確率過程モデル

としての

双六

楠岡　成雄
（東京大学大学院数理科学研究科）

革新の歴史と伝統の力

確率微分方程式

伊藤清（1942）Markoff 過程を定める微分方程式
（表紙）

東京大学理学部数学科　1938 年卒業
内閣統計局　勤務

その後、名古屋大学助教授、京都大学教授

2006 年　第 1 回ガウス賞　（国際数学者会議）

全國紙上數學談話會

第244號

昭和十七年十一月二十日

1077.	Markoff過程ヲ定メル微分方程式	伊藤清(1352)
1078.	一般タウバー型定理ノ環論的証明	深宮政範(1402)
1079.	Wimann ノ定理ニツイテ	有馬喜八郎(1406)

編輯者　大阪市北區　大阪帝國大學
理學部數學教室
發行所　同　前
振替口座番號　大阪一七七四二番
大阪市北區
大阪帝國大學
理學部數學教室　清水辰次郎

1077. Markoff 過程ヲ定メル微分方程式

伊藤 清(内閣統計局)

ハシガキ

(I) 有限個ノ可能ナ場合 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_m$ ヲ有シ, 自然数ヲ径数トスル simple markoff process $x_1, x_2, \cdots\cdots$ ニ関シテ多クノ遷移確率ヲ考ヘルコトが出来ル. 例ヘバ $x_k = a_i$ ナル條件ノ下ニ於ケル $x_l = a_j$ ノ確率、或ハ $x_1 = a_{i_1}$, $x_2 = a_{i_2}, \cdots\cdots, x_n = a_{i_n}$ ナル條件ノ下ニ於ケル $x_{n+1} = a_{i_{n+1}}$ トナル確率等々。シカシ乍ラソレ等ハ結局 $x_k = a_i$ ノ時ノ $x_{k+1} = a_j$ ナル確率 $p_{ij}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \cdots\cdots, i, j$

確率過程

時間と共に変化する不確実な現象を
記述するための数学モデル（数学模型）

株価　株式の価格

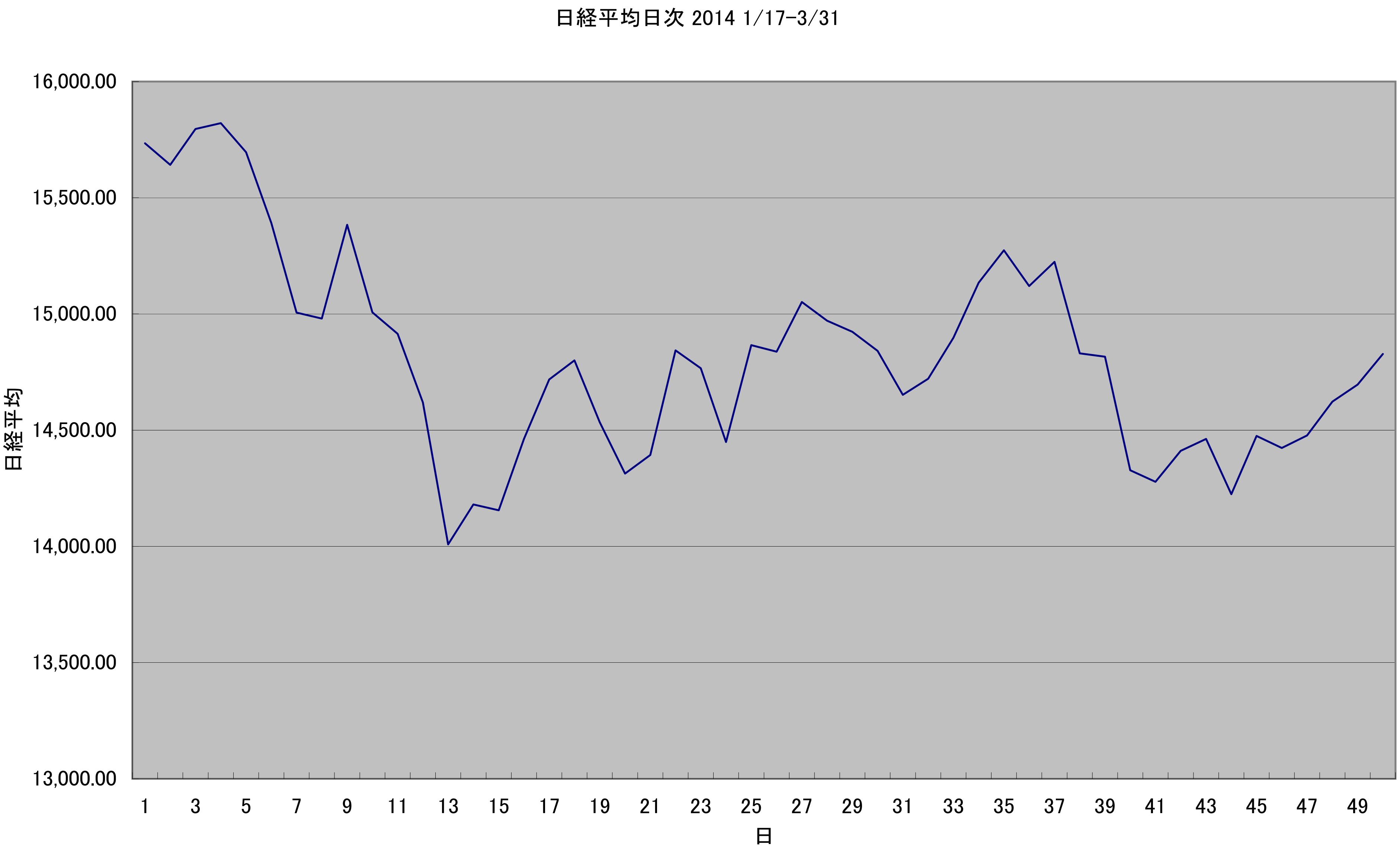
日経平均のグラフ　(次ページ)

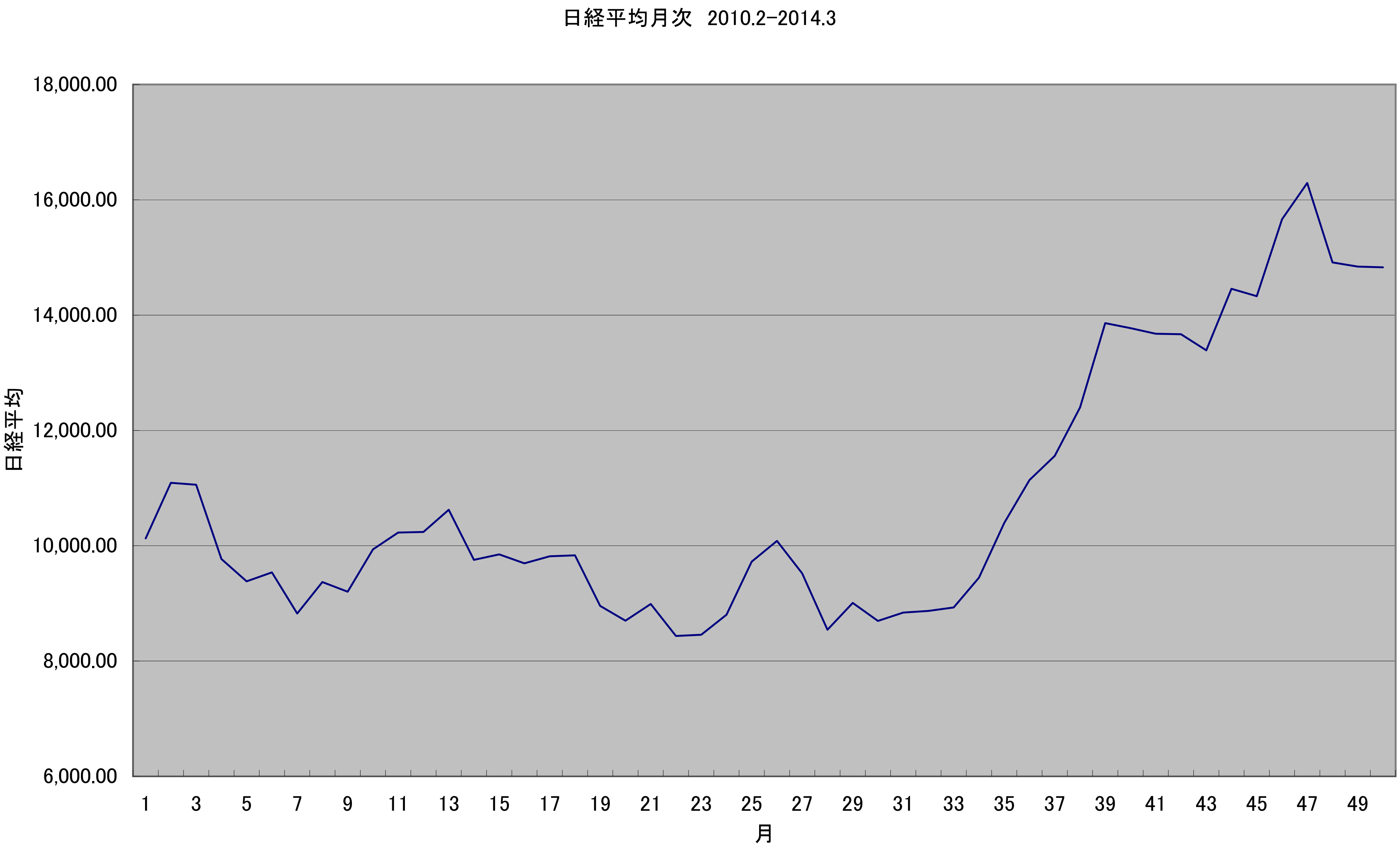
日経平均　２２５種類の株価の重み付き平均

株価は市場で決まる　多くの市場参加者

株価の動きは不確実か？

ファイナンス　では　確率過程と考えて話を進める


日経平均日次 2014 1/17-3/31
16,000.00
15,500.00
15,000.00
14,500.00
14,000.00
13,500.00
13,000.00
日経平均
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
21
23
25
27
29
31
33
35
37
39
41
43
45
47
49
日


日経平均月次 2010.2-2014.3
18,000.00
16,000.00
14,000.00
12,000.00
10,000.00
8,000.00
6,000.00
日経平均
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
21
23
25
27
29
31
33
35
37
39
41
43
45
47
49
月

ブラウン運動（花粉の中から出た微粒子の不思議な運動）

生物学者ブラウンが 1820 年代に発見、詳細に研究

アインシュタインが 1905 年に理論的に解明

原子や分子の存在の決定的証明となった

江沢洋「誰が原子を見たか」岩波科学の本

注目する現象が不確実かどうか？

日食の日時は完全に予測できる
微粒子の動きは予測できない（背後に多くの分子）

注目する現象に大きな系があるために
完全な予測が出来ない
ならば、とりあえず確率過程と考えよう！！

時間が離散的な確率過程

本日考える問題例

あなたはスーパーマーケットの経営者だとします。
レジはいくつも用意されていますが、
ある時間帯にレジをいくつ開けるべきか。

◇レジを多く開ける
　パートを多く雇う必要があり費用がかかる

◇レジを少なく開ける
　レジに並ぶお客さんの行列があまり長くなると
　悪評が立ち、客が来なくなる

待ち行列の問題

待ち時間を減らすことのコストパフォーマンス

ATM、携帯電話、インターネット、
交通システム、生産システム等々

レジの問題

ある時間帯に、ある台数のレジを開けたとして
どれくらい長い行列が出来るか

何人客が来るかをあらかじめ予測できない
（多分、日によって違う）

待ち行列の長さは確率過程

問題解決のためのモデルの設計

最も単純な確率過程：マルコフ過程

時間が離散的な場合　を考える

離散時間のマルコフ過程　＝　一人双六

双六

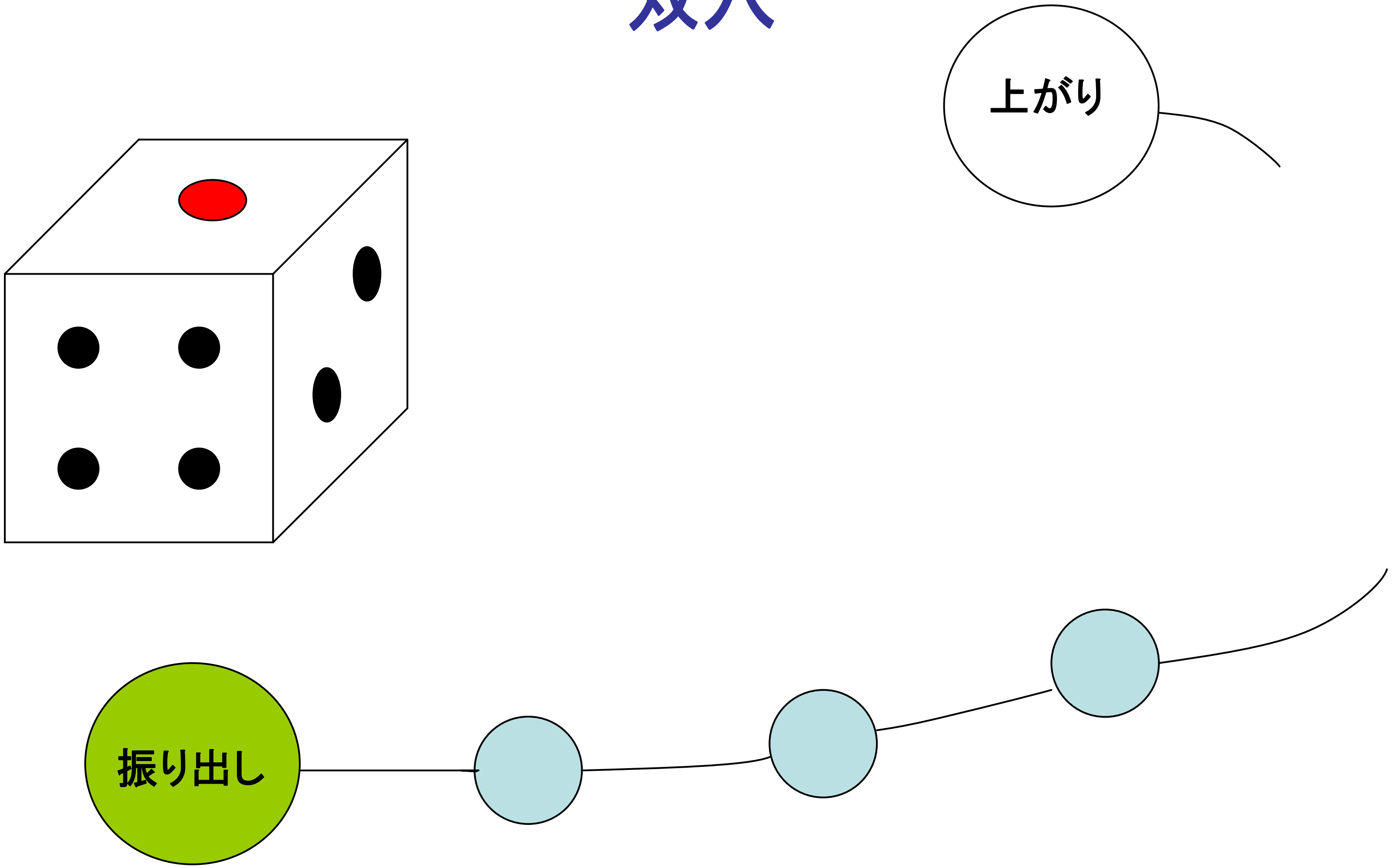
双六盤　　マス　状態を表す

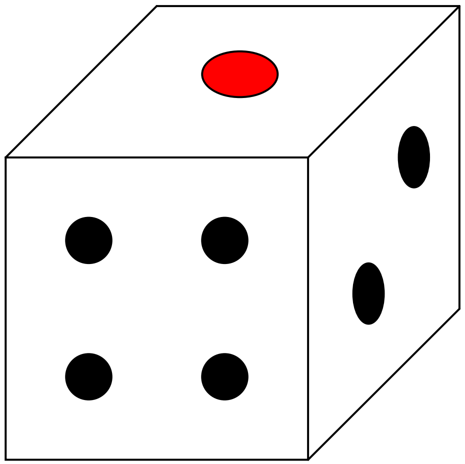
さいころ（ルーレット）により不確実な状況を生み出す

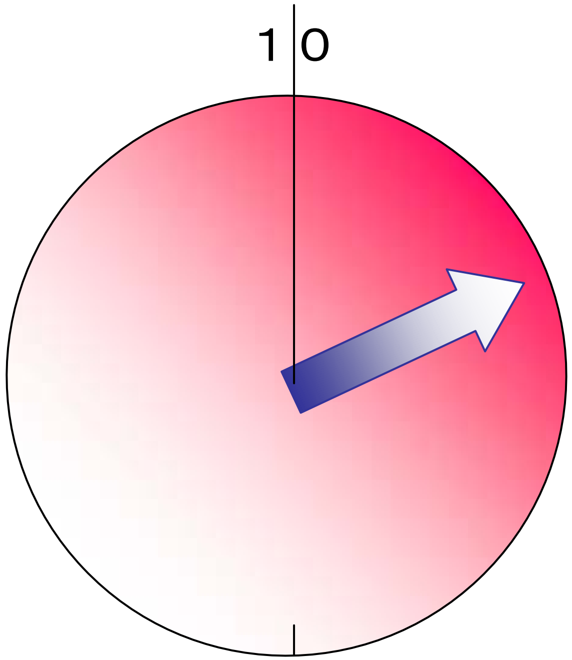
時間の概念がある

マルコフ性：現在いるマスに到達した履歴に関係なく
その後の動きが決まる

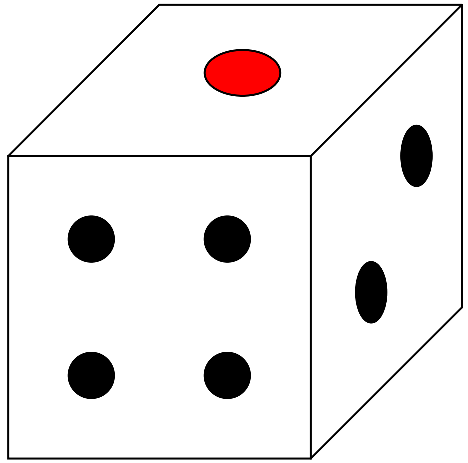
双六



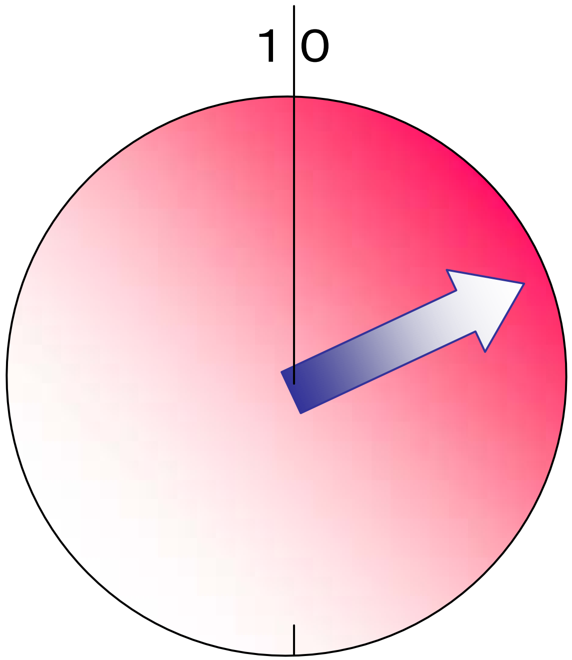




回転板



確率1/6で6つの状態が現れる

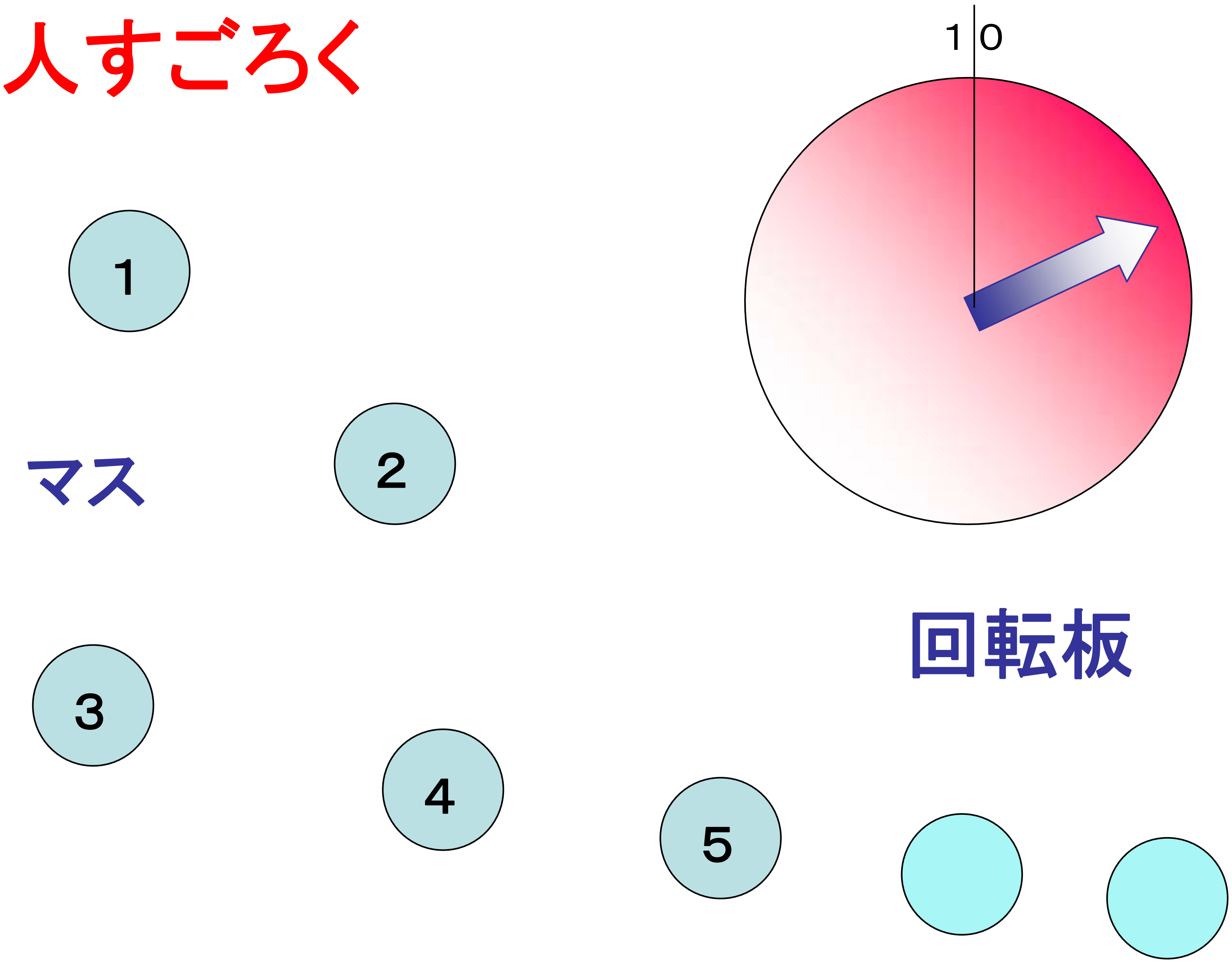


任意の確率を考えることが出来る

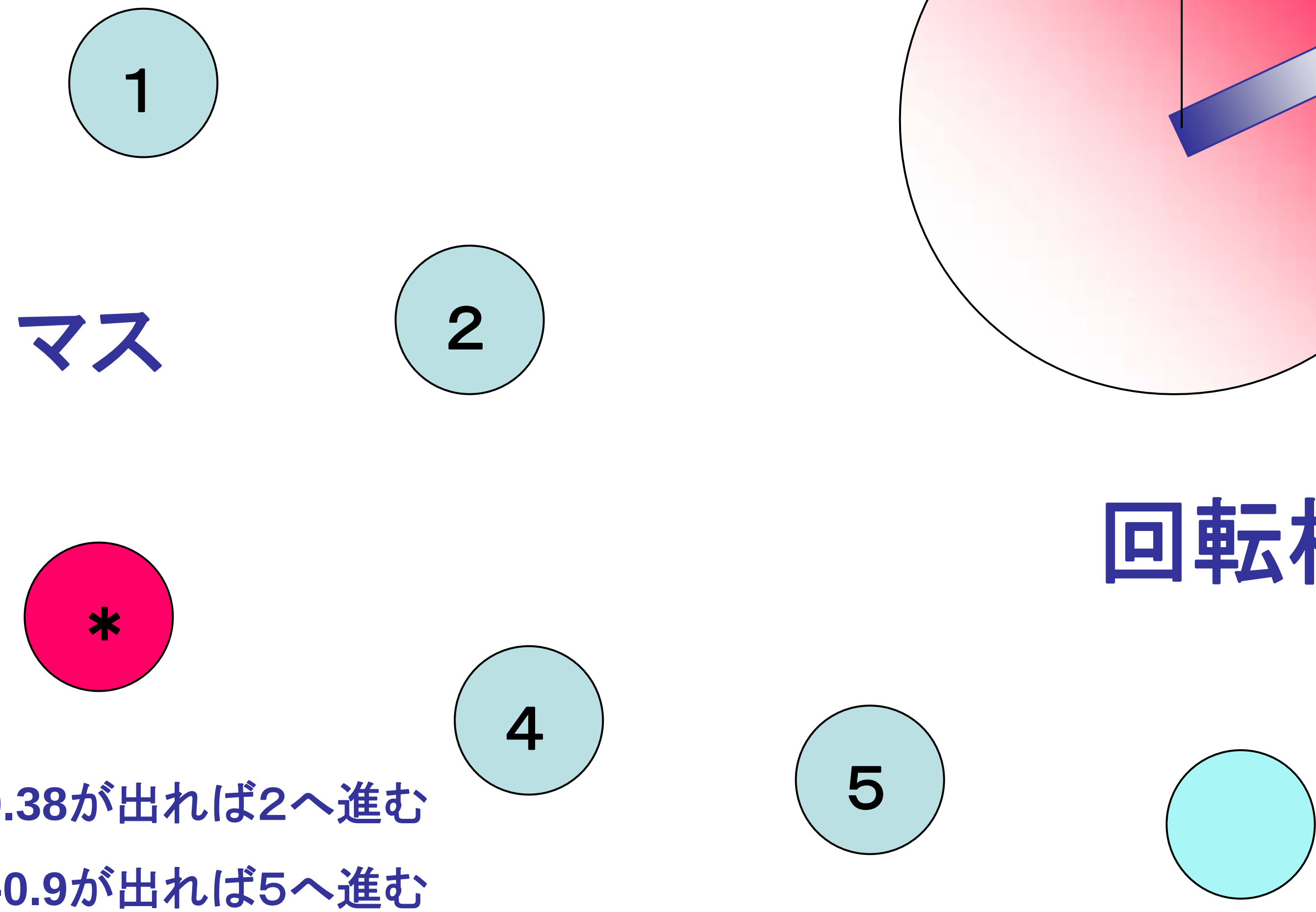
状態も無限に設定できる

自由度が高い

1人すごろく



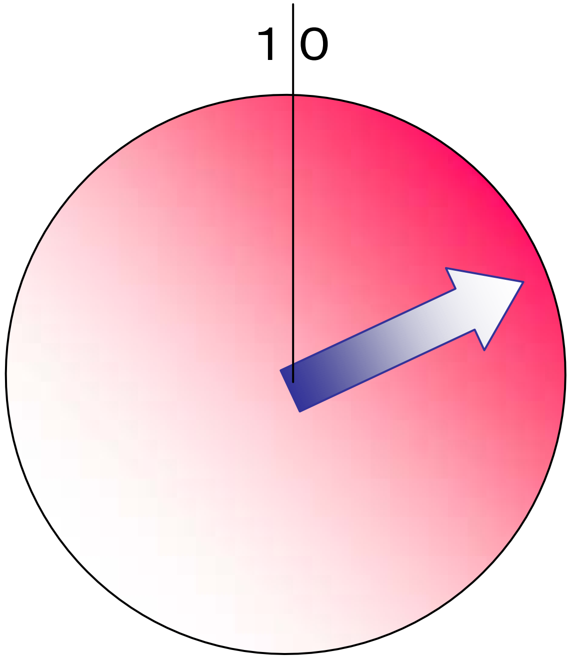
1人すごろく



0.0-0.38が出れば2へ進む

0.38-0.9が出れば5へ進む

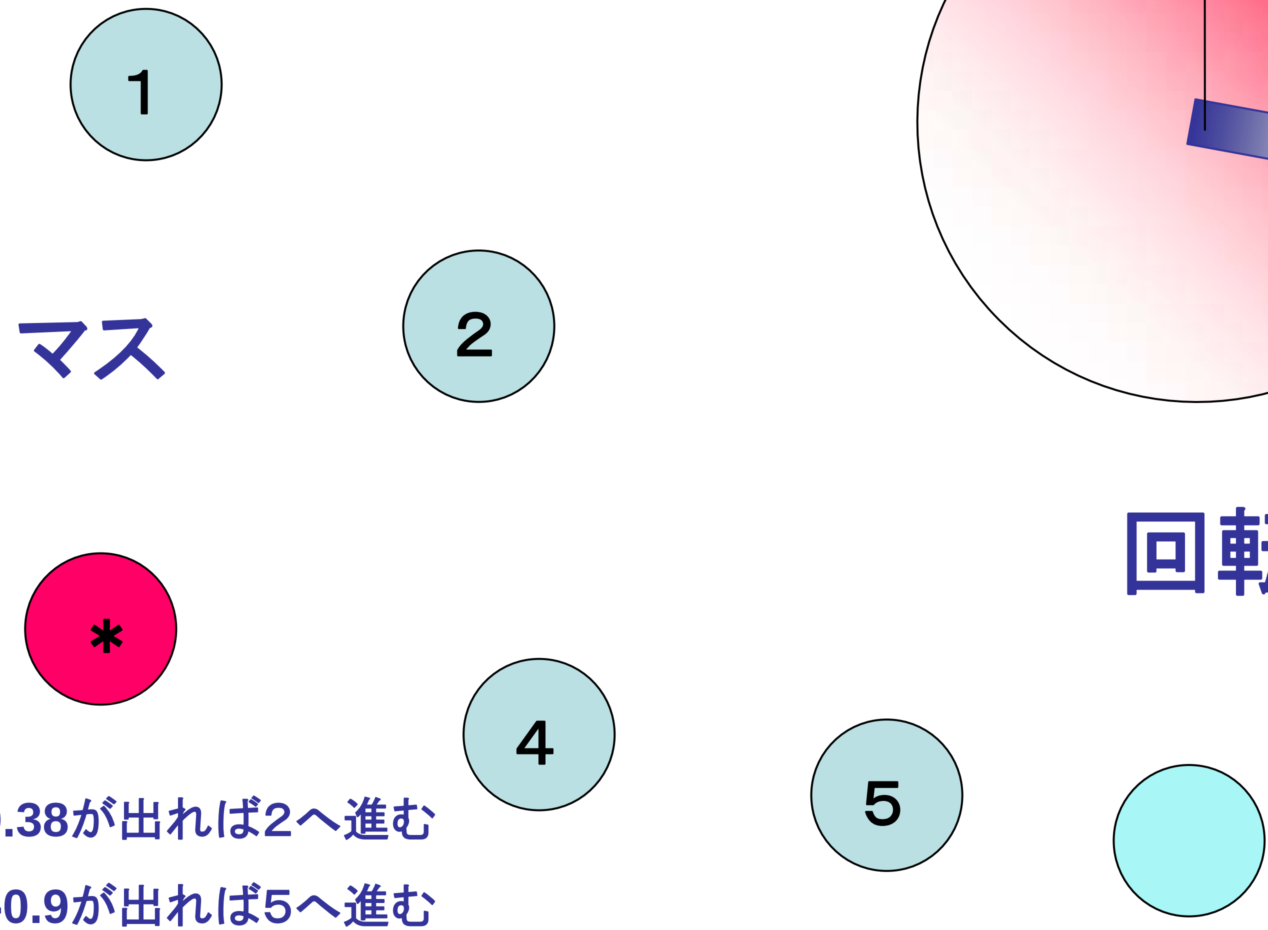
0.9-1.0が出ればそのまま動かない

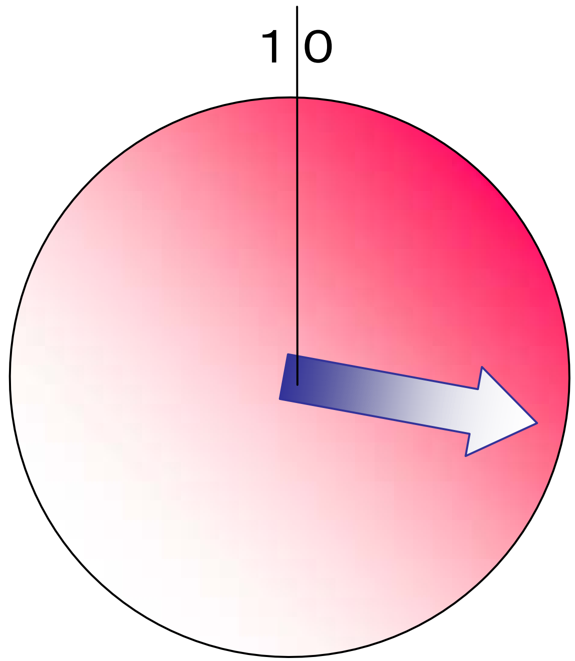


回転板

1人すごろく

マス





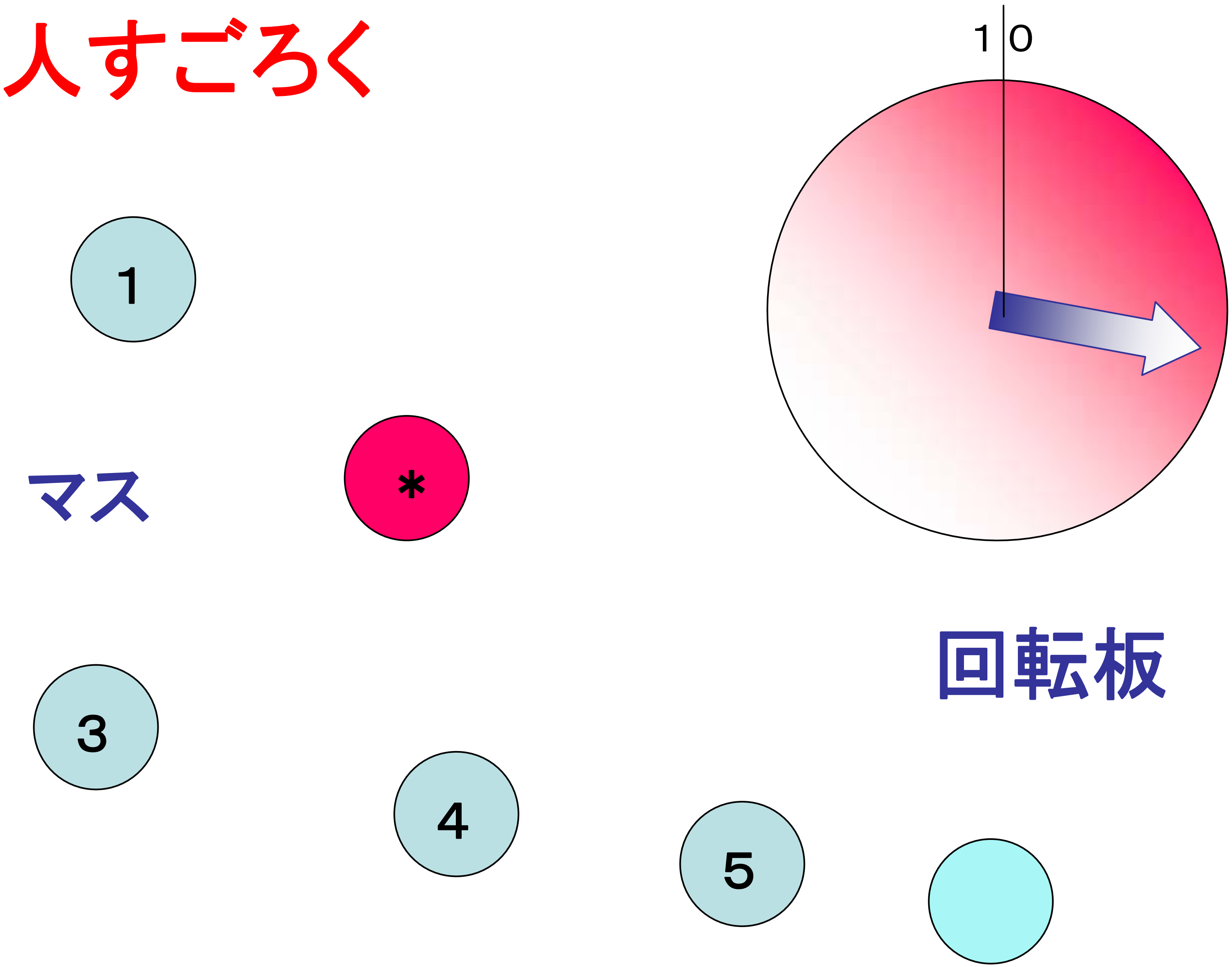
回転板

0.0-0.38が出れば2へ進む

0.38-0.9が出れば5へ進む

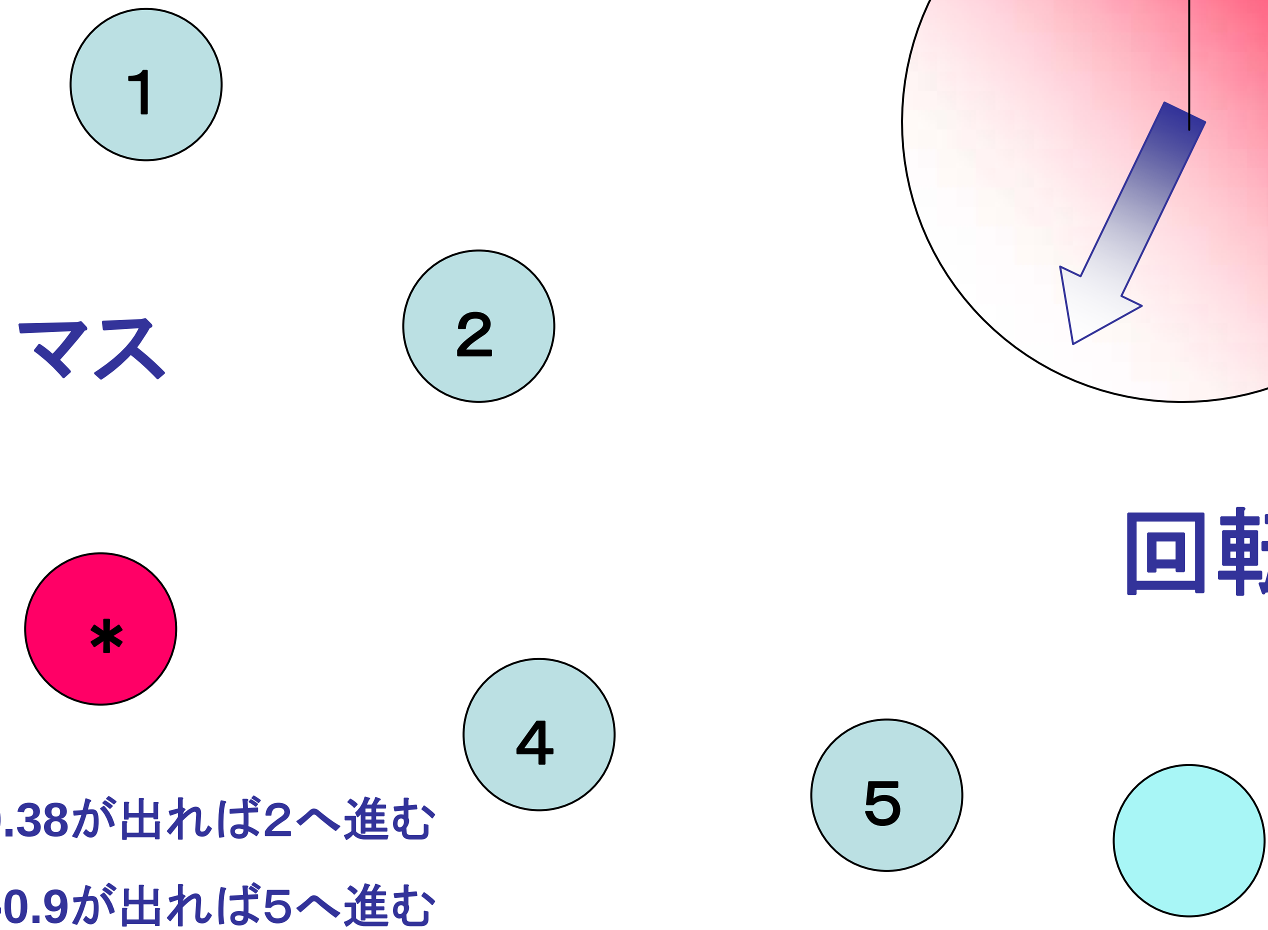
0.9-1.0が出ればそのまま動かない

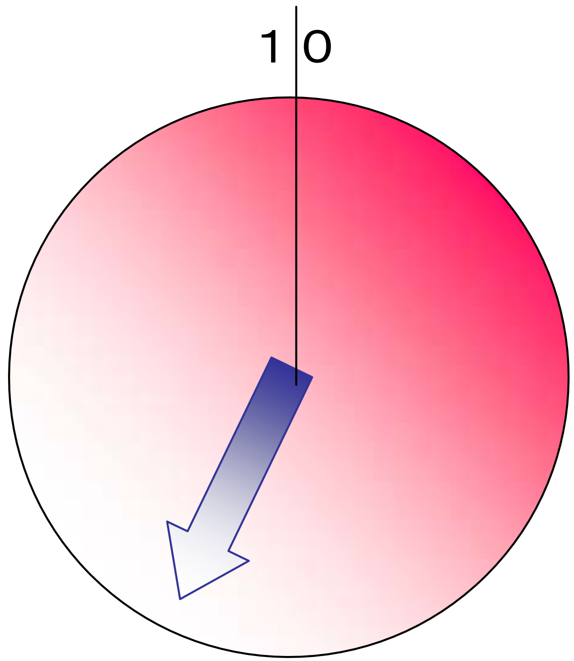
1人すごろく



1人すごろく

マス



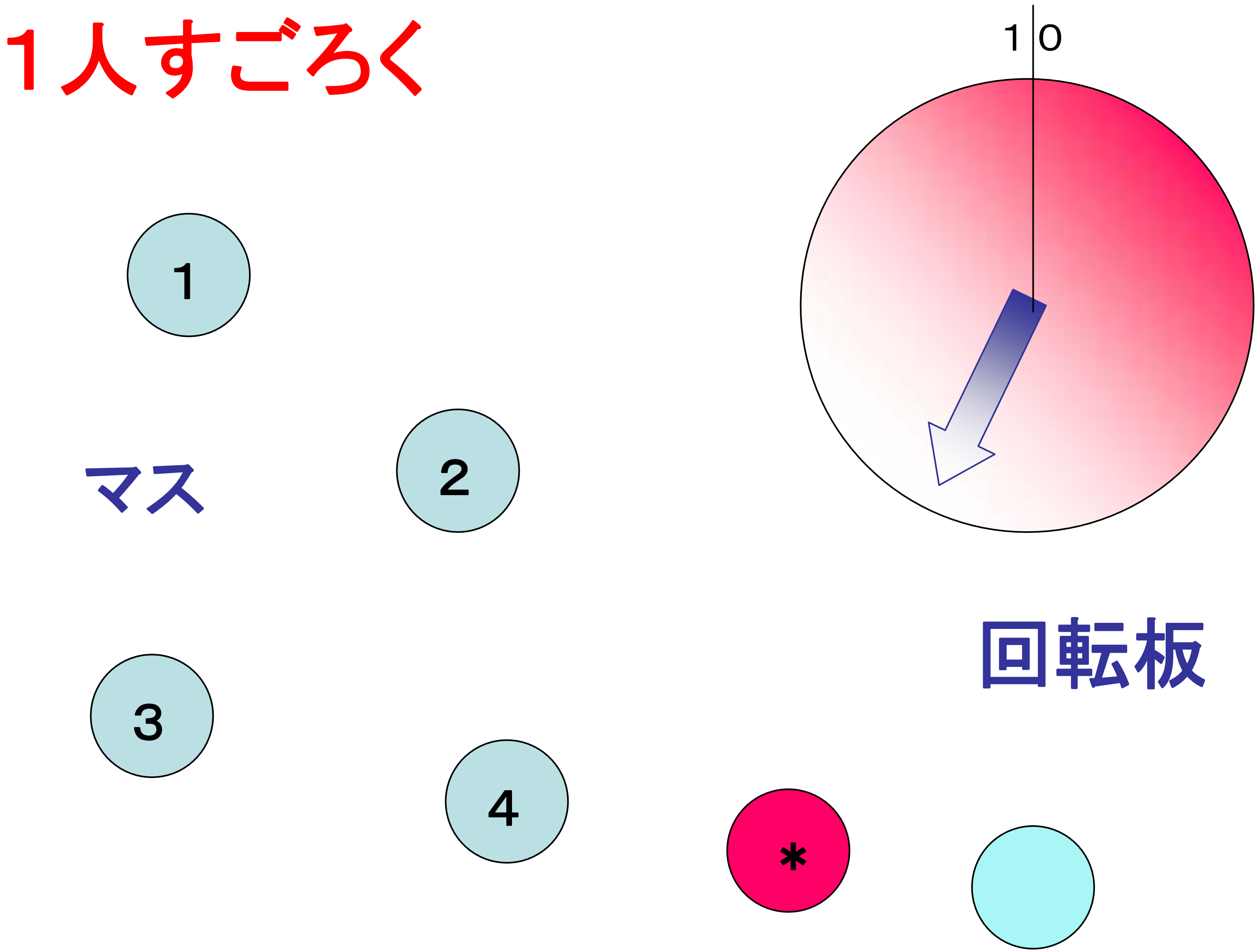


回転板

0.0-0.38が出れば2へ進む

0.38-0.9が出れば5へ進む

0.9-1.0が出ればそのまま動かない


1人すごろく
1
マス
2
3
4
*
1 0
回転板

双六の設計

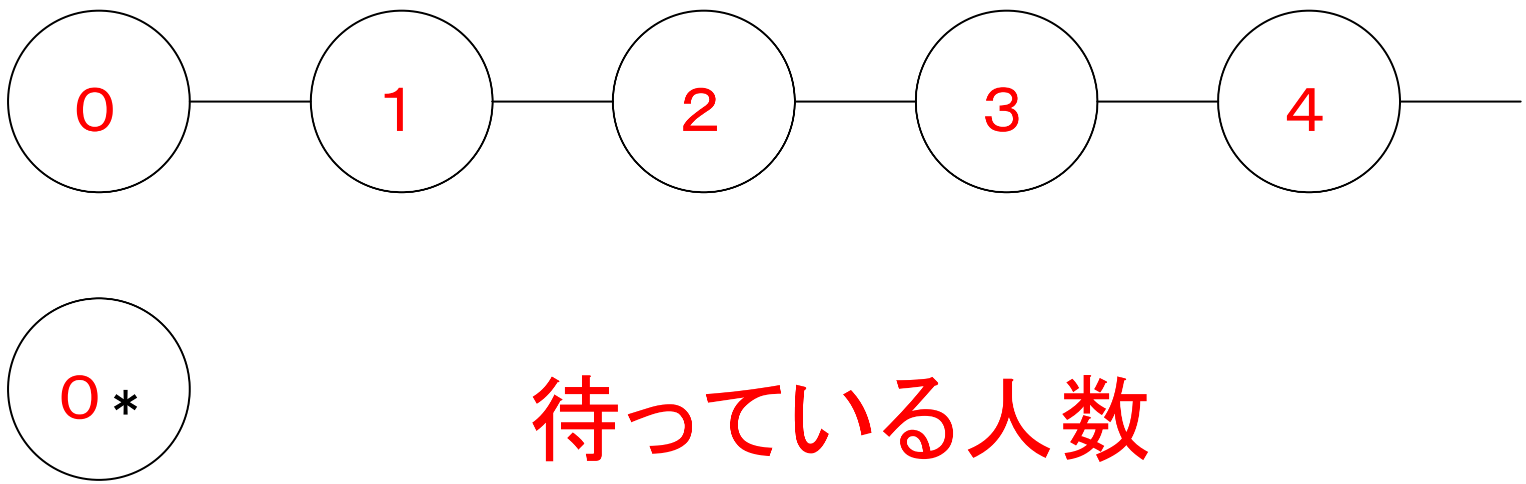
仮定をまず整理

モデルＩ
レジでのサービスにかかる時間は１（単位時間）

Ｉ－１　レジが１台の場合

双六盤の設計

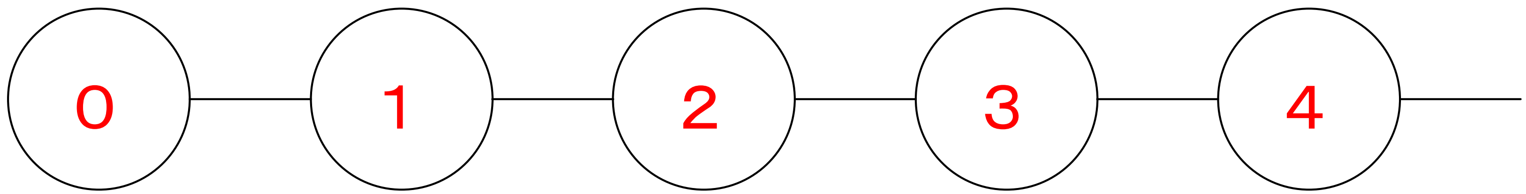
待ち行列　I　双六



待っている人数

*サービスを受けている人がいない

待ち行列　Ⅰ　双六



待っている人数

単位時間に何人の人がレジにやってくるか

来る人数	0	1	2	3
確率	0.5	0.3	0.1	0.1

双六のルール

［０］ → ［０］ 0.8 の確率
［１］ 0.1 の確率
［２］ 0.1 の確率

［１］ → ［０］ 0.5 の確率
［１］ 0.3 の確率
［２］ 0.1 の確率
［３］ 0.1 の確率

［2］	→	［1］	0.5	の確率
		［2］	0.3	の確率
		［3］	0.1	の確率
		［4］	0.1	の確率

$x \geqq 1$

［x］	→	［x－1］	0.5	の確率
		［x］	0.3	の確率
		［x＋1］	0.1	の確率
		［x＋2］	0.1	の確率

Ｉ－１　双六

単位時間に何人の人がレジにやってくるか

来る人数	0	1	2	3
確率	0.5	0.3	0.1	0.1

双六のルール　　　　　　ルーレット

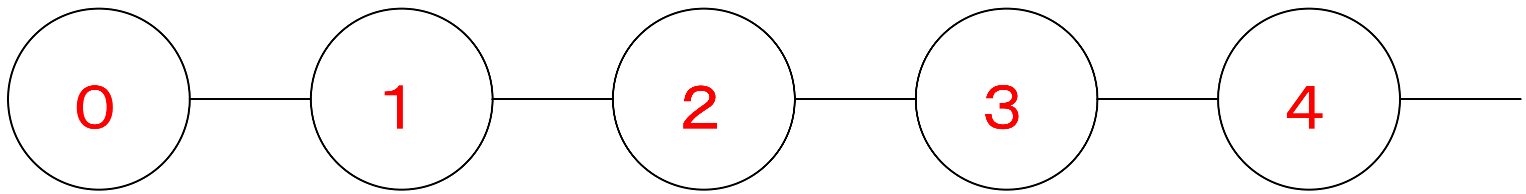
［０］	→	［０］	0.8　の確率	0.0 ～ 0.8
		［１］	0.1　の確率	0.8 ～ 0.9
		［２］	0.1　の確率	0.9 ～ 1.0
［１］	→	［０］	0.5　の確率	0.0 ～ 0.5
		［１］	0.3　の確率	0.5 ～ 0.8
		［２］	0.1　の確率	0.8 ～ 0.9
		［３］	0.1　の確率	0.9 ～ 1.0

［２］	→	［１］	0.5	の確率	0.0 ～ 0.5
		［２］	0.3	の確率	0.5 ～ 0.8
		［３］	0.1	の確率	0.8 ～ 0.9
		［４］	0.1	の確率	0.9 ～ 1.0

$x \geqq 1$

［x］	→	［x − 1］	0.5	の確率	0.0 ～ 0.5
		［x］	0.3	の確率	0.5 ～ 0.8
		［x ＋ 1］	0.1	の確率	0.8 ～ 0.9
		［x ＋ 2］	0.1	の確率	0.9 ～ 1.0

待ち行列　Ｉ（２台）双六



待っている人数

Ⅰ－２　レジが２台の場合

双六盤の設計　双六のルール　ルーレット

［０］	→	［０］	0.9	の確率	0.0 ～ 0.9
		［１］	0.1	の確率	0.9 ～ 1.0
［１］	→	［０］	0.8	の確率	0.0 ～ 0.8
		［１］	0.1	の確率	0.8 ～ 0.9
		［２］	0.1	の確率	0.9 ～ 1.0
［２］	→	［０］	0.5	の確率	0.0 ～ 0.5
		［１］	0.3	の確率	0.5 ～ 0.8
		［２］	0.1	の確率	0.8 ～ 0.9
		［３］	0.1	の確率	0.9 ～ 1.0

ｘ ≧ ２

［ｘ］	→	［ｘ－２］	0.5	の確率	0.0 ～ 0.5
		［ｘ－１］	0.3	の確率	0.5 ～ 0.8
		［ｘ］	0.1	の確率	0.8 ～ 0.9
		［ｘ＋１］	0.1	の確率	0.9 ～ 1.0

モデルⅡ
お客さんが２種類
レジでのサービスにかかる時間は１又は２

Ⅱ－１　レジが１台の場合

双六盤の設計

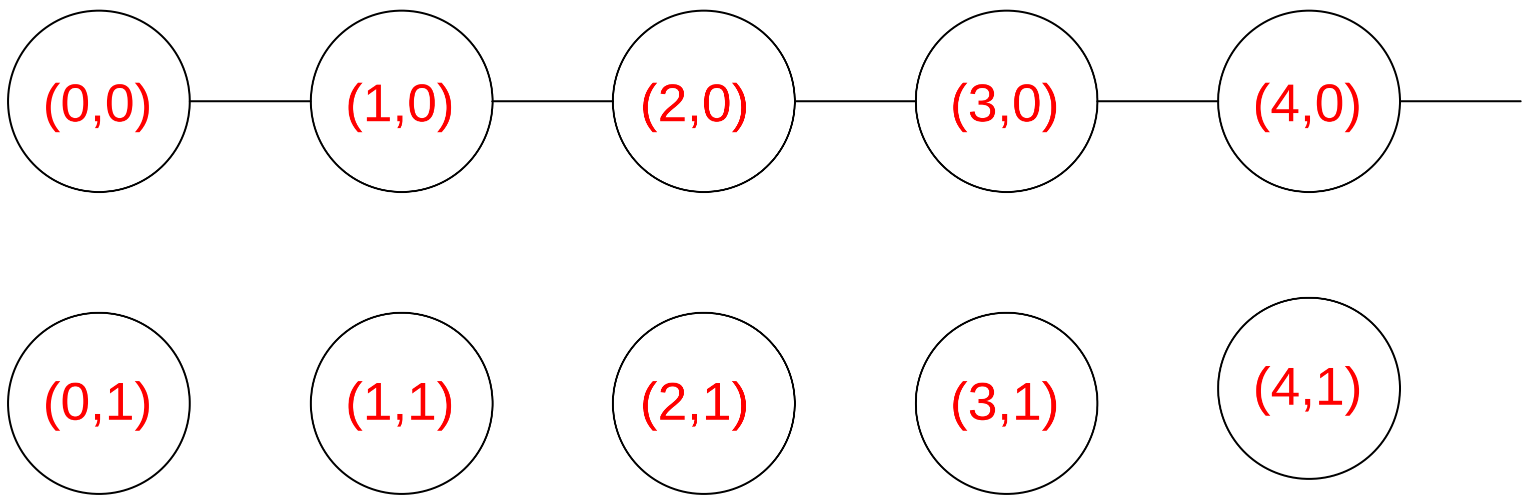
単位時間に何人の人がレジにやってくるか

来る人数	0	1	2	3
確率	0.5	0.3	0.1	0.1

客のレジでかかる時間が　１　確率　0.9
２　確率　0.1
（ 列の長さと関係ない　）

待ち行列　Ⅱ　双六

（レジ1台,2種類の客）



(待ち人数,レジ内状態）

双六のルール

$$
\begin{array}{llll}
[\,0\,,0\,] & \longrightarrow & [\,0\,,0\,] & 0.5 + 0.3 \times 0.9 \\
 & & [\,0\,,1\,] & 0.3 \times 0.1 \\
 & & [\,1\,,0\,] & 0.1 \times 0.9 \\
 & & [\,1\,,1\,] & 0.1 \times 0.1 \\
 & & [\,2\,,0\,] & 0.1 \times 0.9 \\
 & & [\,2\,,1\,] & 0.1 \times 0.1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
[\,0\,,1\,] & \longrightarrow & [\,0\,,0\,] & 0.5 \\
 & & [\,1\,,0\,] & 0.3 \\
 & & [\,2\,,0\,] & 0.1 \\
 & & [\,3\,,0\,] & 0.1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lclc}
[\,1\,,0\,] & \rightarrow & [\,0\,,0\,] & 0.5\ \times\ 0.9 \\
 & & [\,0\,,1\,] & 0.5 \times 0.1 \\
 & & [\,1\,,0\,] & 0.3 \times 0.9 \\
 & & [\,1\,,1\,] & 0.3 \times 0.1 \\
 & & [\,2\,,0\,] & 0.1 \times 0.9 \\
 & & [\,2\,,1\,] & 0.1 \times 0.1 \\
 & & [\,3\,,0\,] & 0.1 \times 0.9 \\
 & & [\,3\,,1\,] & 0.1 \times 0.1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lclc}
[\,1\,,1\,] & \rightarrow & [\,1\,,0\,] & 0.5 \\
 & & [\,2\,,0\,] & 0.3 \\
 & & [\,3\,,0\,] & 0.1 \\
 & & [\,4\,,0\,] & 0.1
\end{array}
$$

Ⅰ　双六

来る人数	0	1	2	3
確率	0.5	0.3	0.1	0.1

レジが１台

並んでいる人数　≧　１　の時は

並んでいる人の人数は平均して

（-1）× 0.5 + 0 × 0.3 + 1 × 0.1 + 2 × 0.1 = - 0.2 人

ずつ減っていく

（大数の法則）列が非常に長くなった時には

それから時間が n （長い時間）たつと

列の長さが大体　0.2 n 人ほど短くなる

レジが２台

列が非常に長くなった時にはそれから時間が n たつと

列の長さが大体　1.2 n 人ほど短くなる

長い時間たつと列はどのくらいの長さとなるのか

Ｉのモデル　：　解析的に計算可能

レジが１台

平均は　（１ × 0.1 ＋ 3 × 0.1）/（1- 0.8） = 2.0

並んでいる人数	確率	確率の累計
0	0.4	0.4
1	0.16	0.56
2	0.144	0.704
3	0.0896	0.7936
4	0.04	0.8336

レジが２台

平均は　　　　約 0.016

並んでいる人数	確率	確率の累計
0	0. 9844	0. 9844
1	0.0153	0.9987

モデルⅡ　　も解析的に解けないことはないが
かなり面倒

　一般には解析的に解くことは難しい
モンテカルロ・シミュレーションで求める

離散時間のマルコフ過程の数学的な整理

マスの全体 S　双六盤

x, y マス

コマが x にいる時、次にコマが y に移動する確率 $p(x,y)$ とする　双六のルール

$p(x,y)$ の持つべき性質

$p(x,y) \geqq 0$

$$\sum_{y \in S} p(x,y) = 1$$

S 及び $p(x,y)$ が上記の性質も持てば双六が設計される

静的なマルコフ過程の表現

動的な表現

「さいころ」もしくは「ルーレット」の「目」「値」Z　と表そう

第 1 回目に「ルーレット」を回した結果 Z_1

第 2 回目に「ルーレット」を回した結果 Z_2

第 3 回目に「ルーレット」を回した結果 Z_3

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

第 n 回目に「ルーレット」を回した結果 Z_n

$Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ は「確率変数」：　偶然により値が決まるもの

それらは「独立」

双六の規則

マス x にいる時、「ルーレット」の値が Z ならばコマ y へ進む

$(x, Z) \to y$　　y は (x, Z) の関数 $y = F(x, Z)$

最初　（時刻 0) 出発点 マス x_0

次 (時刻 1) にはマス $x_1 = F(x_0, Z_1)$ にいる

その次 (時刻 2) にはマス $x_2 = F(x_1, Z_2)$ にいる

その次 (時刻 3) にはマス $x_3 = F(x_2, Z_3)$ にいる

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

時刻 n にはマス $x_n = F(x_{n-1}, Z_n)$ にいる

x_n は実は「確率変数」であるので、X_n で表す

X_n は逐次、以下の式で定まる

$$X_0 = x_0, \qquad X_{n+1} = F(X_n, Z_{n+1})$$