

■本資料のご利用にあたって(詳細は「利用条件」をご覧ください)

本資料には、著作権の制限に応じて次のようなマークを付しています。
本資料をご利用する際には、その定めるところに従ってください。

*****: 著作権が第三者に帰属する著作物であり、利用にあたっては、この第三者より直接承諾を得る必要があります。

CC: 著作権が第三者に帰属する第三者の著作物であるが、クリエイティブ・コモンズのライセンスのもとで利用できます。

: パブリックドメインであり、著作権の制限なく利用できます。

なし: 上記のマークが付されていない場合は、著作権が東京大学及び東京大学の教員等に帰属します。
無償で、非営利的かつ教育的な目的に限って、次の形で利用することを許諾します。

- I 複製及び複製物の頒布、譲渡、貸与
- II 上映
- III インターネット配信等の公衆送信
- IV 翻訳、編集、その他の変更
- V 本資料をもとに作成された二次的著作物についての I からIV

ご利用にあたっては、次のどちらかのクレジットを明記してください。

東京大学 UTokyo OCW 学術俯瞰講義
Copyright 2014, 岡本和夫

The University of Tokyo / UTokyo OCW The Global Focus on Knowledge Lecture Series
Copyright 2014, Kazuo Okamoto

学術俯瞰講義

数学

－革新の歴史と伝統の力

2014年度夏学期

第4回「数学－発想の力」

2014/05/08 岡本和夫



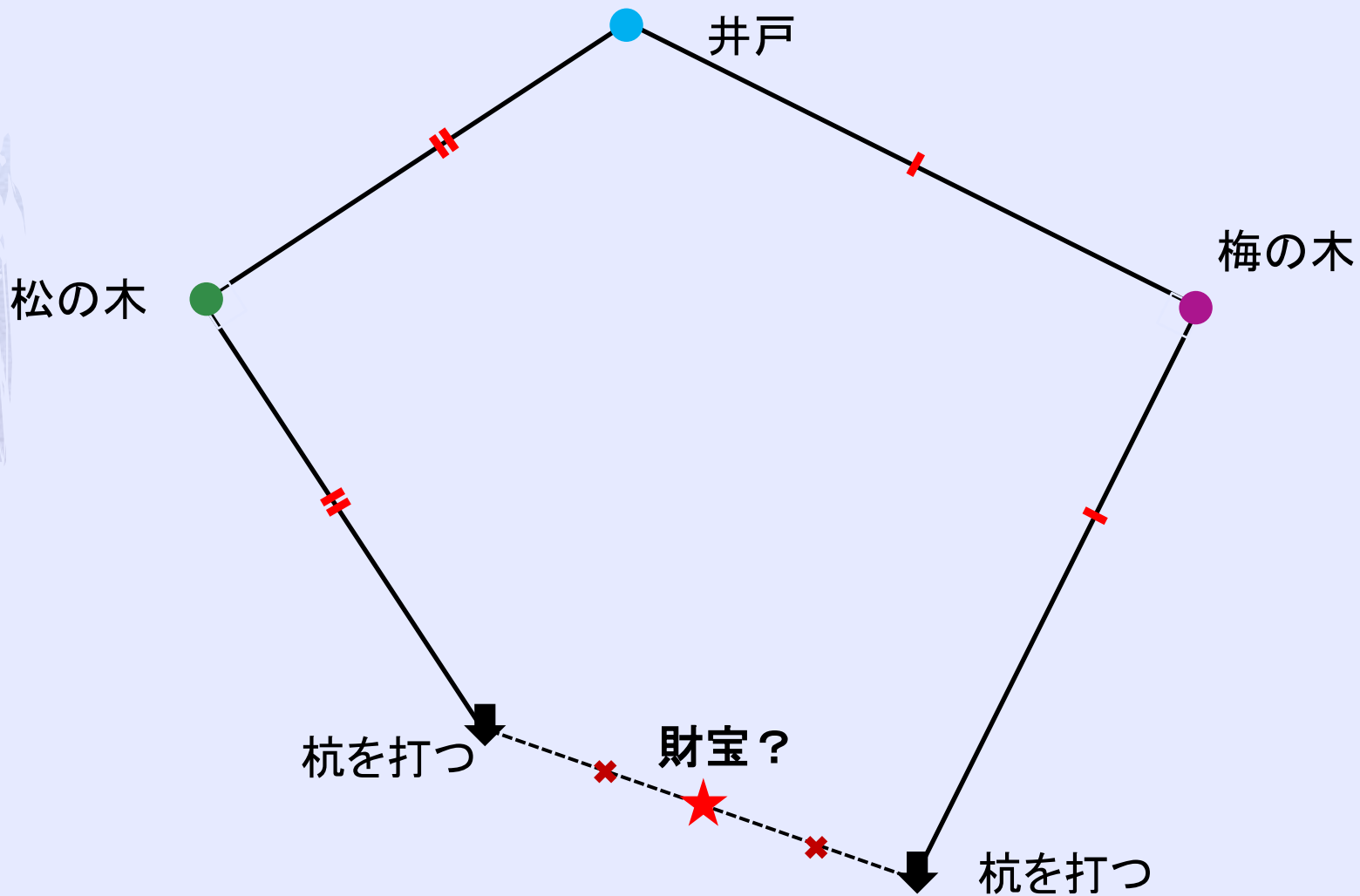
まずは宿題から

気が付きましたか？

誰が最初に見つけたの？

『ある島に井戸と松の木と梅の木がある。
井戸から松の木まで歩いていき、左回りに90度向きを変え、同じ距離だけ進み、そこに杭を打つ。
次にもう一度井戸に戻って、井戸から梅の木まで歩いていき、右回りに90度向きを変え、同じ距離だけ進み、そこに杭を打つ。
この杭と杭の真ん中の地点に財宝を埋めた』
と、古文書には書いてある。その財宝を見付けようと、
行ってみると松の木と梅の木はあるが、井戸が埋まってしまっていて、
見付けられなかった(杭は打てず、悔いが残る?)。

【『高等学校指導要領解説 数学編』（文部科学省、平成21年11月）、第1部2章6節「数学活用」、p.61より引用、一部修文】



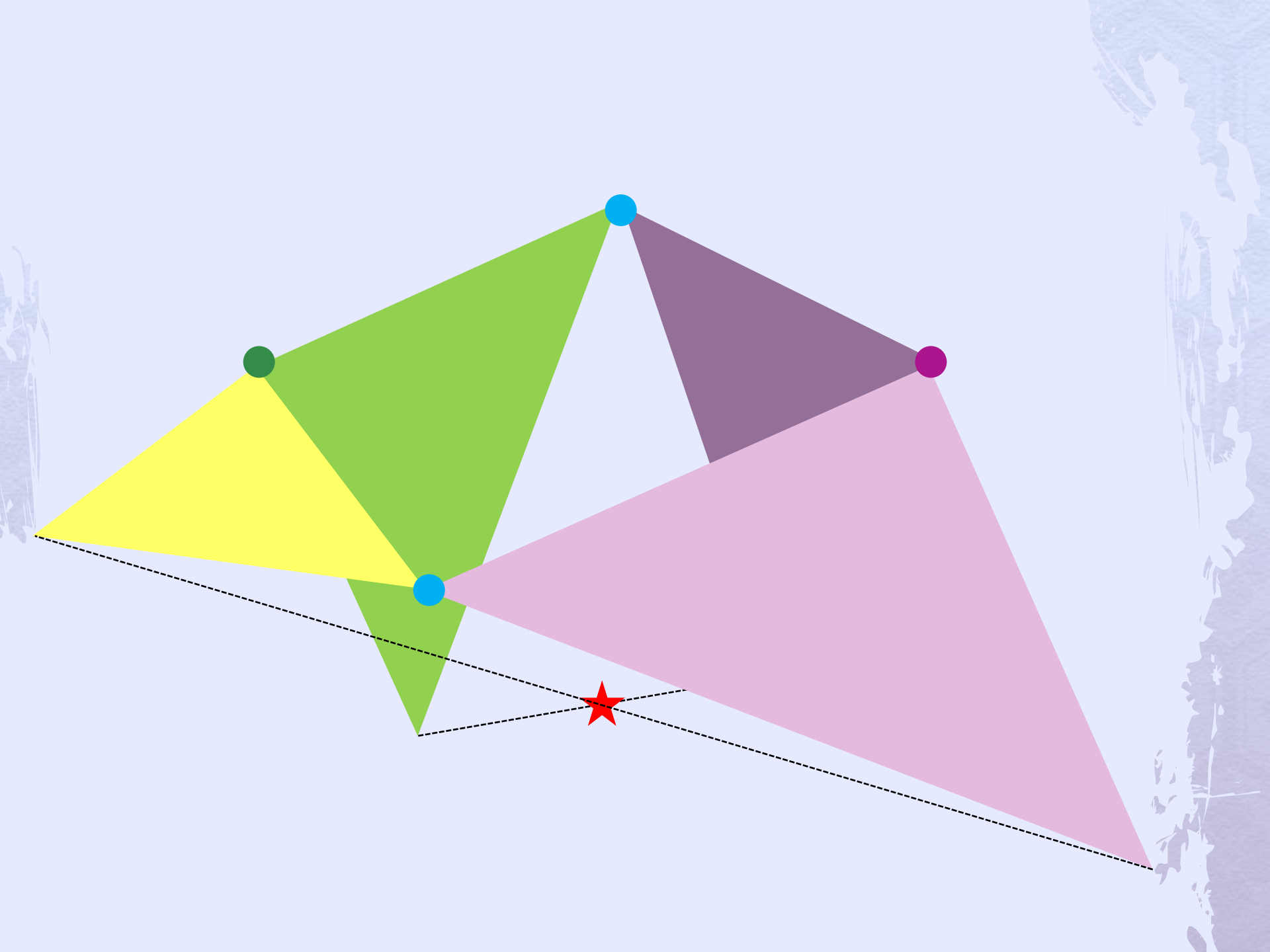
財宝は何処に！

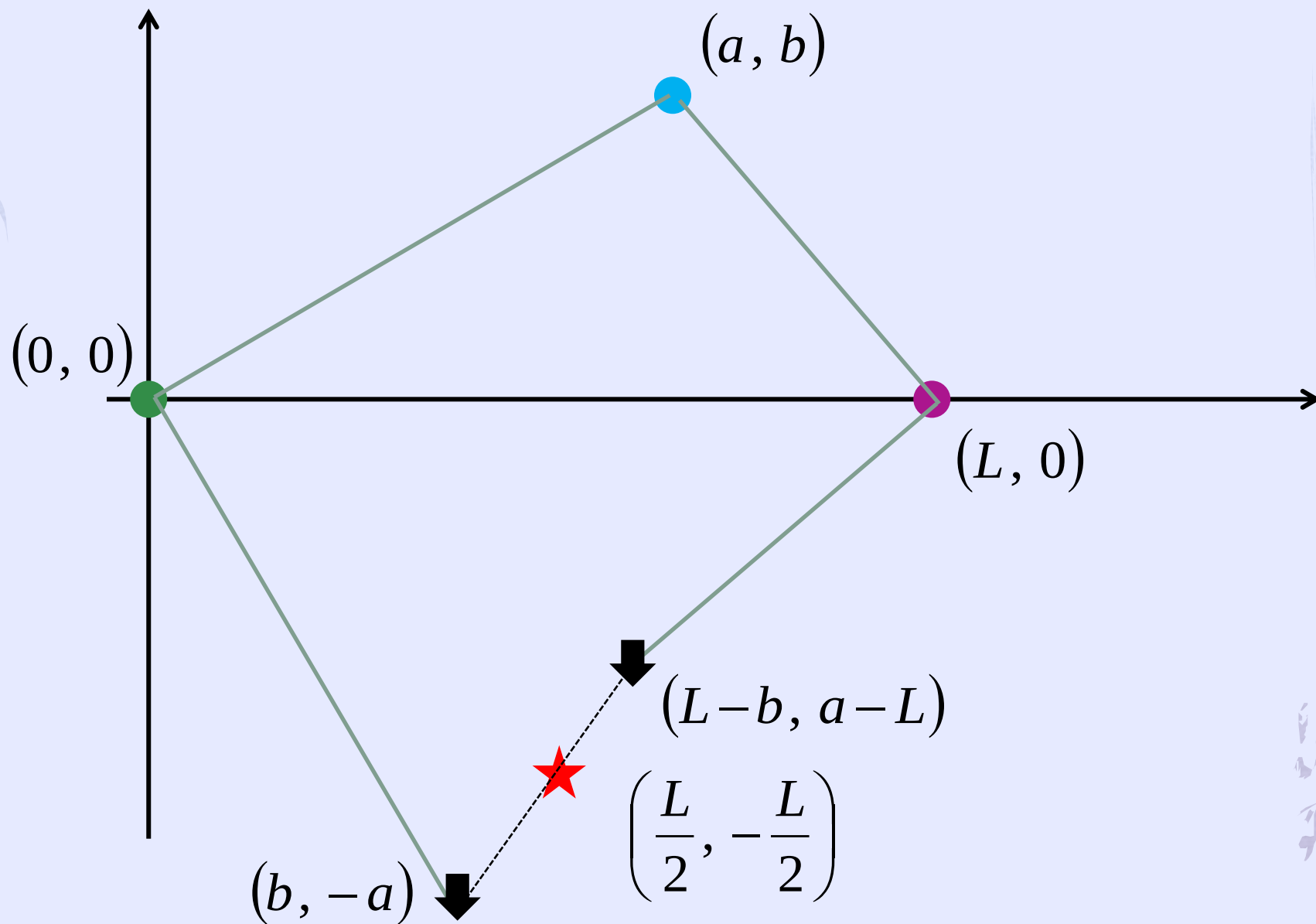
松の木

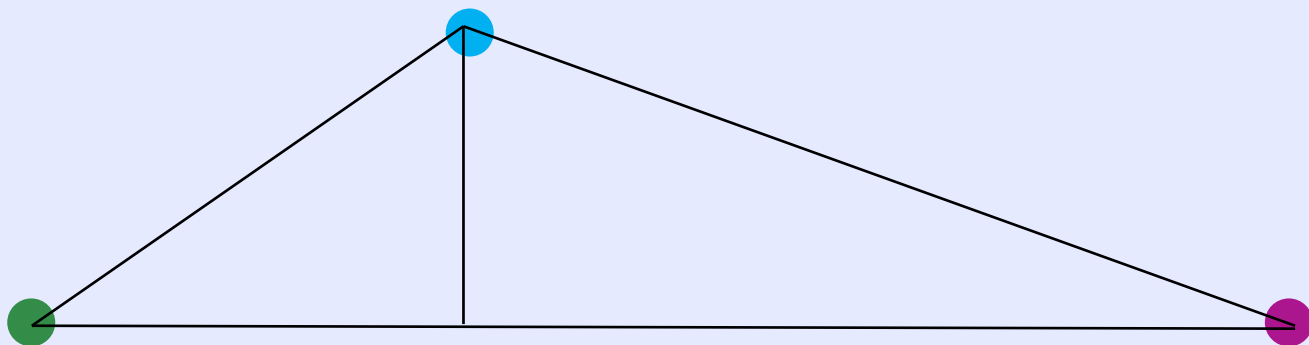


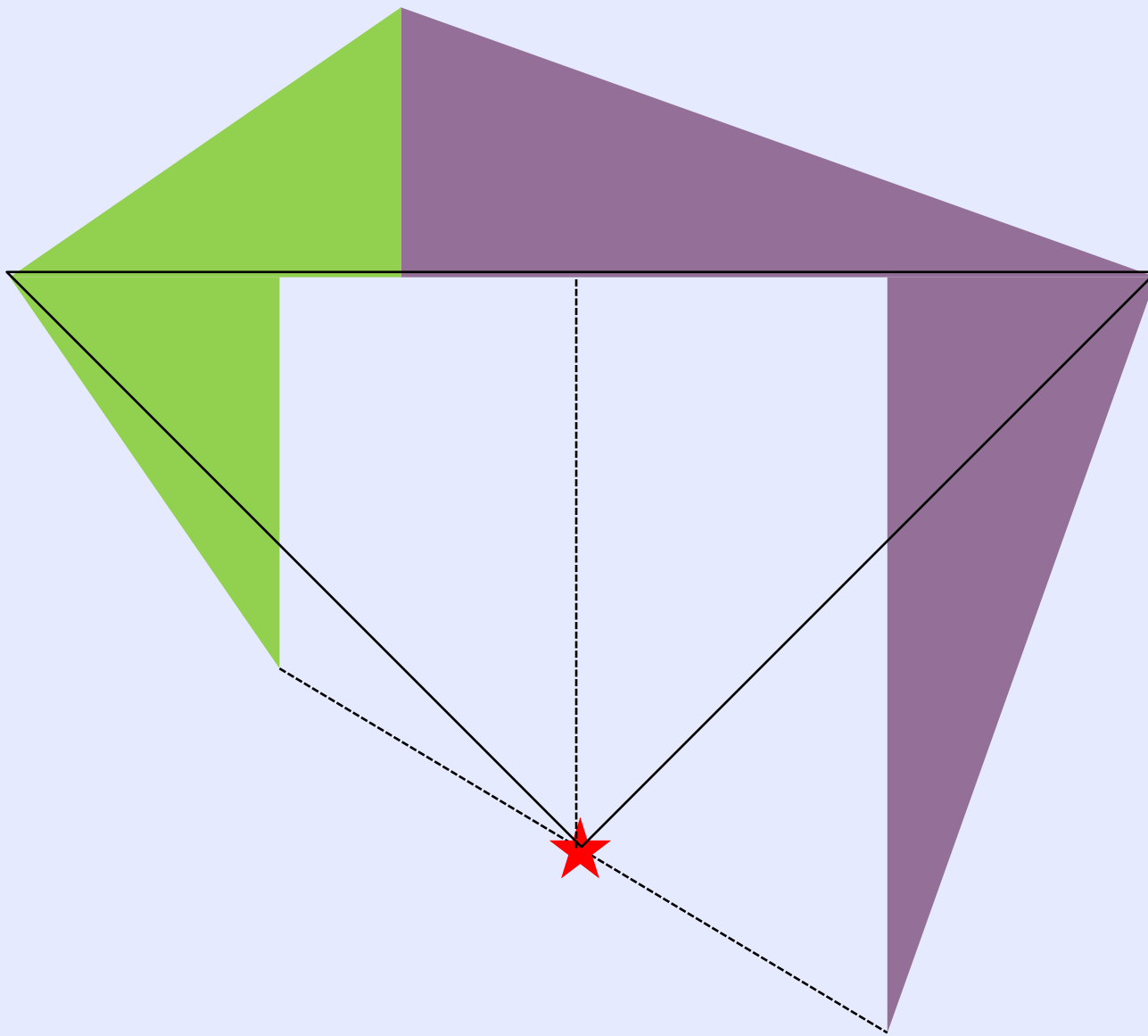
梅の木











ポイント

✓数学の問題は難しくすると簡単に解ける（場合がある）

✓そもそも，こんなことに気が付くかどうか（初めに気が付いた人が偉い）

✓このポイントは学校の数学に限ったことではない

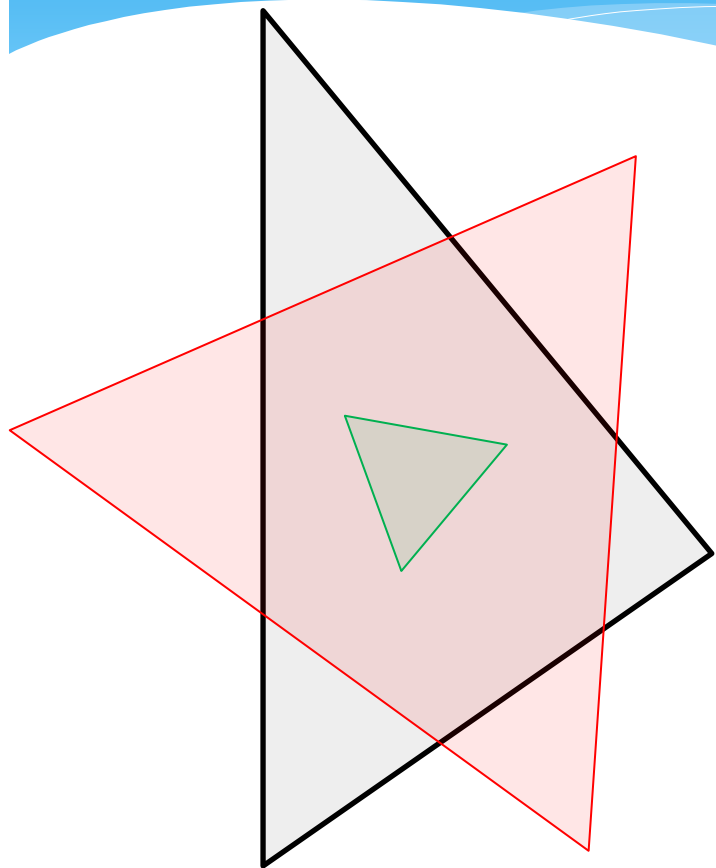


といろわけで

題材を初等幾何学から

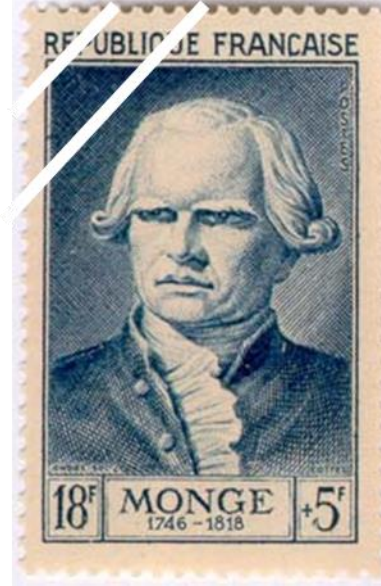
誰が見つけた？

ナポレオンの定理





Joseph-Louis Lagrange
1746-1818



Gaspard Monge
1746-1818

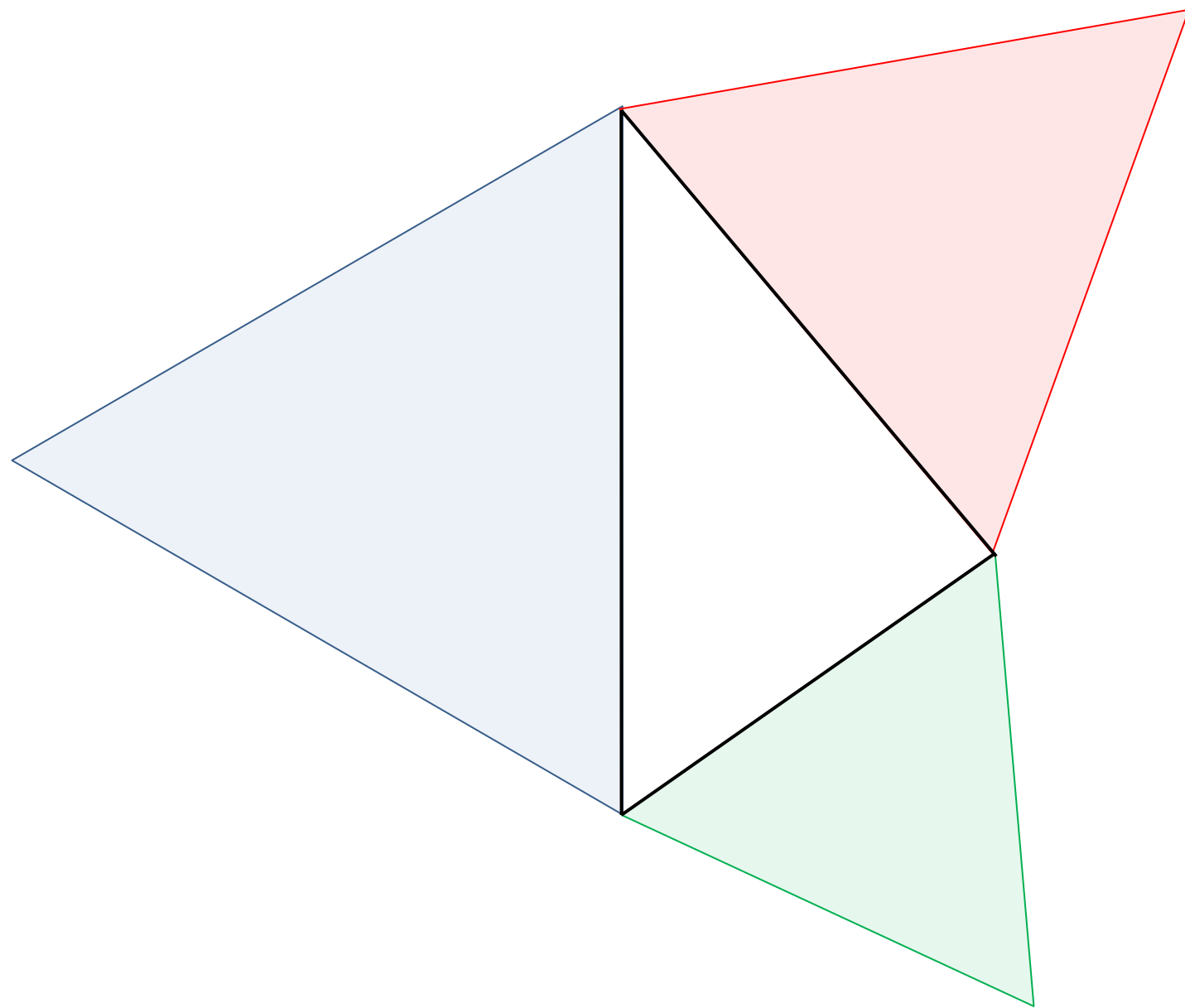


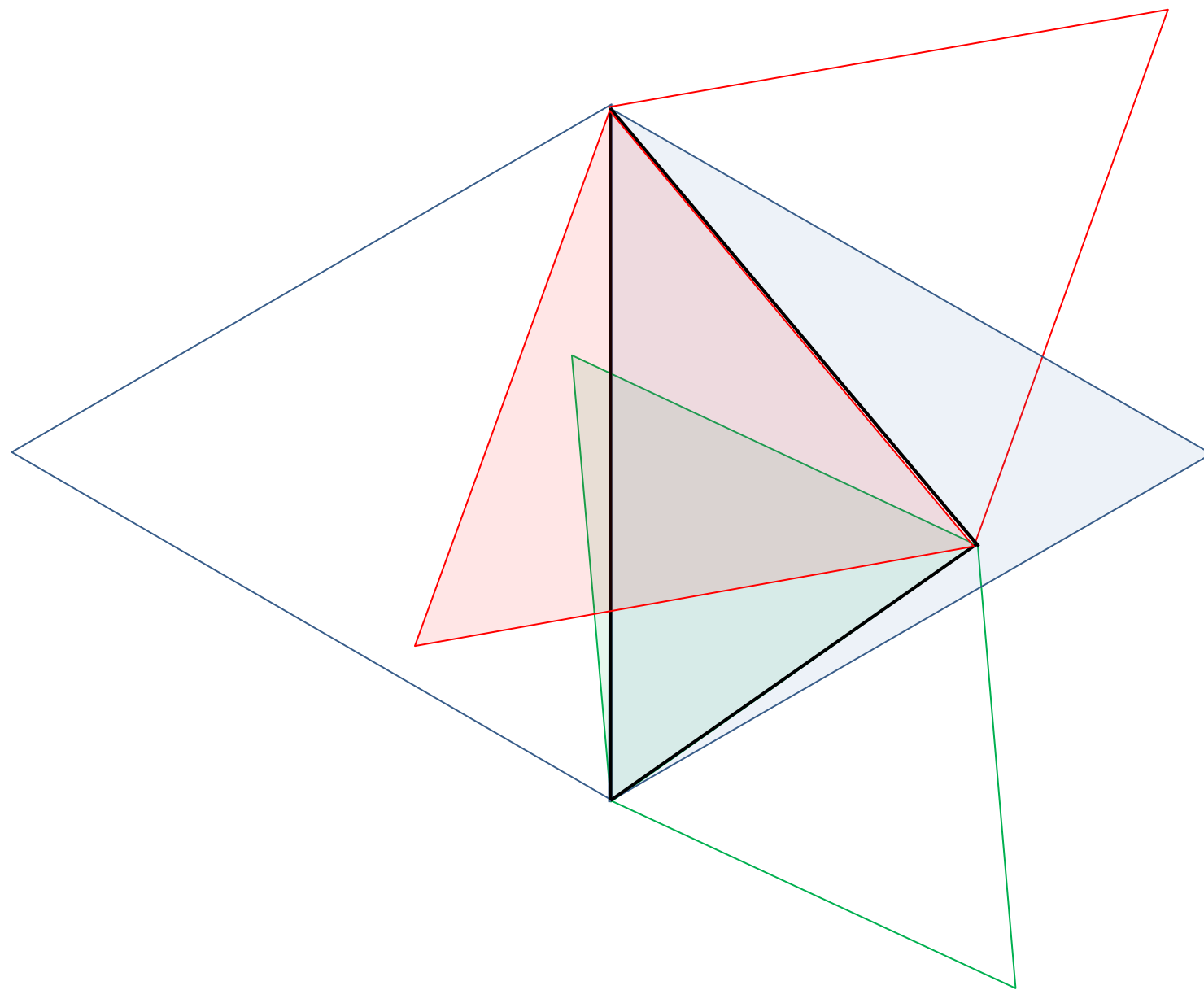
Jean Baptist Joseph Fourier
1749-1827

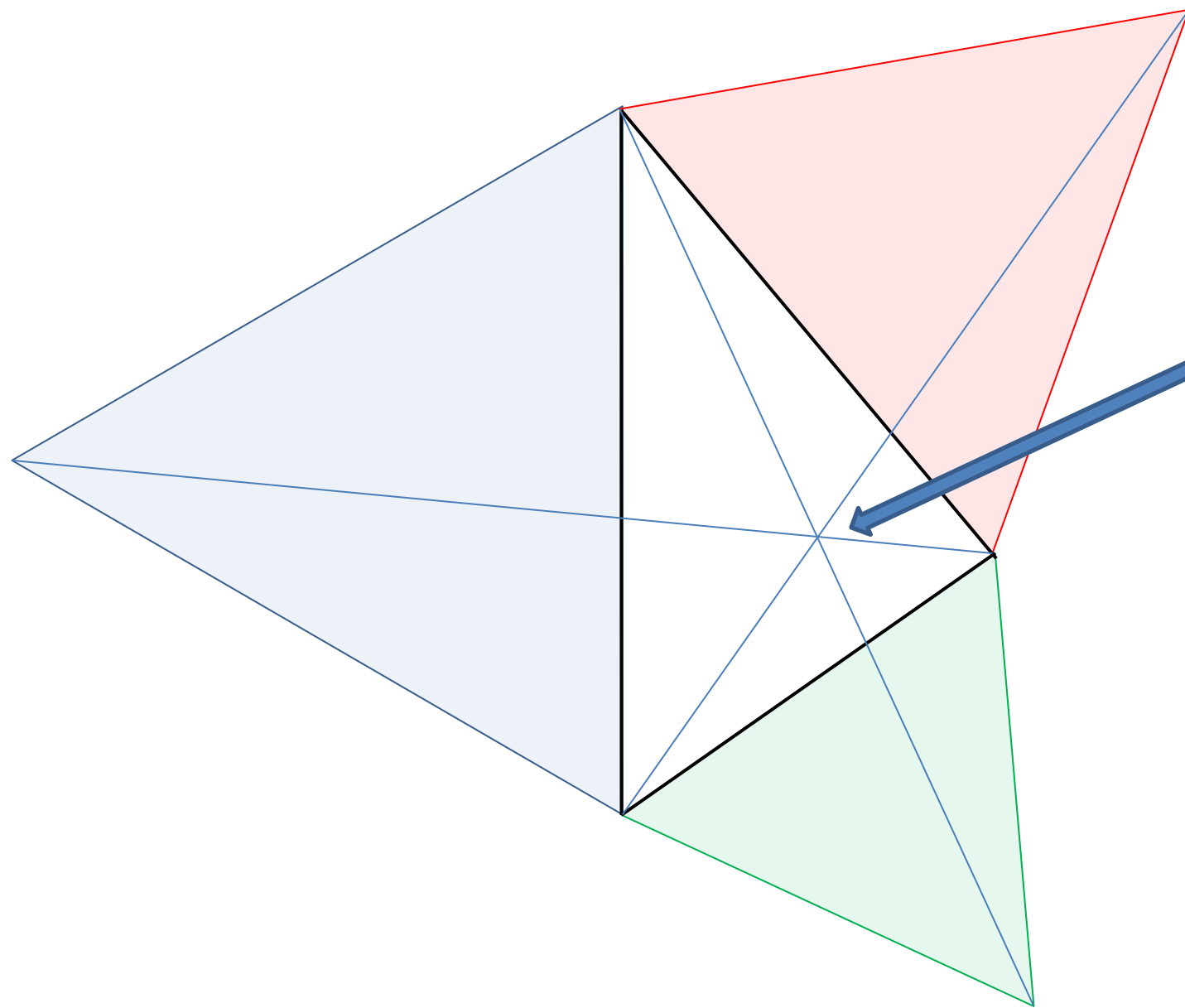


Pierre-Simon Laplace
1749-1827

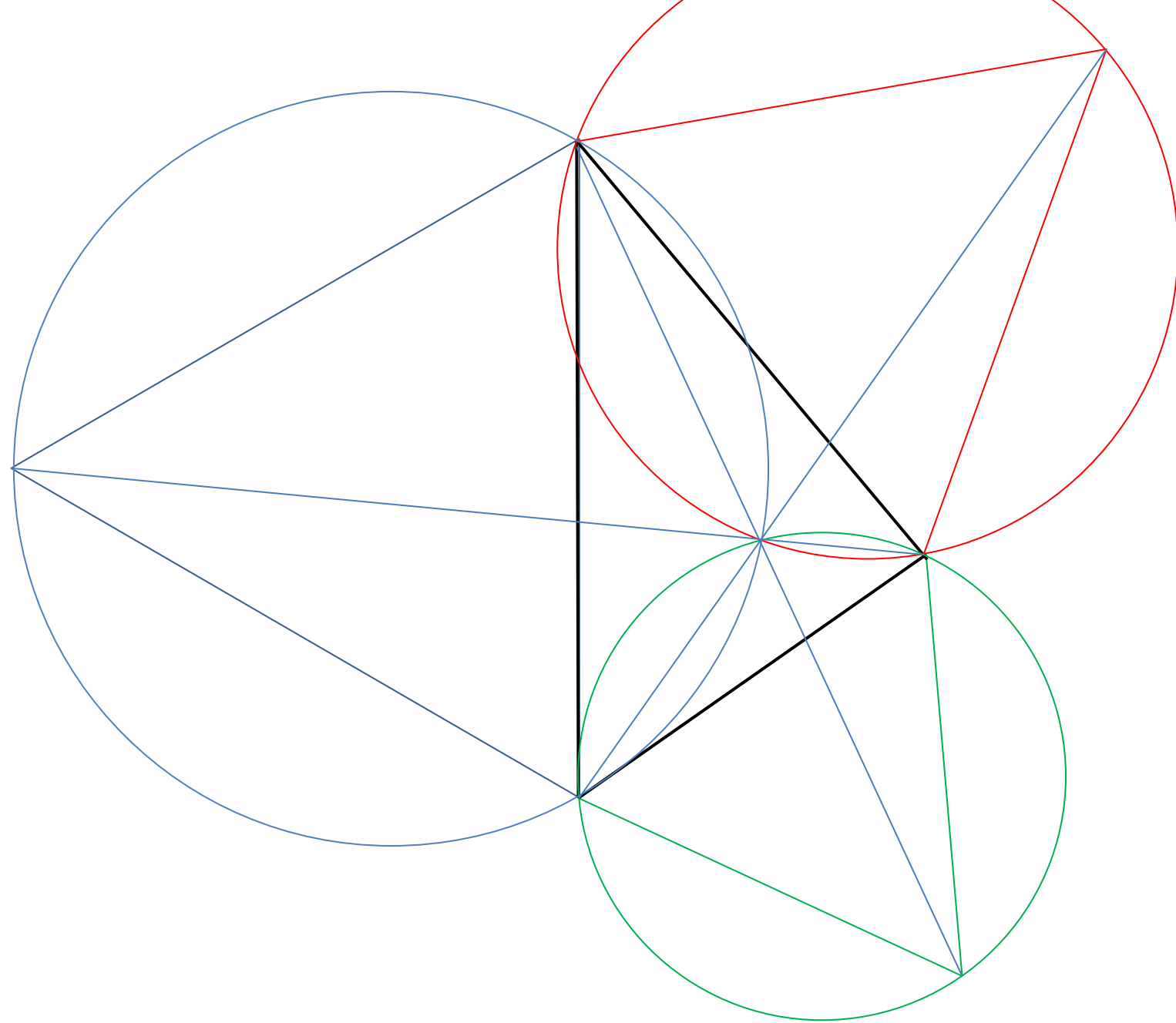
Jean Victor Poncelet
1788-1867

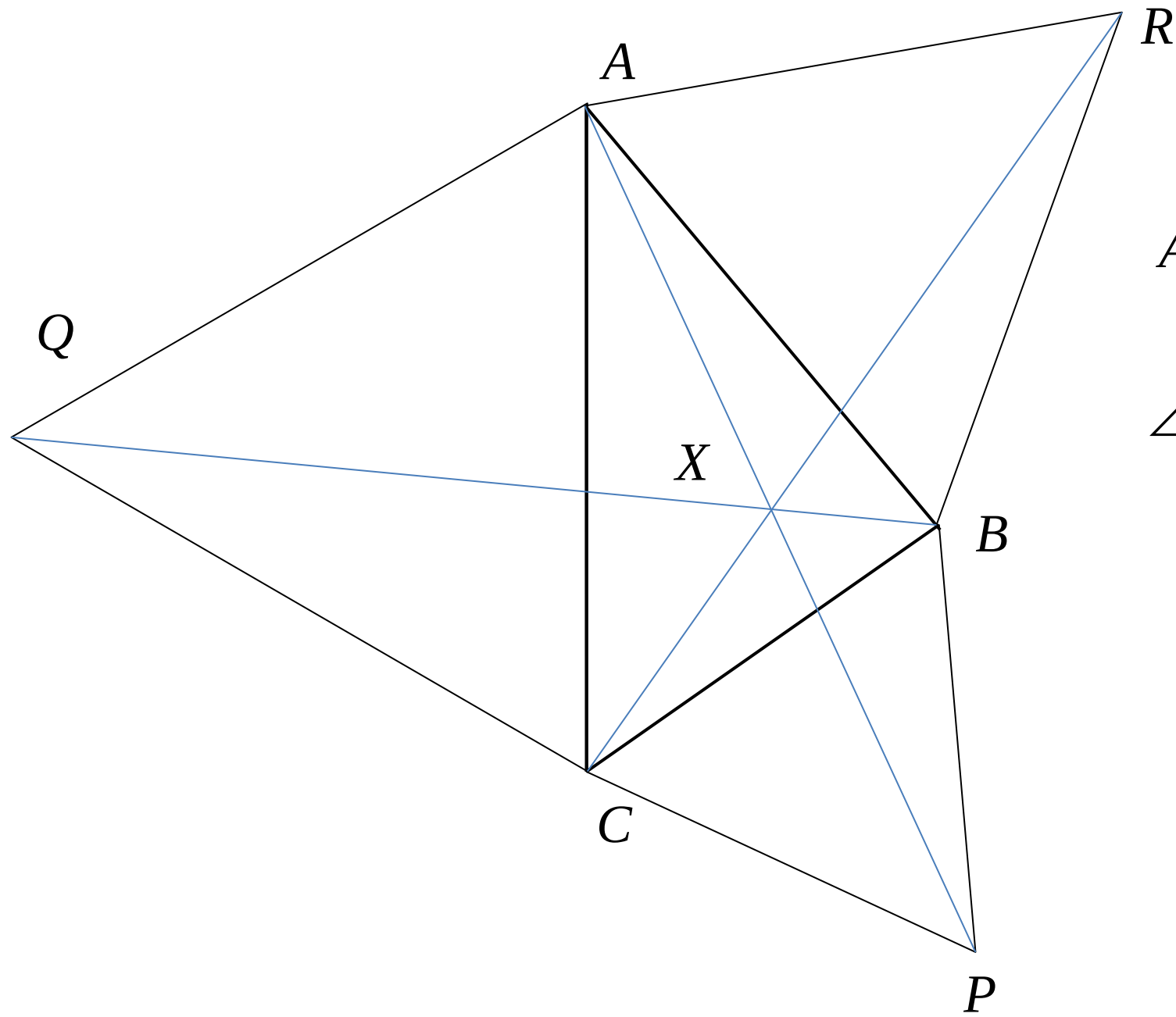






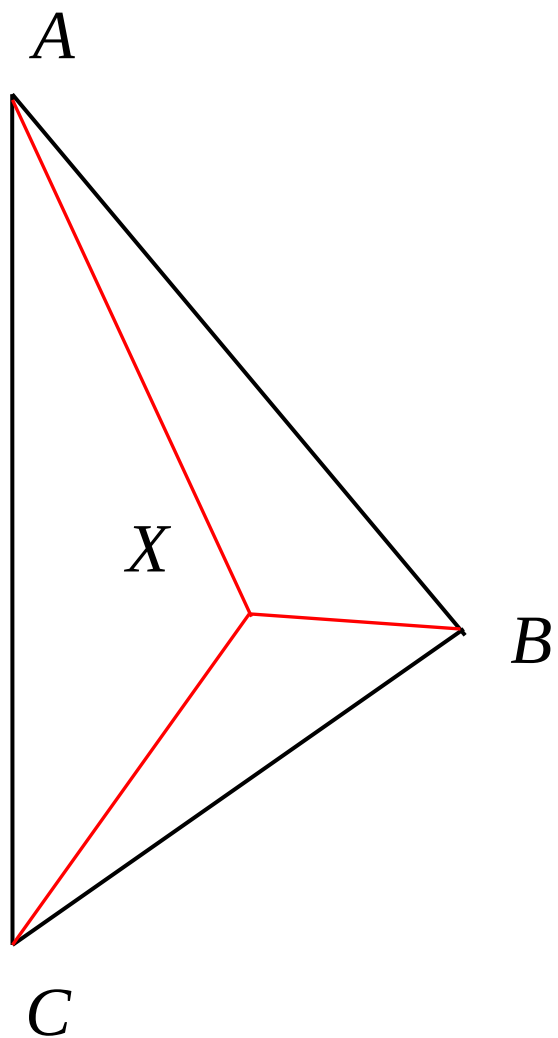
フェルマー点



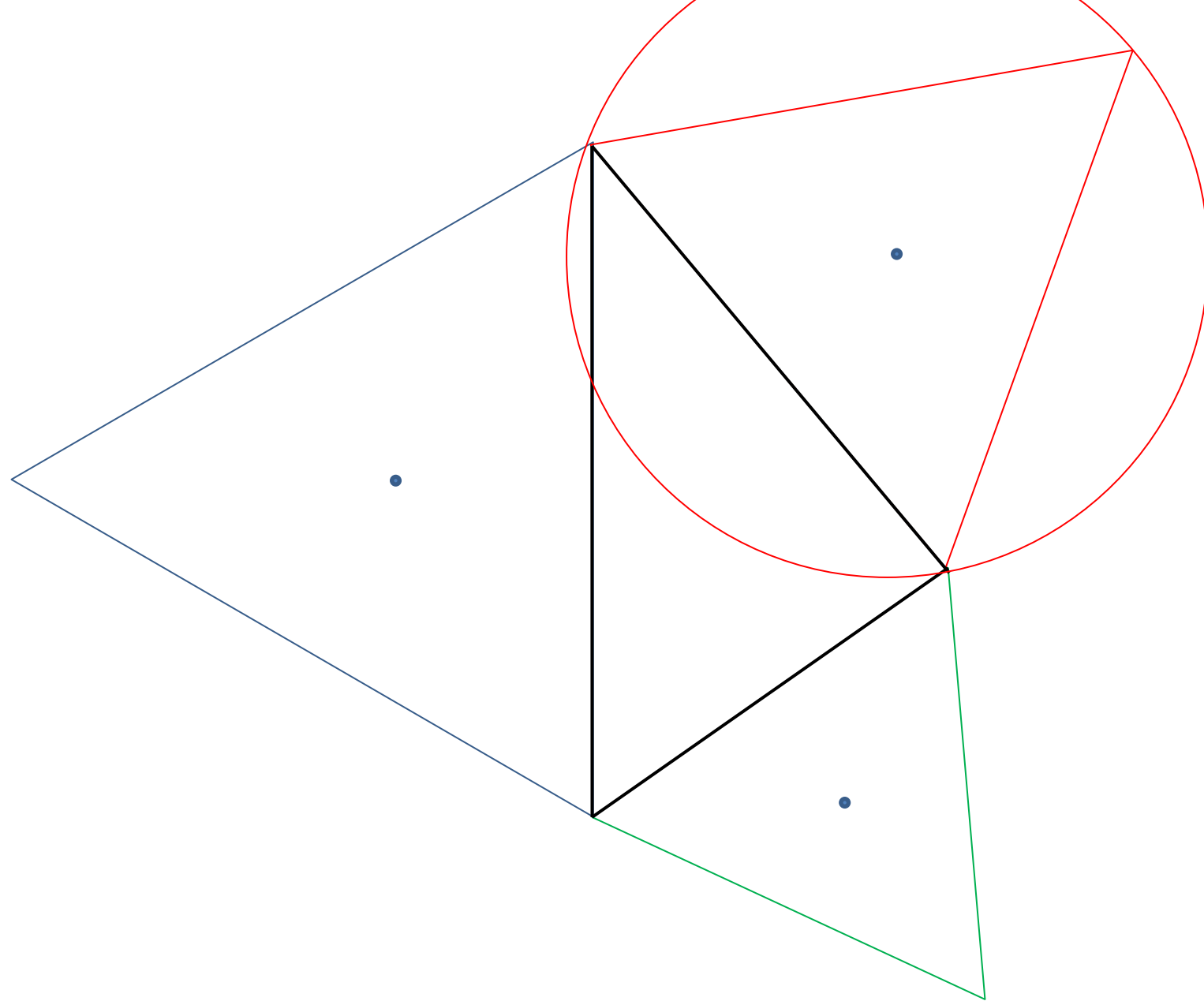


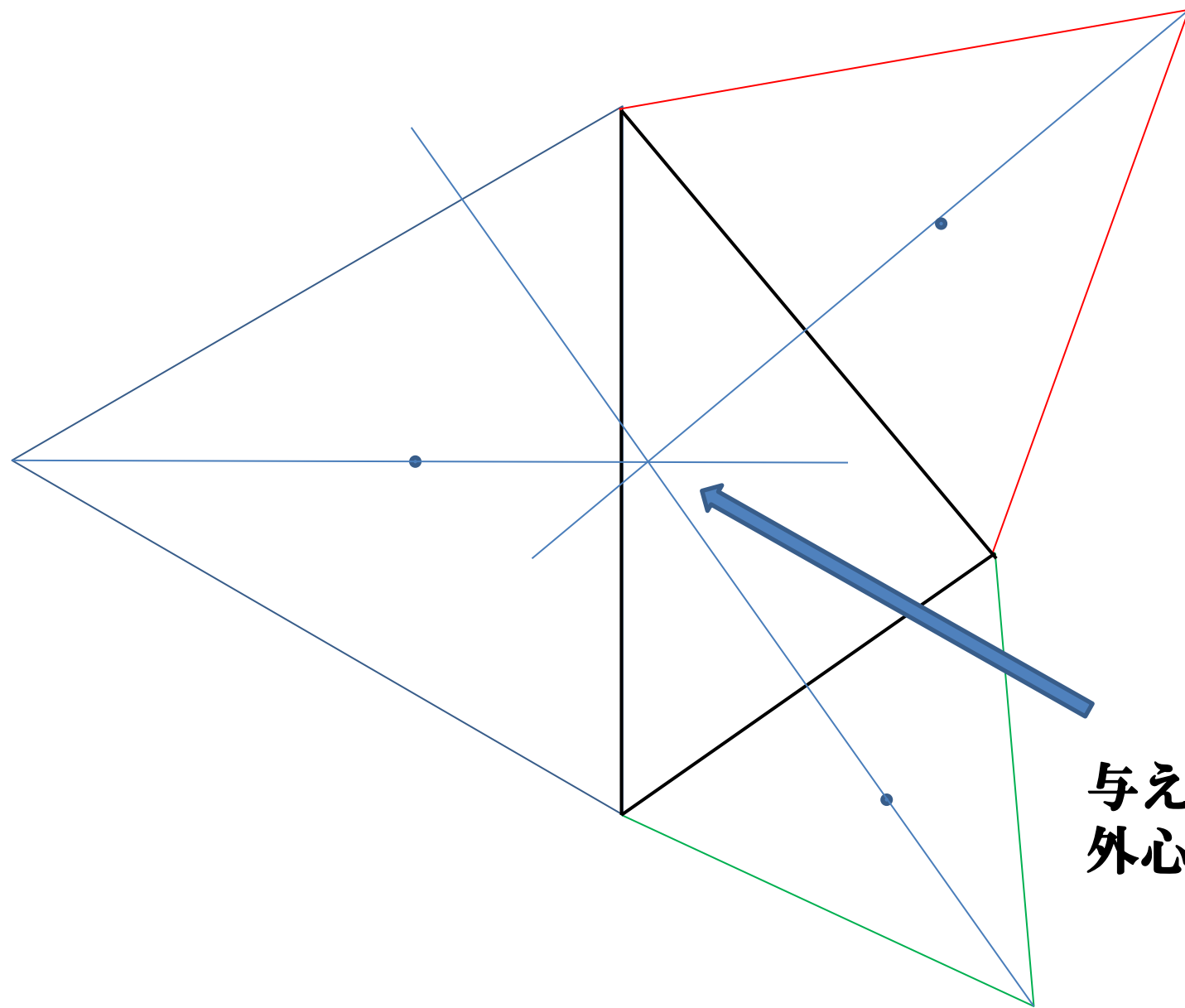
$$AP = BQ = CR$$

$$\begin{aligned}\angle AXB &= \angle BXC \\ &= \angle CXA \\ &= 120^\circ\end{aligned}$$



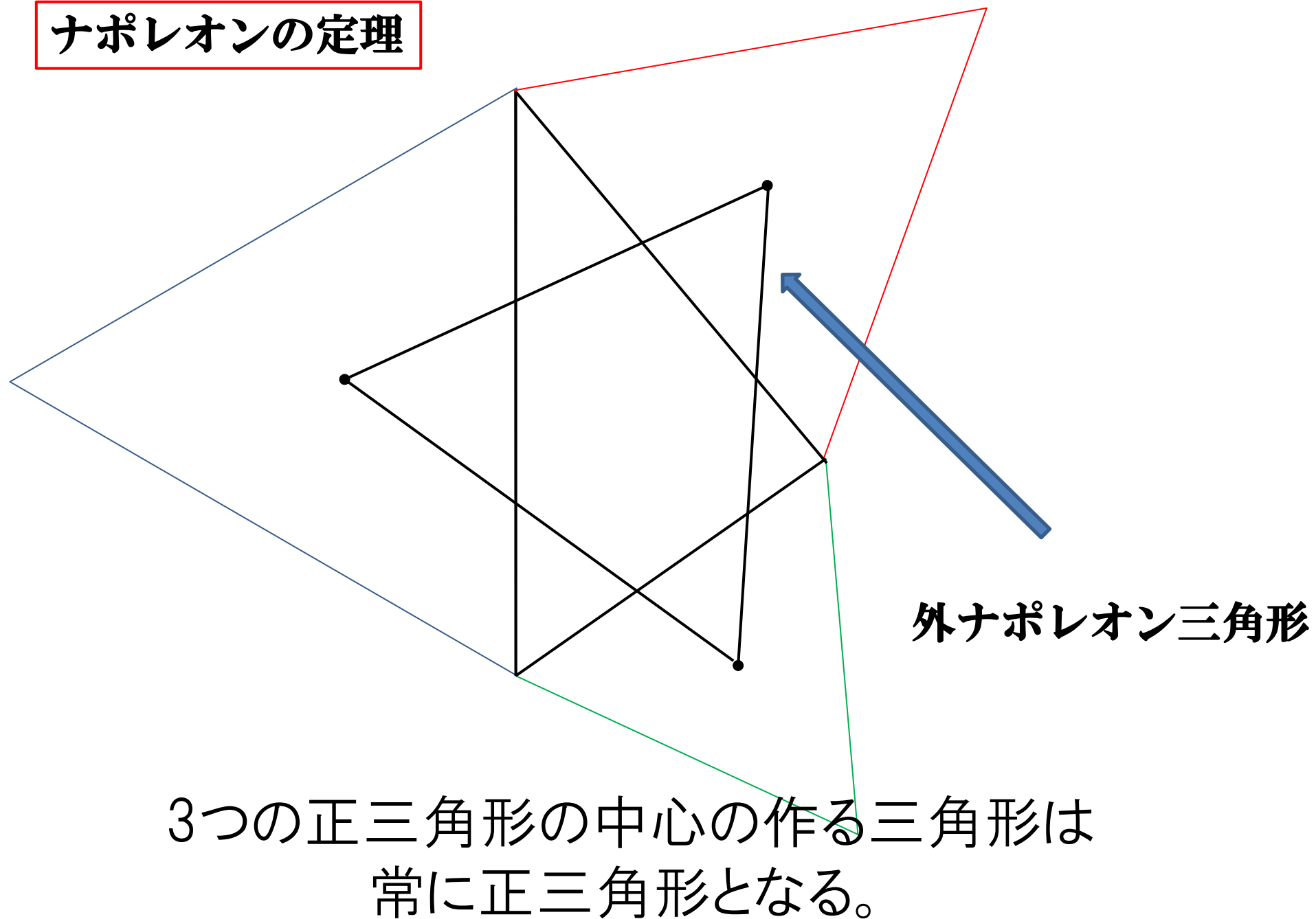
3つの角がいずれも 120° より小さい時には
 $AX + BX + CX$ が最少となる点 X がフェルマー一点



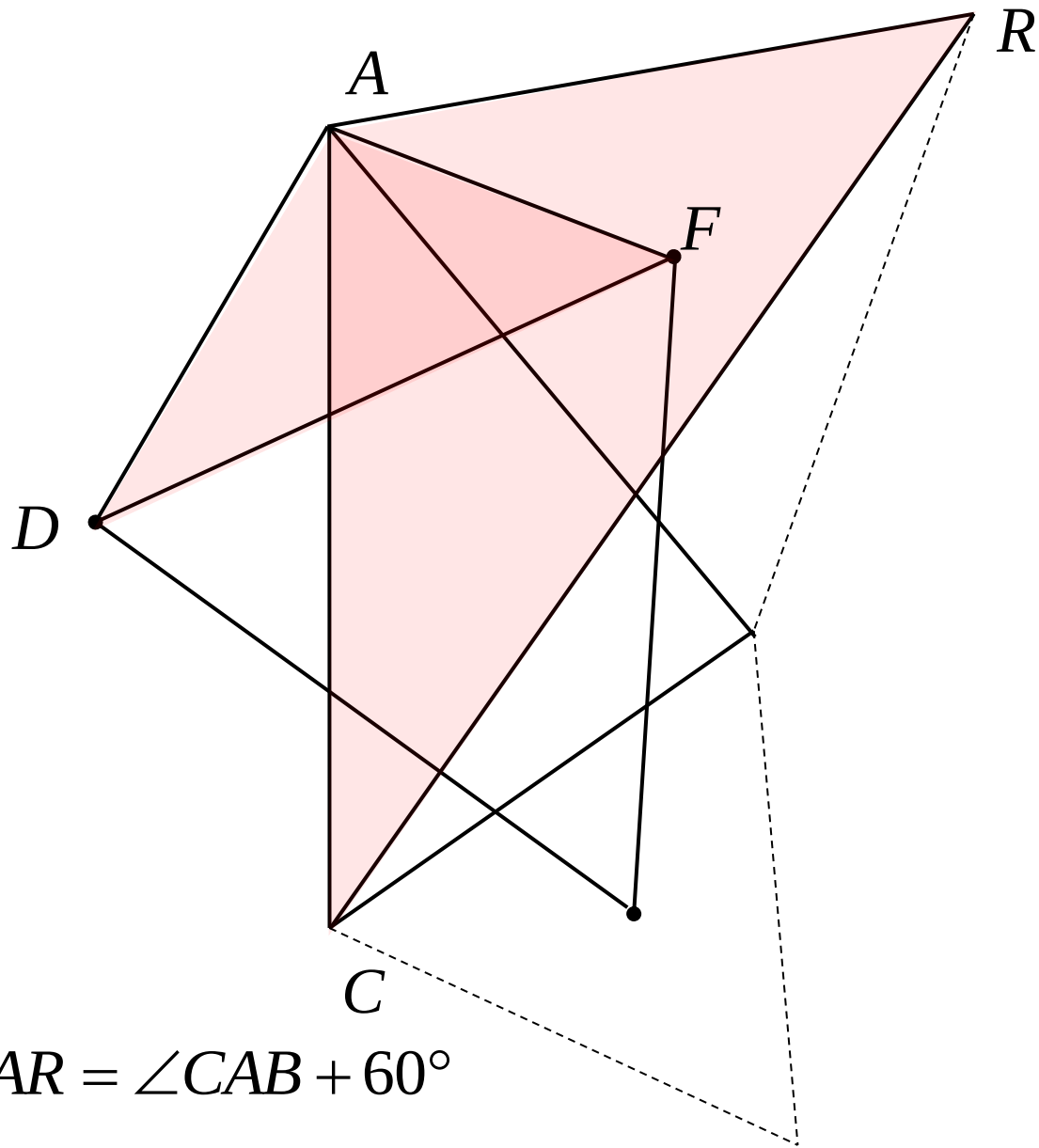


与えられた三角形の
外心

ナポレオンの定理



$$\frac{CR}{DF} = \sqrt{3}$$



$$\angle DAF = \angle CAR = \angle CAB + 60^\circ$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AR}{AF} = \sqrt{3}$$

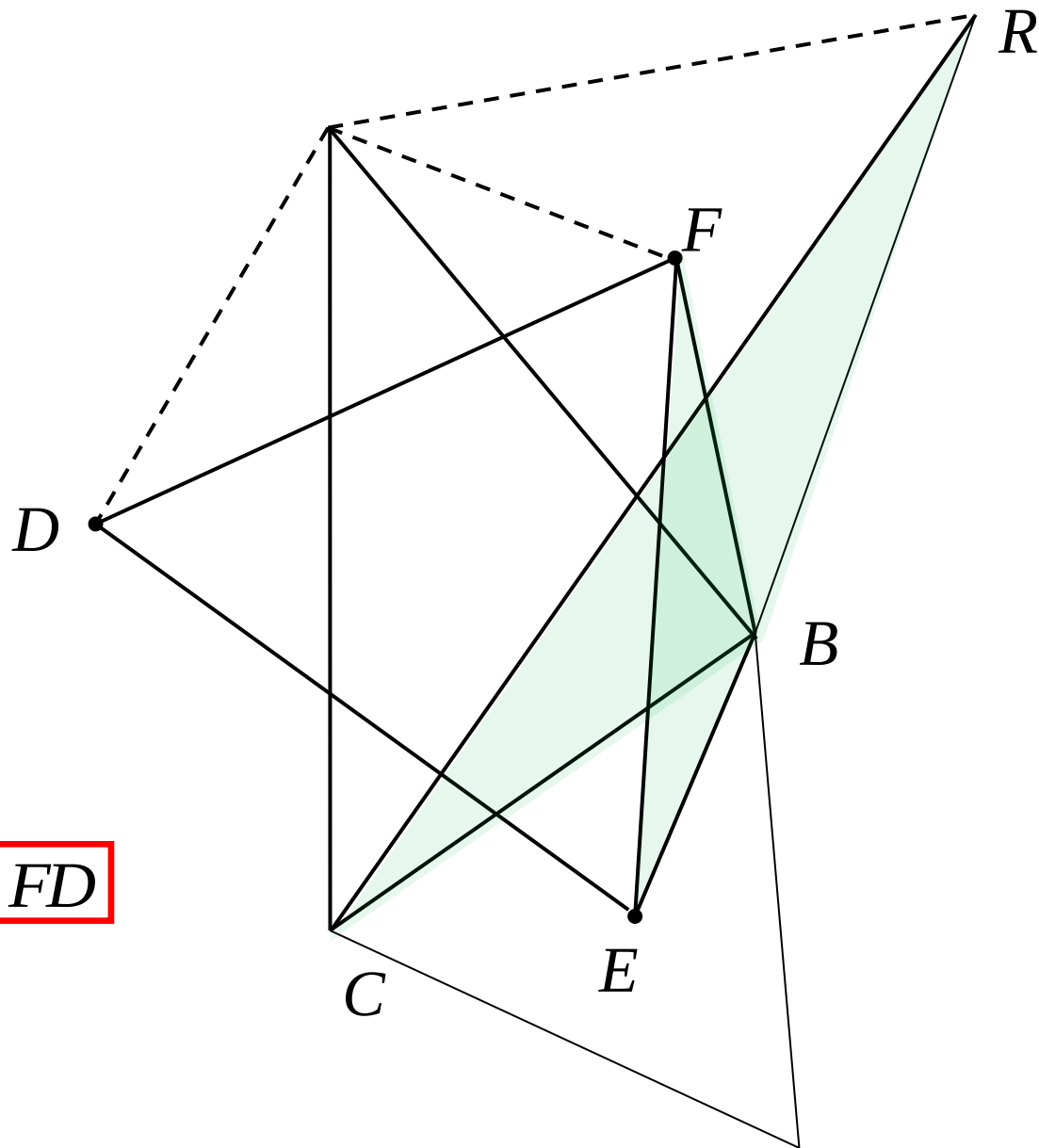
$$\triangle ADF \propto \triangle ACR$$

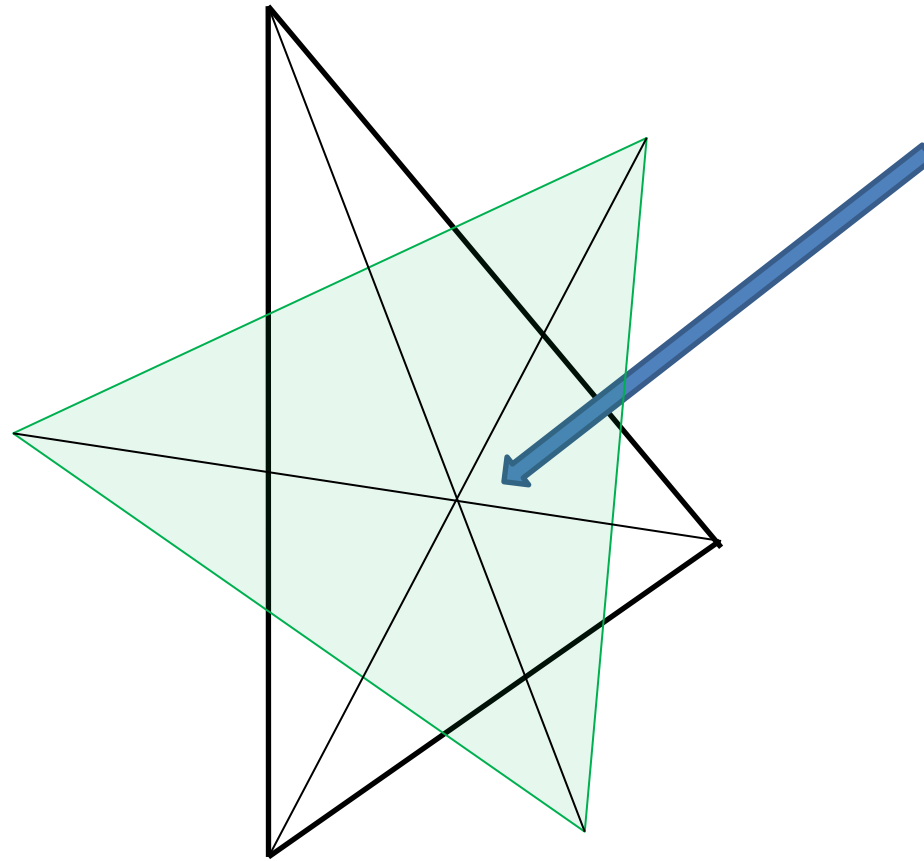
$$\frac{CR}{DF} = \sqrt{3}$$

$$\frac{CR}{EF} = \sqrt{3}$$

$$FD = EF$$

$$DE = EF = FD$$





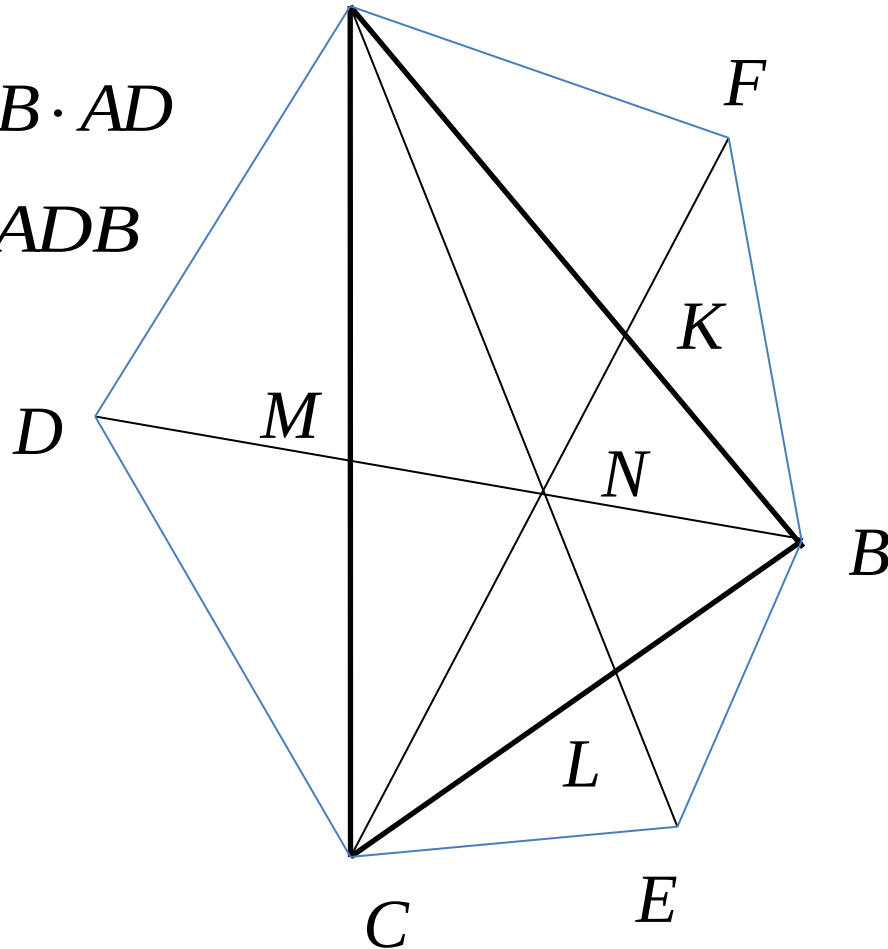
ナポレオン点

もとの三角形の頂点と、
対辺側にあるナポレオン三角形の頂点を結ぶ
3つの線分は一点で交わる。

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AD} = \sqrt{3}$$

$$AF \cdot AC = AB \cdot AD$$

$$\triangle AFC = \triangle ADB$$



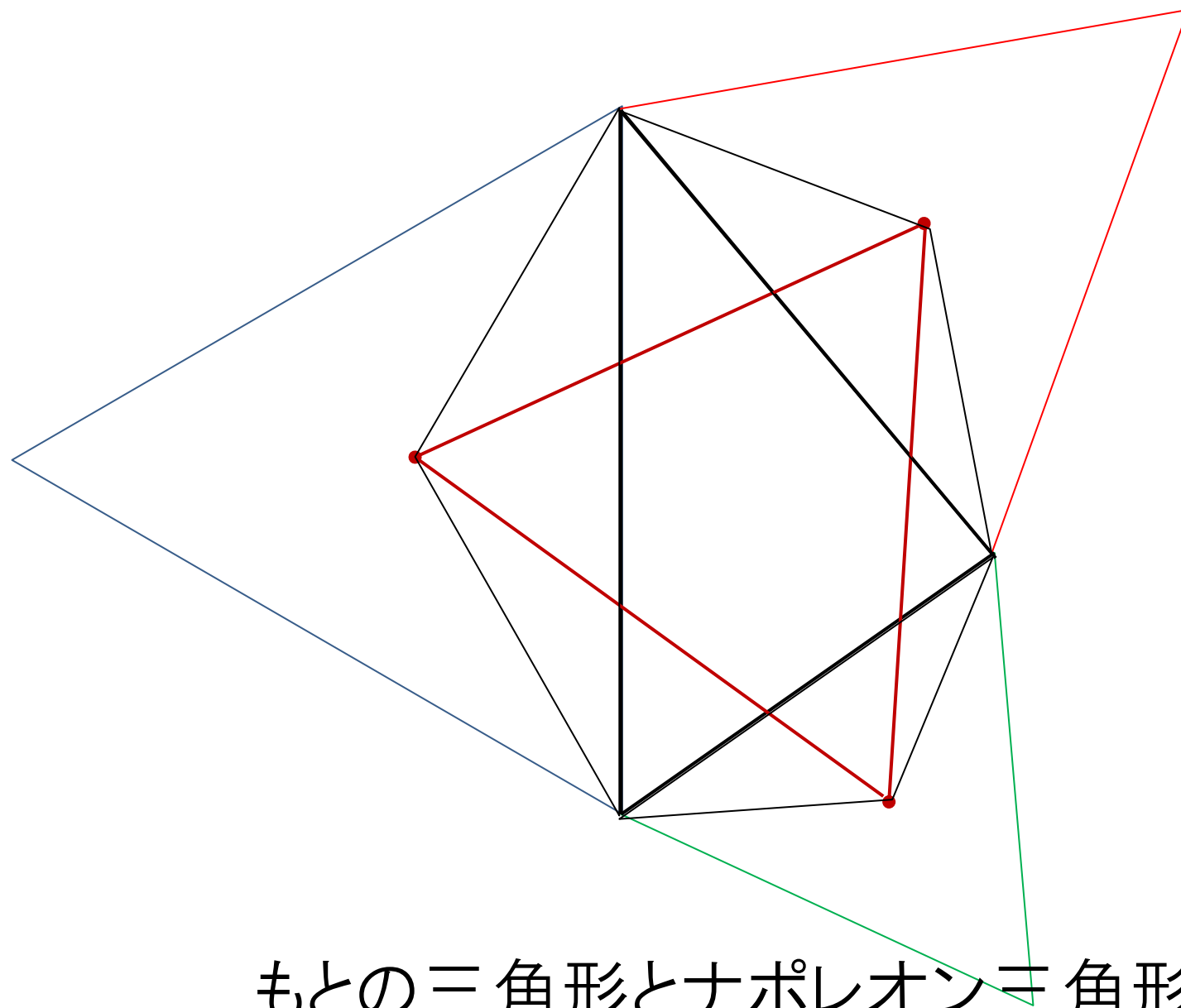
$$\frac{AK}{BK} = \frac{\triangle AFC}{\triangle BFC}$$

$$\frac{BL}{CL} = \frac{\triangle BEA}{\triangle CEA}$$

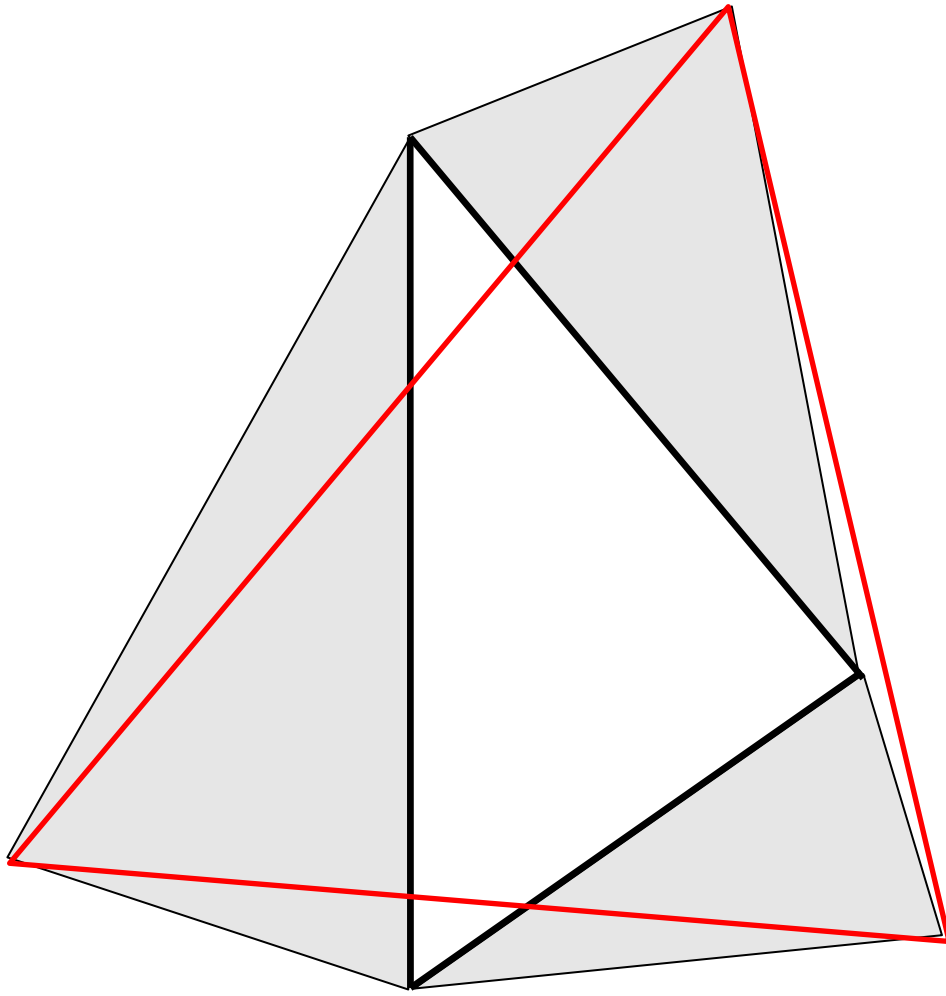
$$\frac{CM}{AM} = \frac{\triangle CDB}{\triangle ADB}$$

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} = 1$$

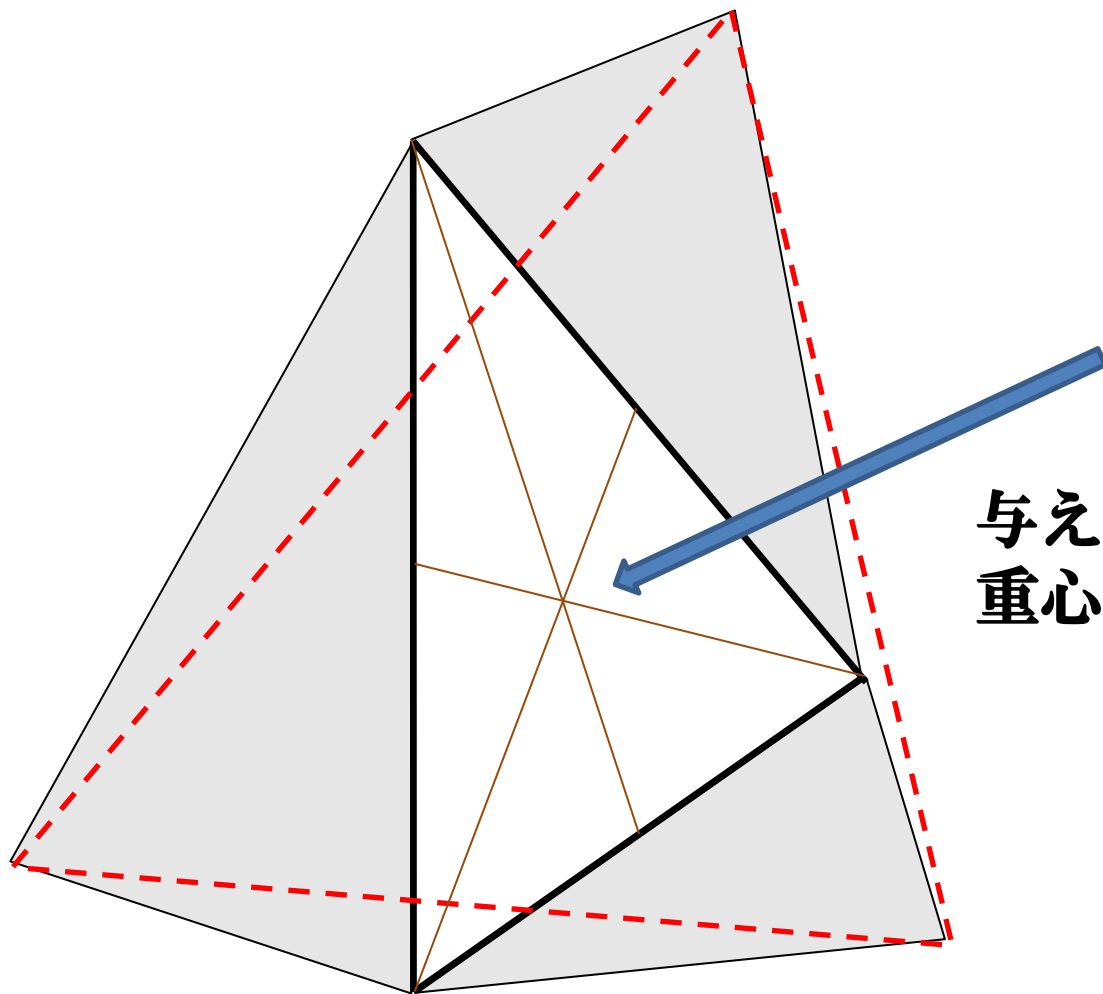
チェバの定理



もとの三角形とナポレオン三角形は
重心を共有する。

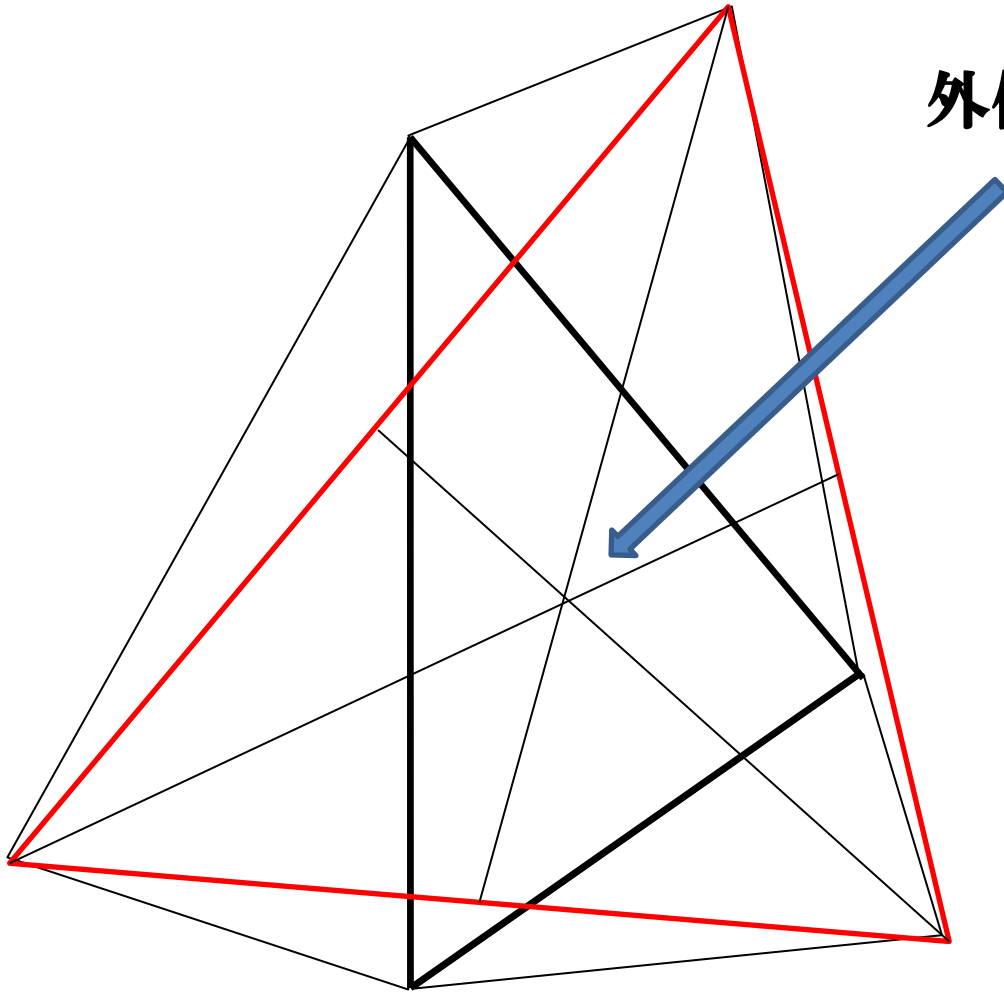


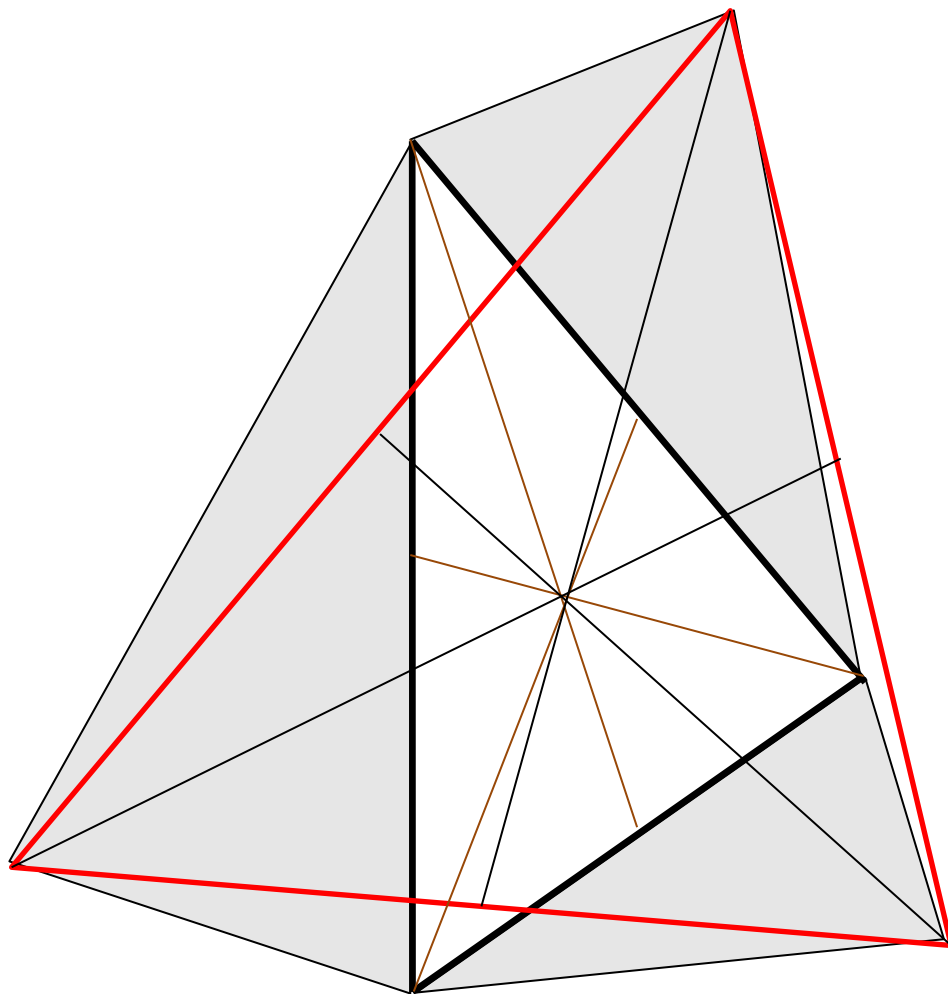
一般に、互いに相似な三角形を各辺に付け加えてみる。
ナポレオン三角形は特別な場合。



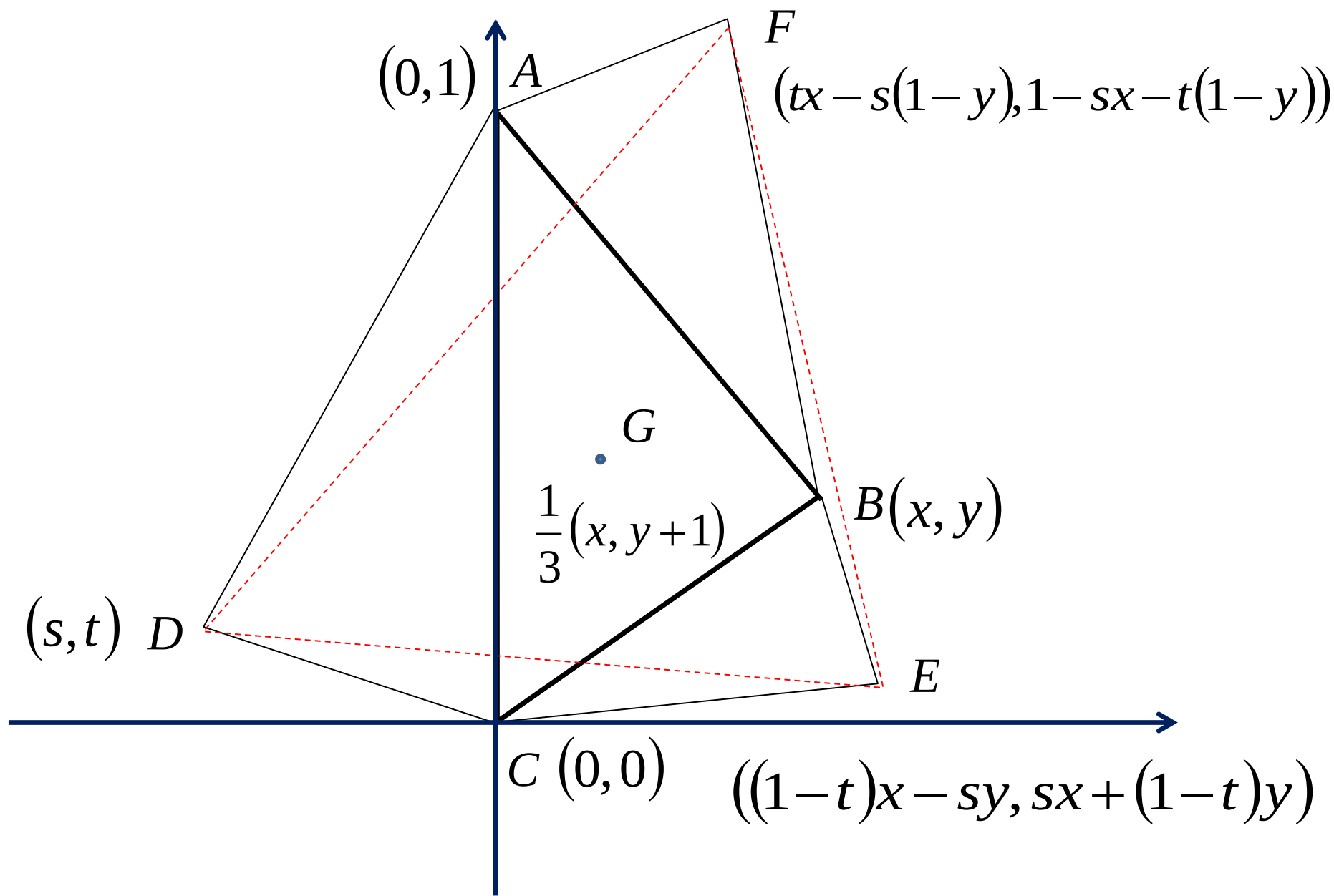
与えられた三角形の
重心

外側の三角形の重心

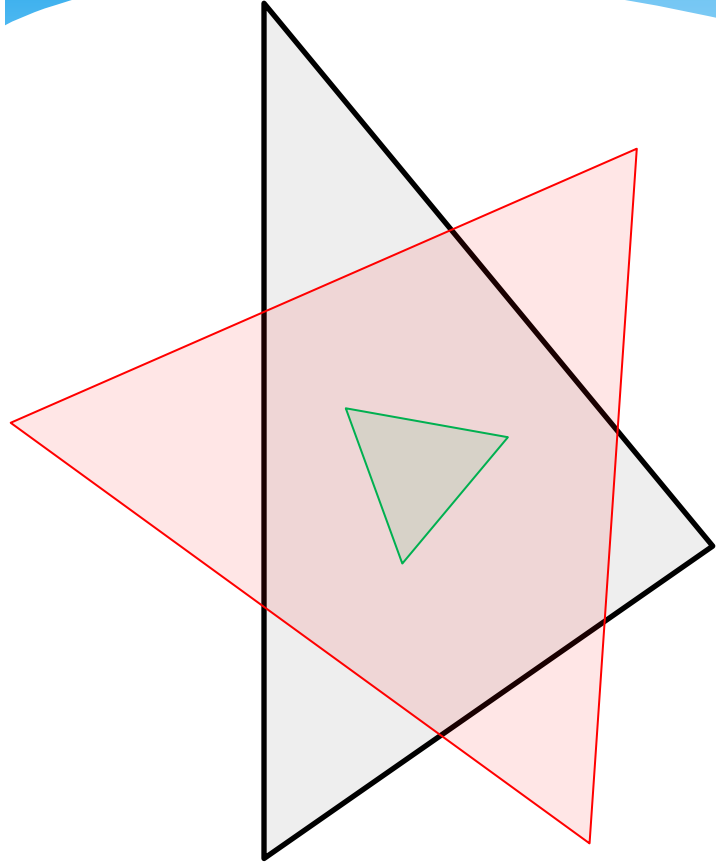




もとの三角形と新しく作った三角形も
重心を共有する。



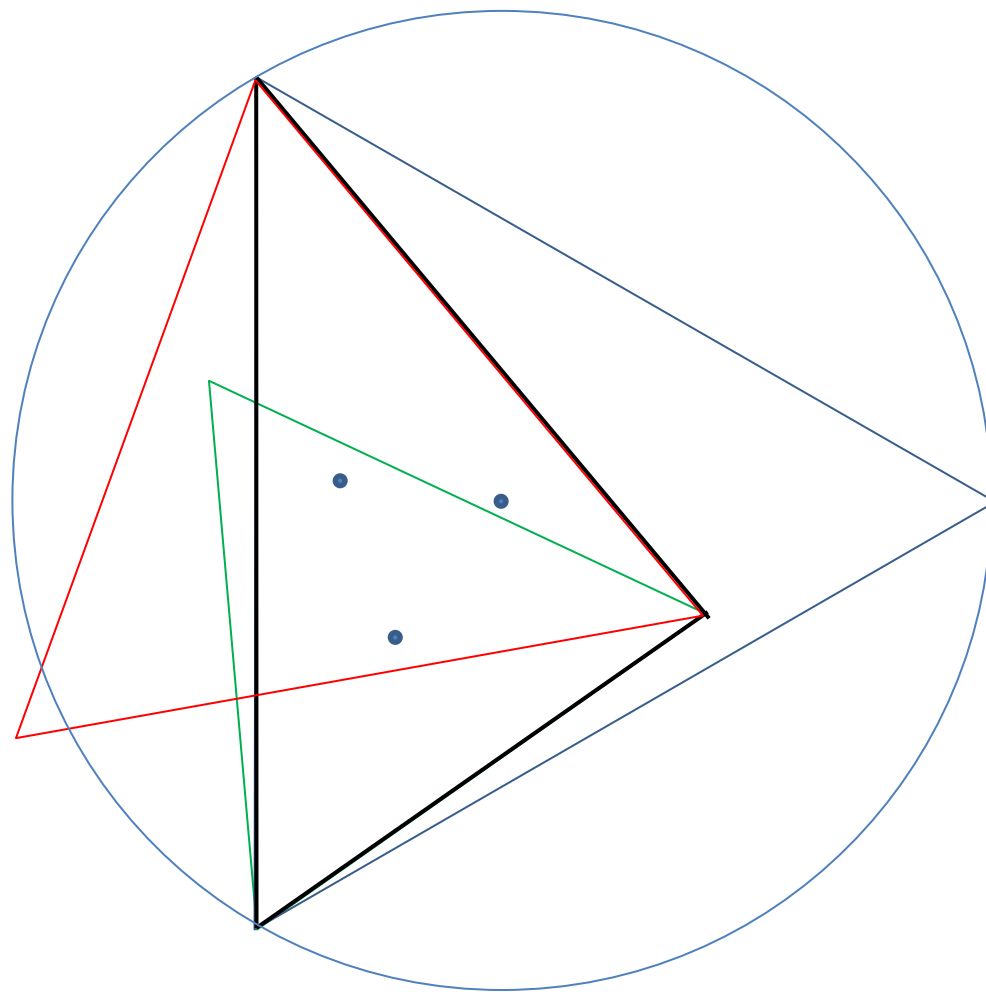
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$$



Napoléon Bonaparte 1769-1821

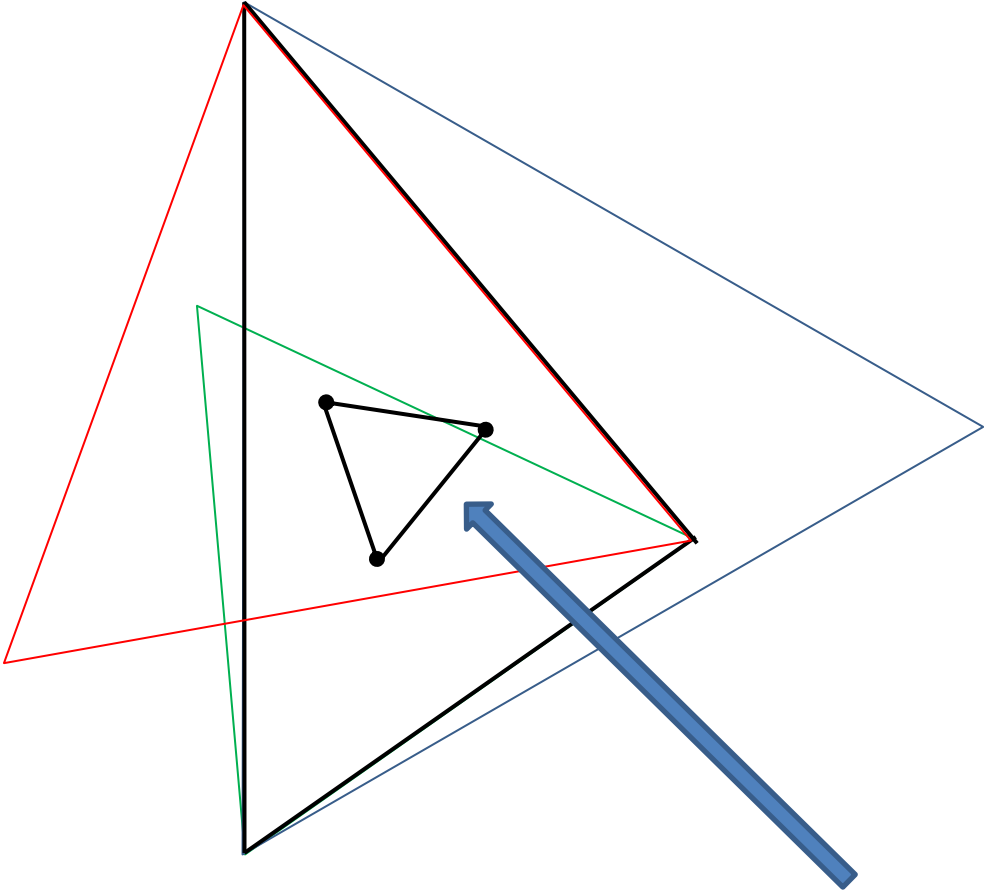


最後に3つの三角形の面積の関係を示す。
これはナポレオン以降に分ったことらしい。



この3点も正三角形を作る。

ナポレオンの定理（承前）



内ナポレオン三角形

$$DE = EF = FD = \ell$$

$$\Delta DEF = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2$$

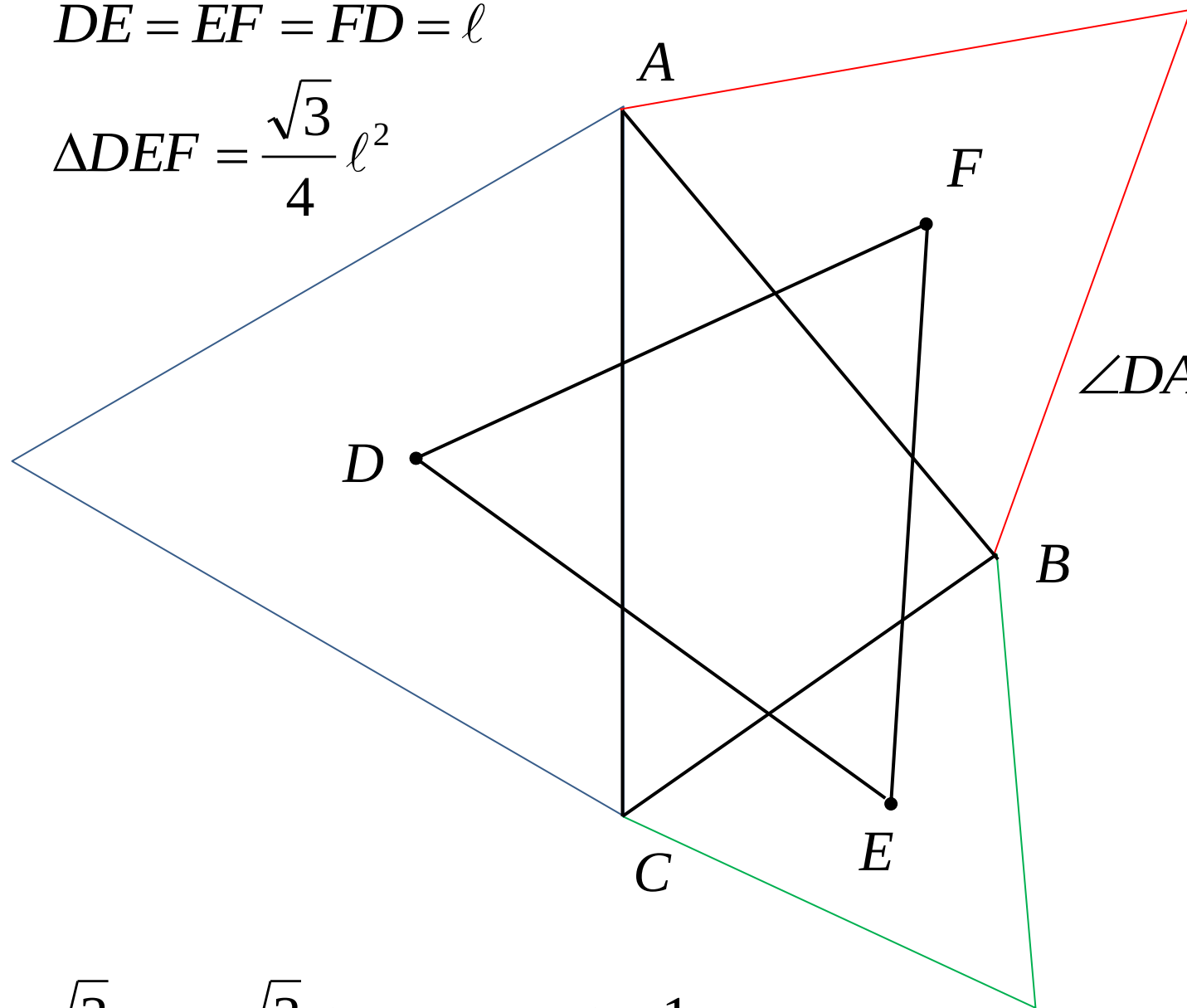
$$BC = a$$

$$CA = b$$

$$AB = c$$

$$\angle DAF = \angle CAB + 60^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 = \frac{\sqrt{3}}{24} (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2} \Delta ABC$$



$$UV = VW = WU = \ell'$$

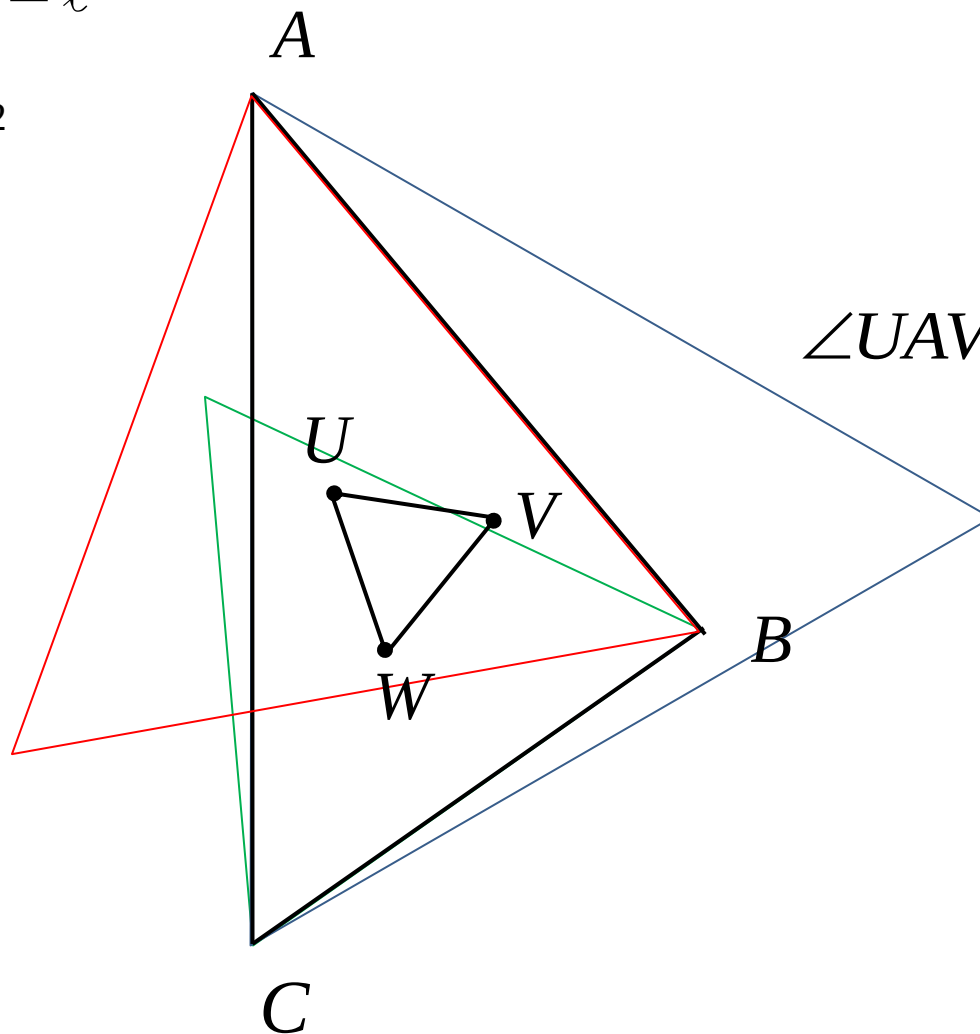
$$BC = a$$

$$CA = b$$

$$AB = c$$

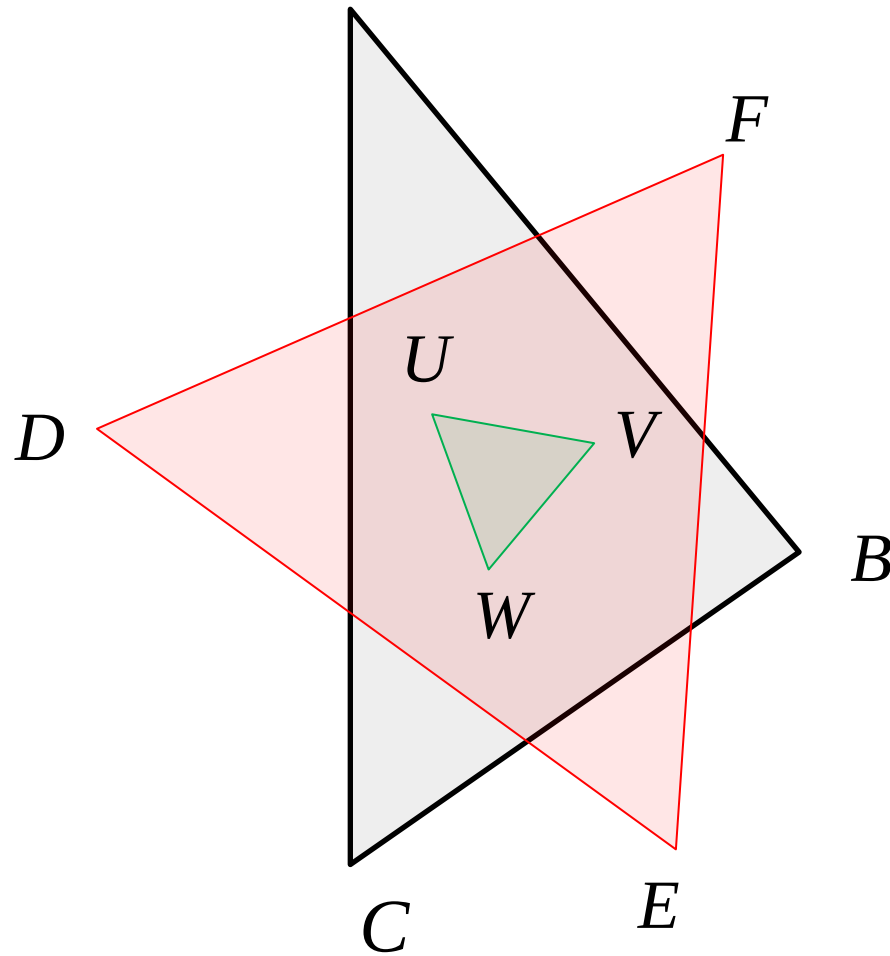
$$\Delta UVW = \frac{\sqrt{3}}{4} (\ell')^2$$

$$\angle UAV = 60^\circ - \angle CAB$$



$$\frac{\sqrt{3}}{4} (\ell')^2 = \frac{\sqrt{3}}{24} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2} \Delta ABC$$

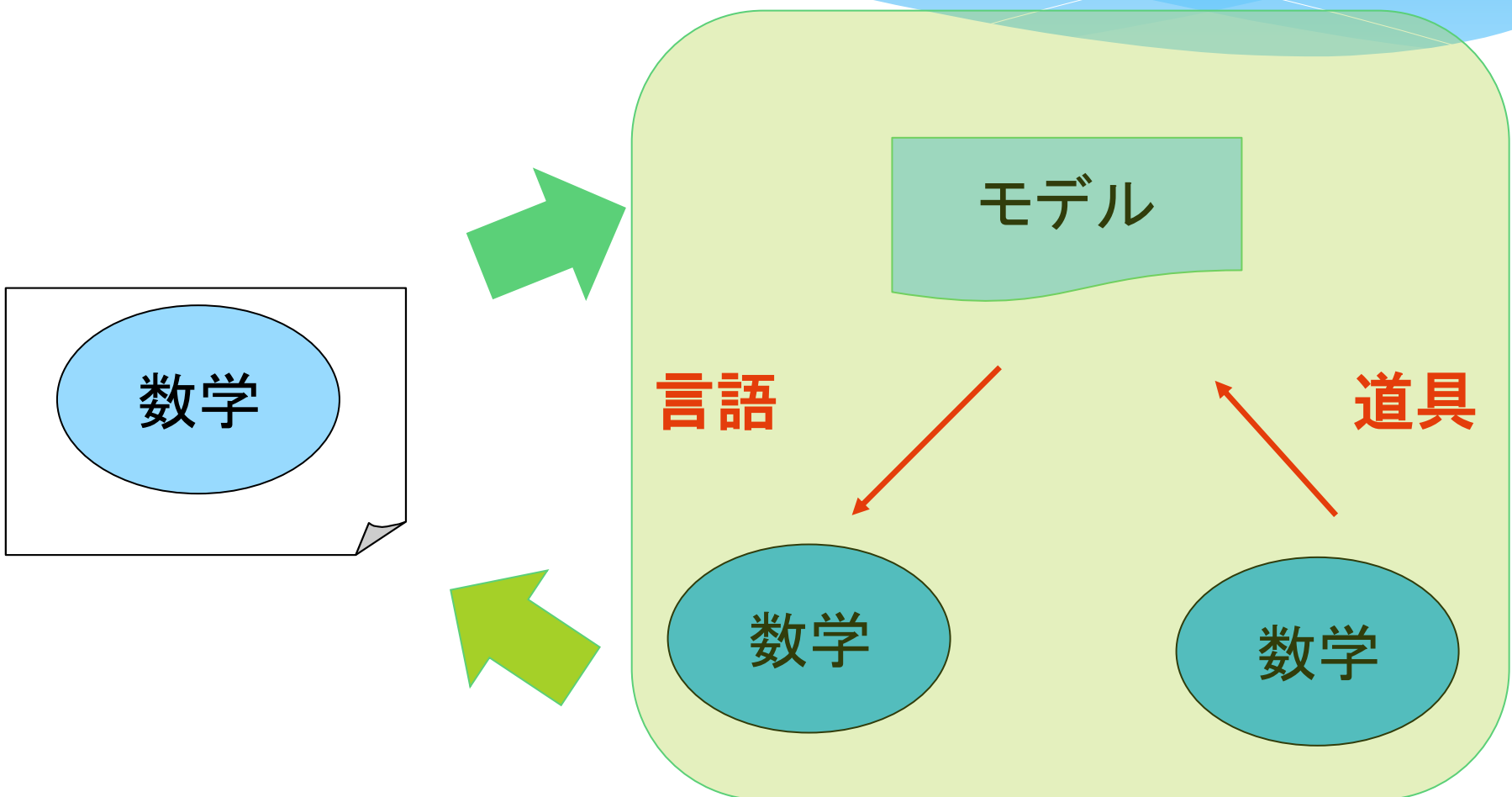
$$\Delta ABC = \Delta DEF - \Delta UVW$$



$$\Delta DEF - \frac{1}{2} \Delta ABC = \Delta UVW + \frac{1}{2} \Delta ABC = \frac{\sqrt{3}}{24} (a^2 + b^2 + c^2)$$

ここで数学は少し休みます
前回の復習
というほどではないですが...

数学の形





ニュートンさんの場合

Sir Isaac Newton by Sir
Godfrey Kneller, Bt,
1702. NPG 2881.
© National Portrait
Gallery, London
<http://www.npg.org.uk/collections/search/portrait/mw04660/Sir-Isaac-Newton>

CC BY-NC-ND 3.0

Sir Isaac Newton
1643-1727

天体

ケプラーの
法則

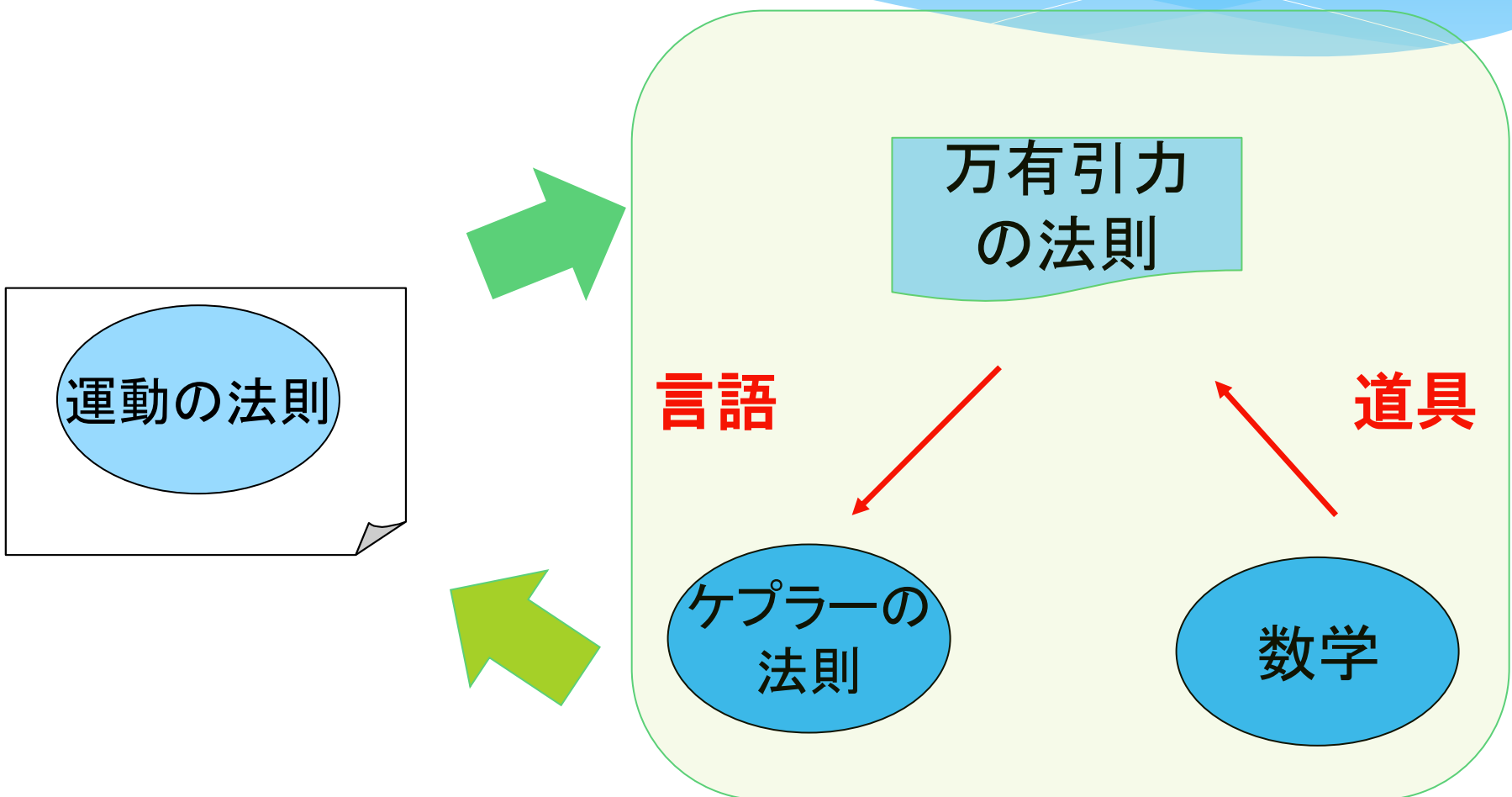
言語

道具

万有引力
の法則

数学

逆問題（微分積分学の誕生）



ケプラーの法則

- * **楕円軌道の法則**： 惑星の軌道は、太陽を 1 つの焦点とする楕円である。
- * **面積速度一定の法則**： 太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に通過する面積は、その惑星の軌道上の位置によらず一定である。
- * **調和法則**： 惑星の公転周期の 2 乗は軌道の長軸の長さの 3 乗に比例する。

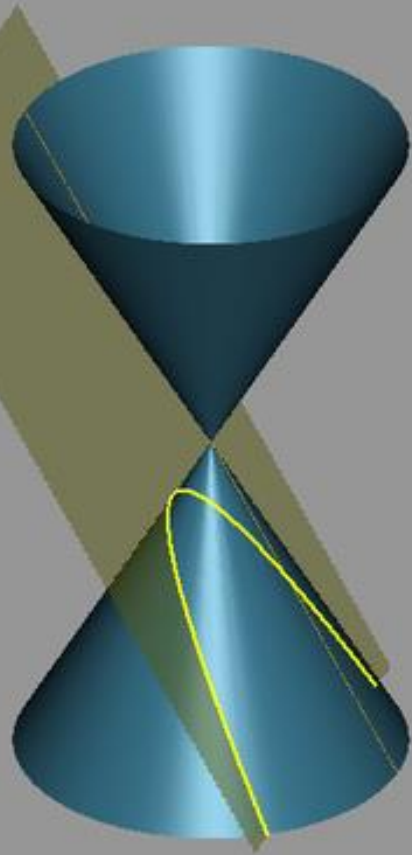
ニュートンの法則

- * **慣性の法則**： 静止している物体は、ほかからの作用を受けない限り、もとと同じ状態を続ける。
- * **運動の法則**： 物体の運動の変化は力の作用に比例し、その力の働く方向に起こる。
- * **作用反作用の法則**： 2つの物体が互いにおよぼし合う力は、大きさが等しく方向が反対である。

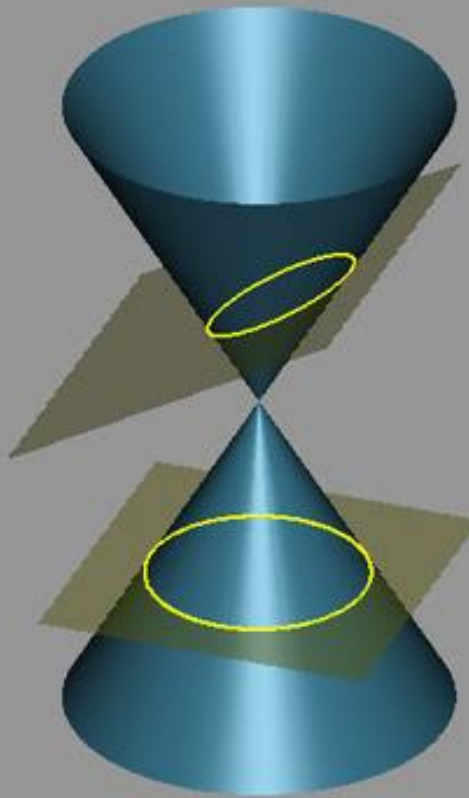
楕円が出てきたので
調子に乗って
数学の教材を少々

テーマ
二次曲線
極座標

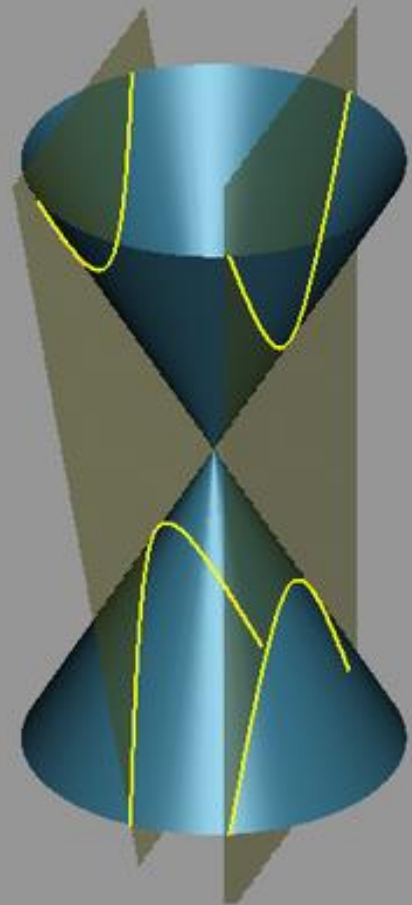
私が高等学校時代にもっとも感動
した結果の一つです



Parabola- cutting plane
parallel to side of cone.



Circle and Ellipse



Hyperbolas

2次曲線は円錐曲線としてあらわされる



放物線



楕円



双曲線

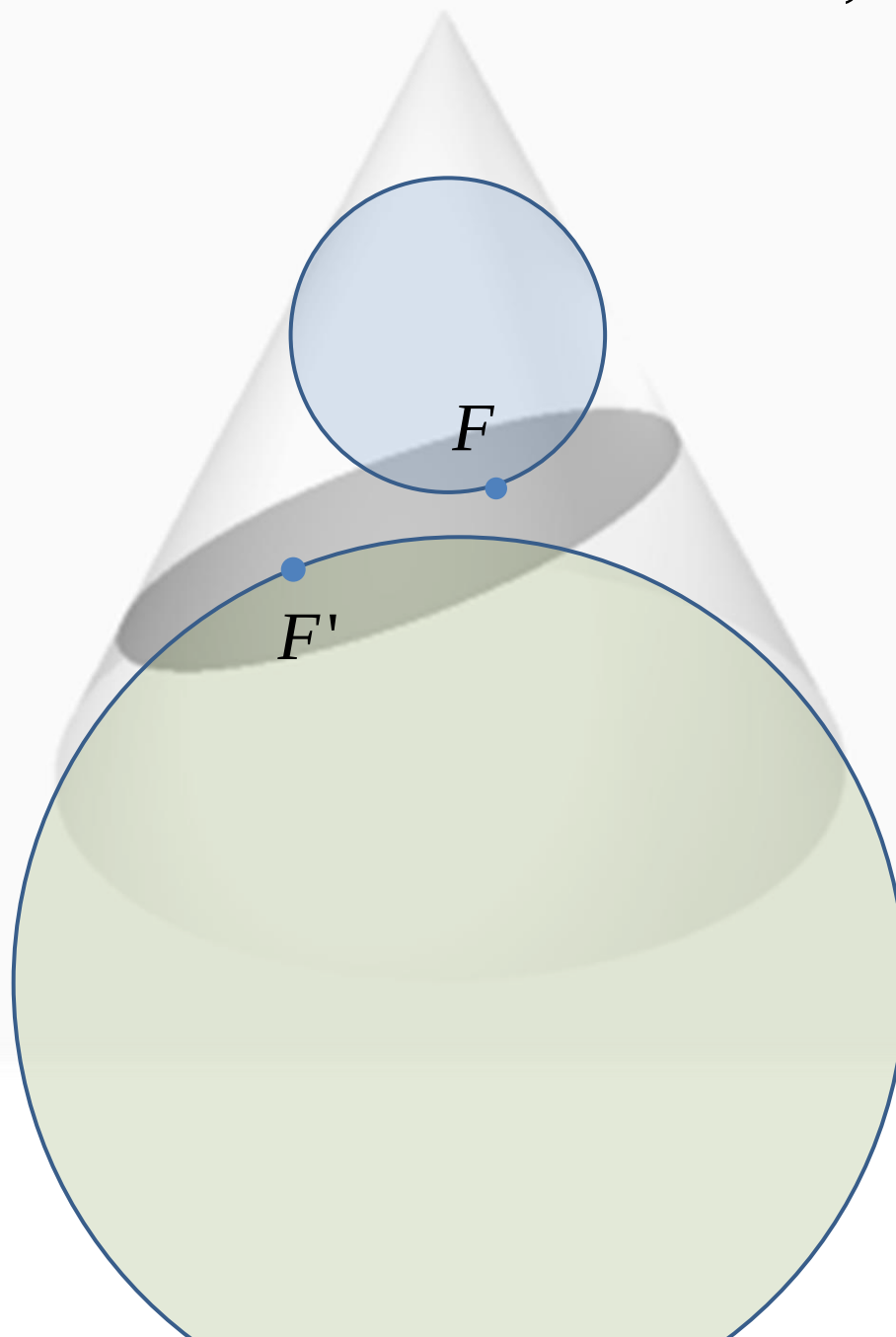
Image by Marcelo Reis, from Wikimedia Commons [CC BY-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)

〔放物線〕 <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conicas2.PNG>

〔楕円〕 <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conicas1.PNG>

〔双曲線〕 <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conicas3.PNG>

F, F' 焦点

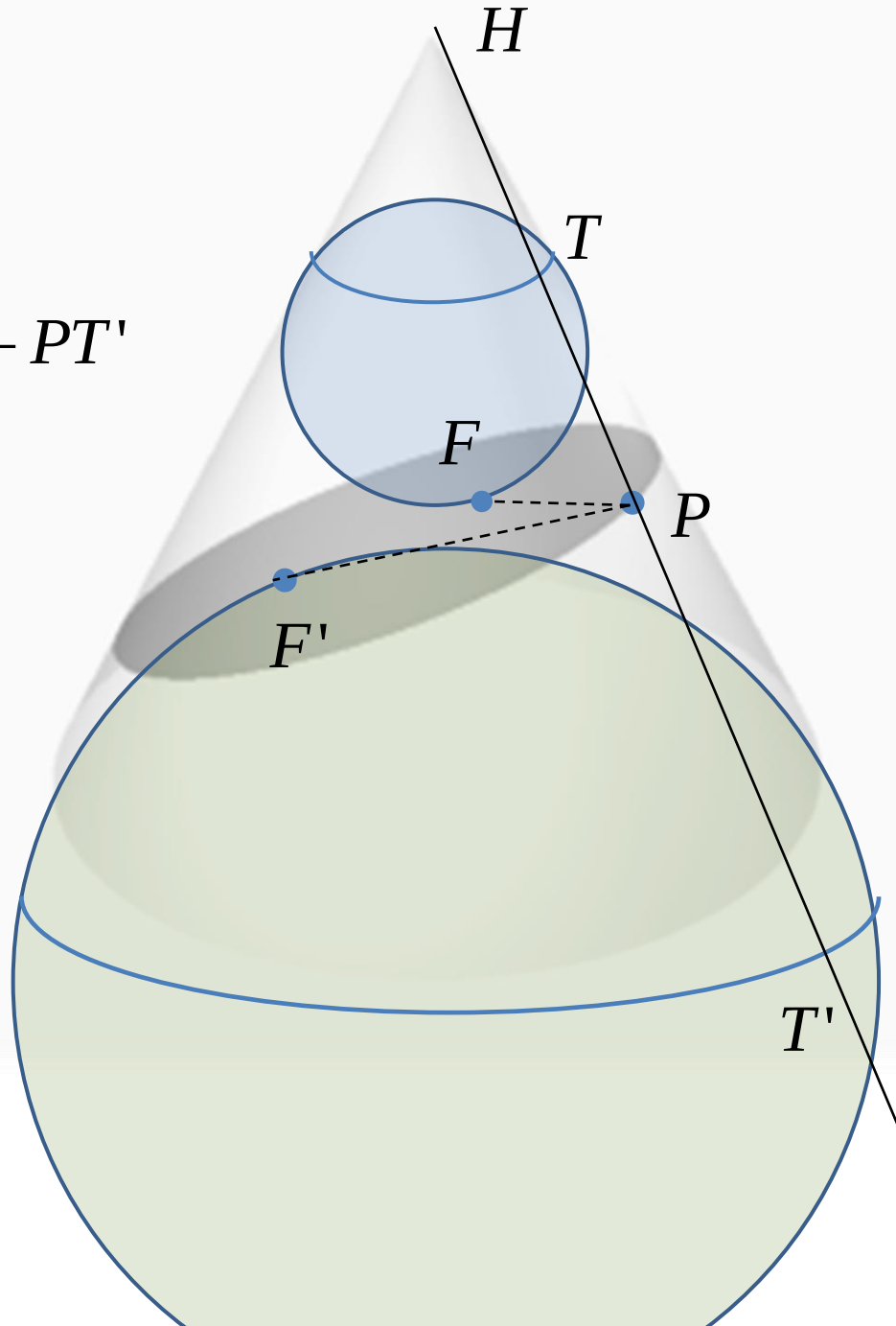


〔円錐と楕円〕 Image by Marcelo
Reis, from Wikimedia Commons
CC BY-SA 3.0
[http://commons.wikimedia.org/wiki/
File:Conicas1.PNG](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conicas1.PNG)

$$PF = PT$$

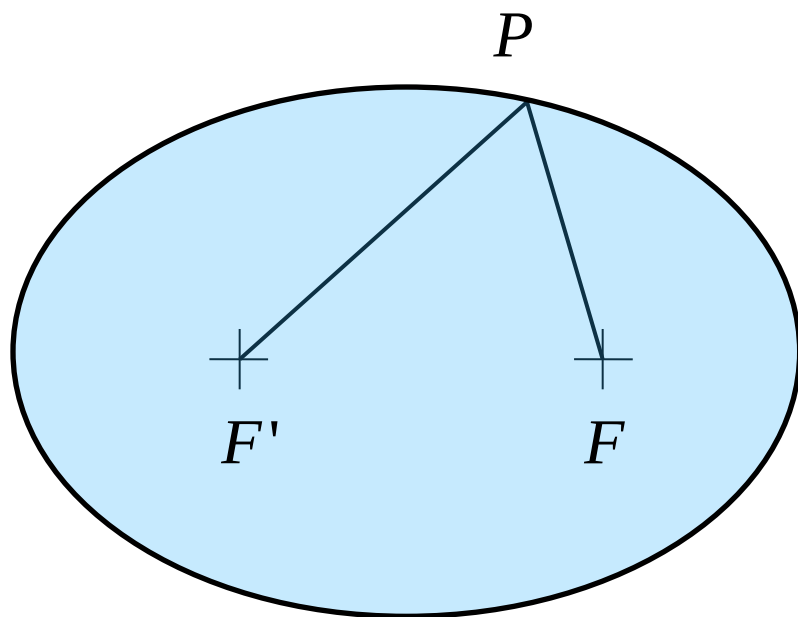
$$PF' = PT'$$

$$PF + PF' = PT + PT' \\ = TT'$$



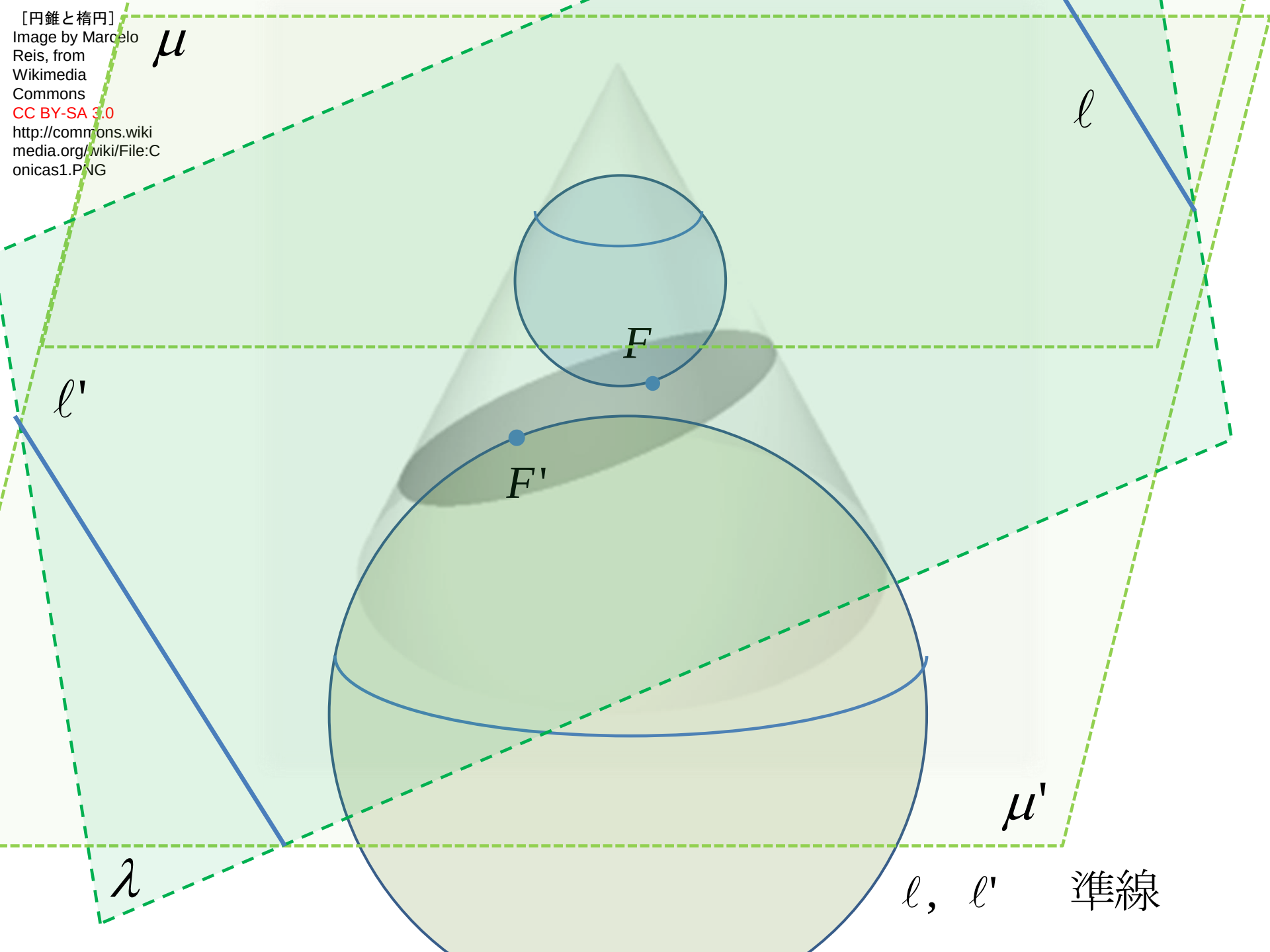
P 動点

楕円の定義 2点からの距離の和が一定



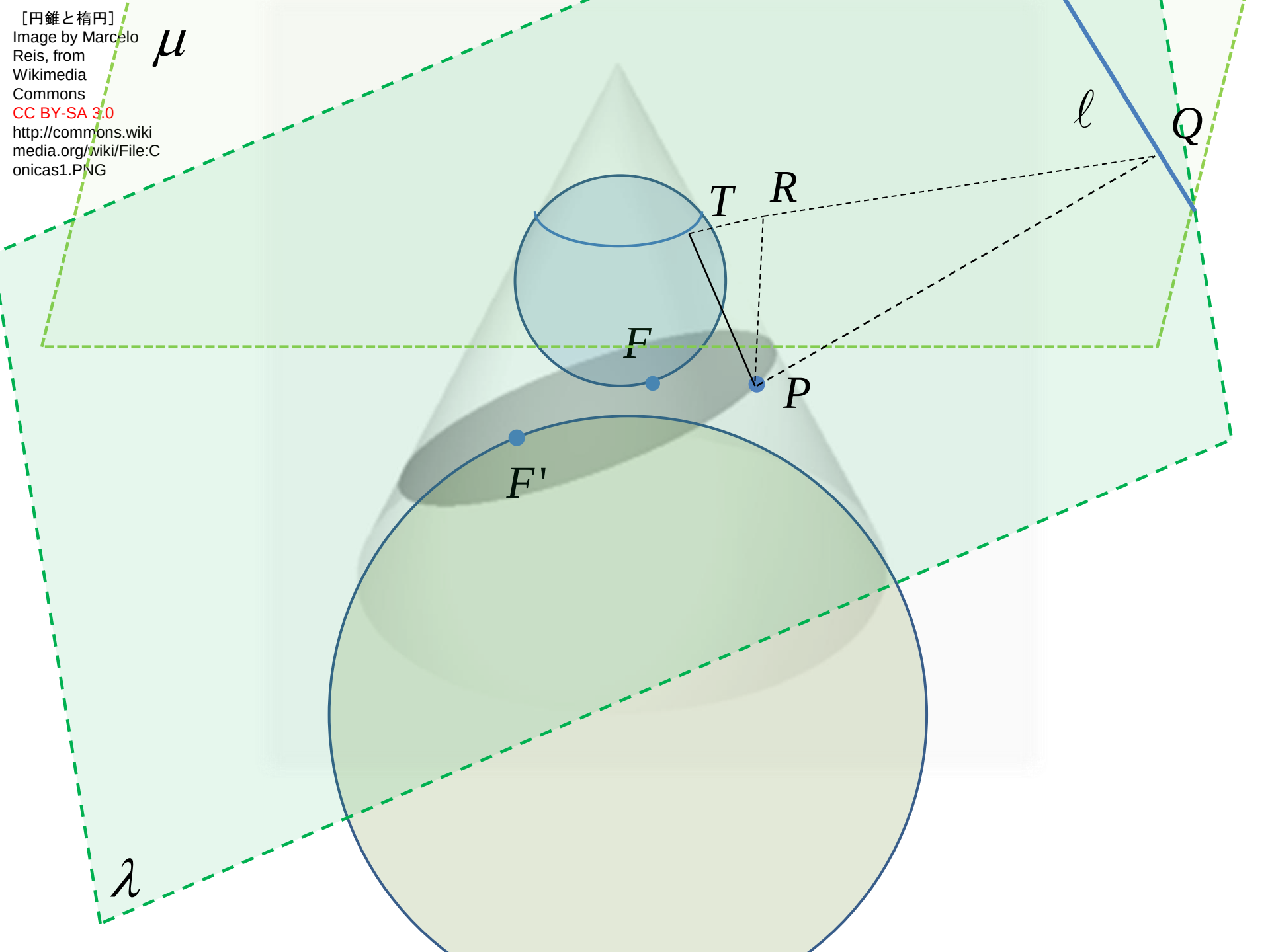
$$PF + PF' = 2a$$

[円錐と楕円]
Image by Marcelo
Reis, from
Wikimedia
Commons
CC BY-SA 3.0
[http://commons.wiki
media.org/wiki/File:C
onicas1.PNG](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conicas1.PNG)



μ

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conicas1.PNG>



[円錐と楕円]
 Image by Marcelo
 Reis, from
 Wikimedia
 Commons
 CC BY-SA 3.0
[http://commons.wiki
media.org/wiki/File:C
onicas1.PNG](http://commons.wiki
media.org/wiki/File:C
onicas1.PNG)

μ

ℓ

Q

T

R

F

P

F'

$$PQ \perp \ell$$

$$PR \perp \mu$$

$$\angle RPT = \alpha$$

$$\angle PQR = \beta$$

$$PR = PT \cos \alpha$$

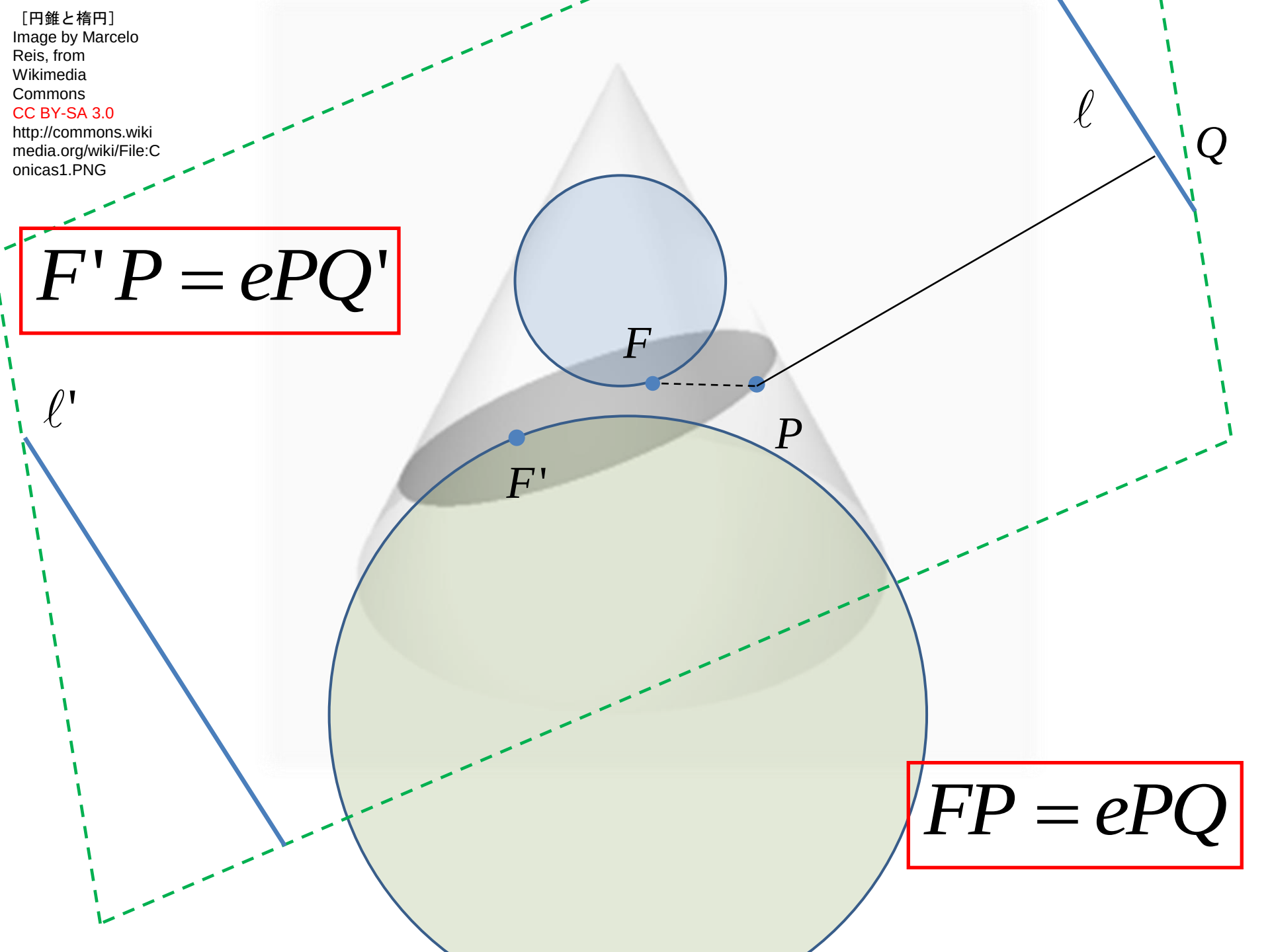
$$PR = PQ \sin \beta$$

$$PT = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} PQ$$

$$PF = PT$$

λ

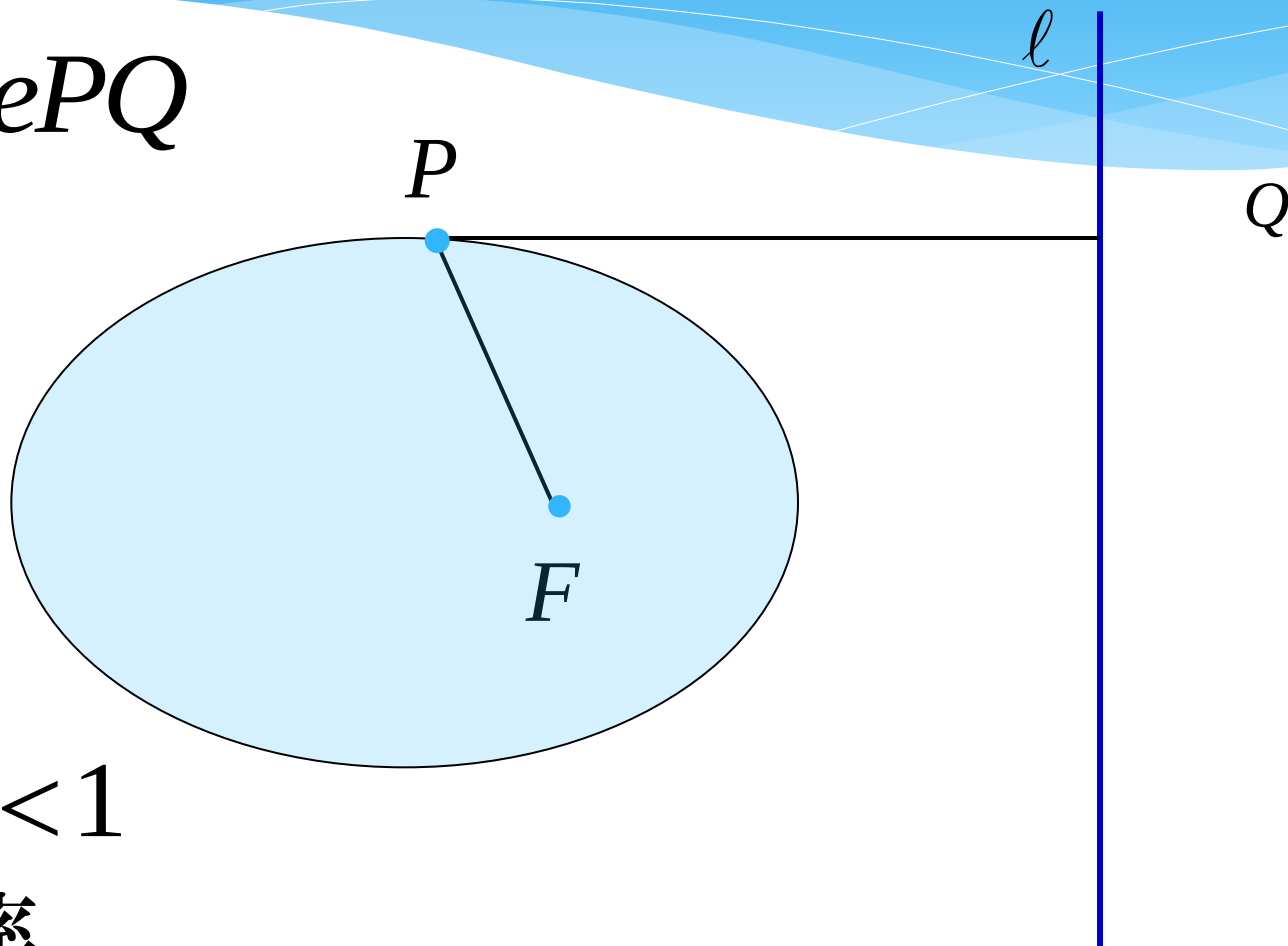
$$F'P = ePQ'$$



$$FP = ePQ$$

切り口の平面では

$$FP = ePQ$$



$$0 < e < 1$$

離心率

$$e = 1$$



$$0 < e < 1$$



$$1 < e$$

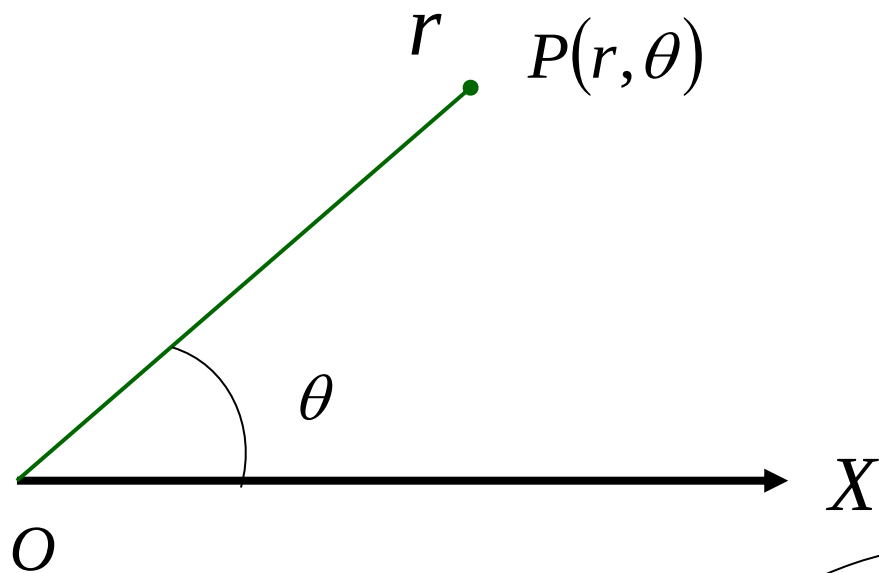


放物線

楕円

双曲線

極座標表示

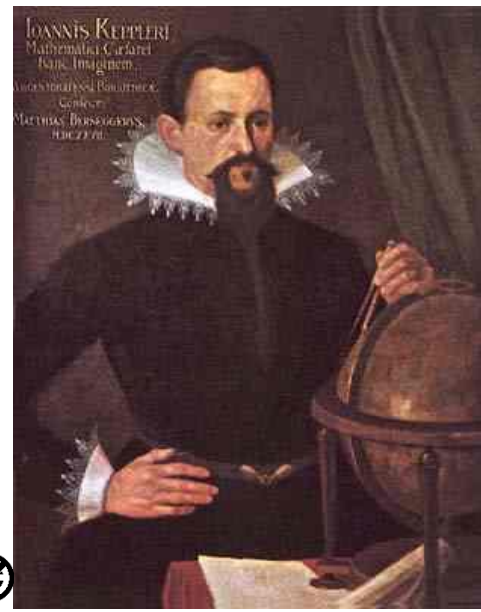


$$r = OP$$

$$\theta = \angle XOP$$

O 極
 OX 始線

どんな点も
 (r, θ)
で表される！

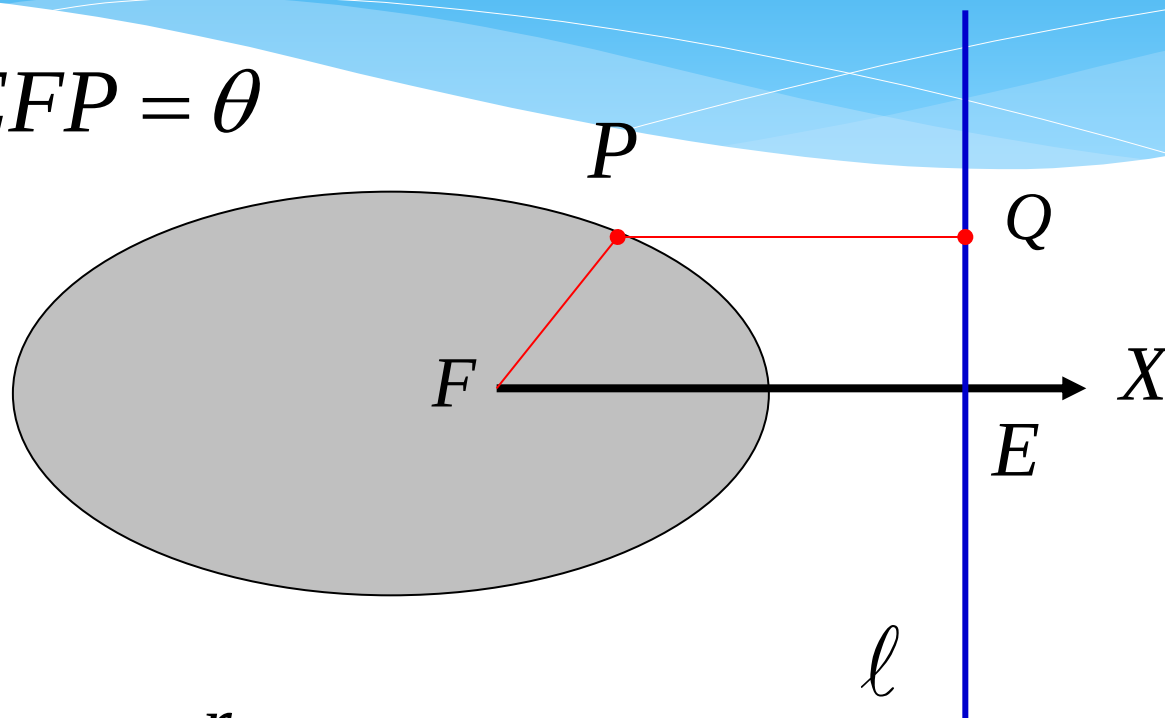


楕円の極座標表示 (焦点を極とする)

$$FP = r, \quad \angle EFP = \theta$$

$$FE = \frac{\lambda}{e}$$

$$PQ = \frac{r}{e}$$



$$\frac{\lambda}{e} = FE = r \cos \theta + \frac{r}{e}$$

$$r = \frac{\lambda}{1 + e \cos \theta}$$

$$FP = ePQ$$

$$r = \frac{\lambda}{1 + e \cos \theta}$$



$$e = 1$$



$$0 < e < 1$$



$$1 < e$$



話変わって

最先端の話題をひとつ
決着は皆さんに託された

フェルマーの最終定理

$$x^n + y^n = z^n \quad n \geq 3$$

$$xyz \neq 0$$

整数の解 (x, y, z)
は存在しない

$$n = 3$$

$$n = 4$$

$$n = p \quad (\text{奇素数})$$

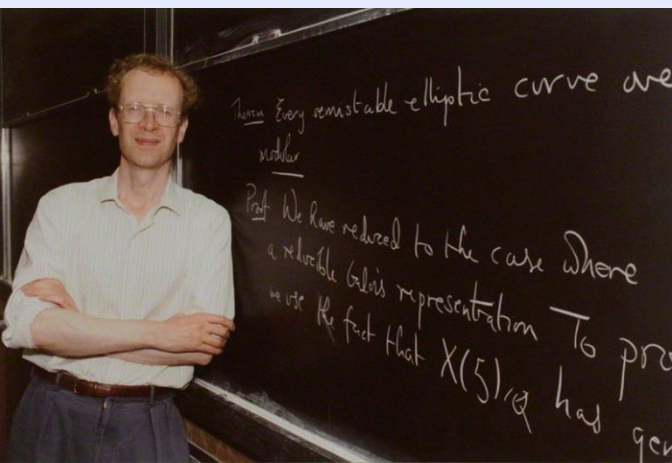
余白が
足りない！



$$n = 3$$



Leonhard Euler
1707-1783



*
Sir Andrew John Wiles
by Unknown photographer.
© National Portrait Gallery, London

Andrew John Wiles
1953-

Adrian-Marie Legendre
1752-1833



$$n = 5$$

Perre de Fermat
1601-1665



$$n = 4$$



$$x^3 + y^3 = z^3 \quad xyz \neq 0$$

整数解が存在しないことはオイラーが証明した。

数学は楽観的な見方が勝利する

本当か？

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 \\ = 20615673^4$$

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

この頃の話題から

abc予想

2012年9月に

解決した(かもしれない)という不思議な予想

いろいろなバージョンがありますが
次のものは**未解決**

もしこの事実が正しいならば
フェルマーの最終定理は簡単な帰結です

互いに素な自然数の組 (a, b, c)
で $a < b < c$, $a + b = c$
とするとき

$$c < [\text{rad}(abc)]^2$$

abc予想 (イロハ予想) (の一つ)

互いに素な自然数の組 (a, b, c)

で $a < b < c$, $a + b = c$

とするとき

$$c < [\text{rad}(abc)]^2$$

$$\text{rad}(15625^{12345}) = \text{rad}(15625) = \text{rad}(5^6) = \text{rad}(5) = 5$$

$$\text{rad}(2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2) = \text{rad}(2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

$$\text{rad}(13446972) = \text{rad}(462) = 462$$

abc予想からフェルマーの最終定理

$$x^n + y^n = z^n$$

$$a = x^n \quad b = y^n \quad c = z^n$$

$$z^n < [\text{rad}(x^n y^n z^n)]^2 = [\text{rad}(xyz)]^2 < (xyz)^2 < z^6$$

$$n < 6$$

$n = 3, n = 4, n = 5$ については個別に解決済

授業準備の参考
にして
面白かった本等

いろいろな本を
読んで頂戴！

ボザマンティエ・レーマン
『偏愛的数学I:
脅威の数』坂井公訳、
岩波書店、2011年

ボザマンティエ・レーマン
『偏愛的数学II:
魅惑の図形』坂井公訳、
岩波書店、2011年

黒川信重、小山信也
『ABC予想入門』
PHP研究所、2013年