出会うでしょう
自分で証明することになるかも知れません

Publish or Perish について

歴史的なエピソード

※参考文献：藤原正彦『天才の栄光と挫折―数学者列伝』
新潮選書、2002年

Isaac Newton

- イギリスの数学者物理学者
- （1642年12月25日 - 1727年3月20日）
- 微分積分学の基礎を築いた
- 古典力学の基礎を築いた
- 万有引力の法則で有名に（ニュートンとりんごの木）

Isaac Newton

- イギリスの田舎町で生まれ，幼い頃から才能を発揮
- ケンブリッジ大学トリニティカレッジに入学
- ケンブリッジ大学のバロー教授に高く評価され，後に特別名誉ある地位であるルーカス教授のポストを得る.
- （今のルーカス教授はマイケル・グリーン、その前はスティーブン・ホーキング）
- 優秀だという評価は高かったが，論文をあまり書かなかった.
- にもかかわらず，自分の得た結果の先行性にはこだわったらしい.

フックとのさや当て

- ニュートンが新しい結果を、述べるたびに
- ロバート・フック（バネの運動におけるフックの法則で有名）が
- 「自分は，そんなことは，もう知っていた」と主張.
- ニュートンはそれを大変不快に思っていたらしい.

- あるとき，フックと、ハレー（ハレー彗星を発見した人）と
もう一人建築家がお茶を飲んでいたとき
ある条件下の天体の動きが話題になった．

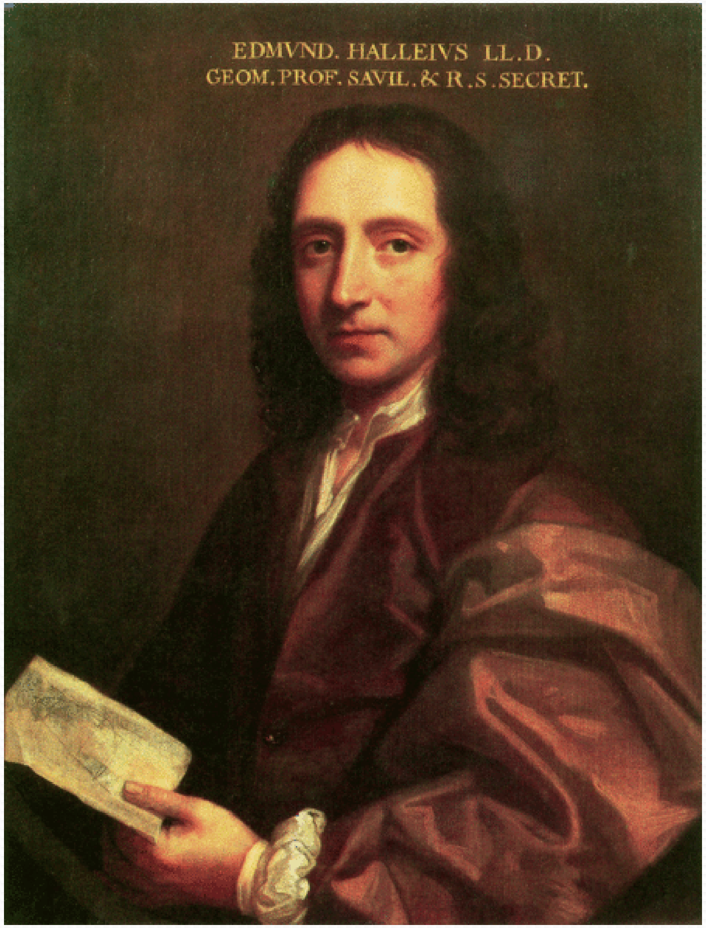
ハレーは「ニュートンなら証明ができるだろう」と思った．

- ハレーはニュートンを訪問し，この質問をした.
- ニュートンは即座に「楕円だ」と答えた.
- ハレーは証明を聞きたがったが，証明を書いたノートが見つからなかった.
- 後日送られてきた証明を見たハレーは，その素晴らしさに感激して，ニュートンの頭の中にあるアイデアを、論文にして出版すべきだと、ニュートンに勧めた.

ニュートンは同意し，一年半の後，「自然哲学の数学的原理」（プリンキピア）が 完成

- この執筆中，ハレーはしばしばニュートン宅を訪れ、励ました
- 現代数学の基礎となるプリンキピアをニュートンに書かせたのは、王立科学院の陰謀？
- ハレーは王立科学院の回し者？

Edmond Halleys



- 学問の発展は、天才的な才能を持つ人だけではなく、ハーディやハレーのように，その才能を認め伸ばす人に支えられてきた．

皆さんのご健闘
楽しみにしています.

なぜ数値的多項式を考えるのか

代数幾何学でこのような多項式は、自然に現れる.

和、差，積が定義されている
代数的体系（環と呼ぶ）
の中で次数が定義されているもの
を考える（次数付き環と呼ぶ）

次数付き環 R を考える

- R の元 g は, すべて
- $g = g_0 + g_1 + \ldots . g_{r-1} + g_r$ （g_i は 次数 i のR の元）
- と表される.
- 例えば R として実数係数の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する多項式全体

次数 i を持つ R の元の集合を R_i と表すと, これは線形空間

- R_i の次元を考える(もちろん整数)
- すると、$\dim R_i = f(i)$ となっているような数値的多項式 $f(x)$ が存在する.
- この $f(x)$ がどんなものかを考えるのは自然な問題である

皆さんのご健闘楽しみにしています.