確率微分方程式

の

アイデア

連続に変化する確率過程

株価のグラフ

株は連続的に取引されているわけではない

しかし、短い時間に大量に取引される

時間に単位があるわけではない

連続時間で変化する確率過程で近似的に表現する

その方が取り扱いやすい

時間を連続にして　連続に変化する確率過程　は

どのように記述するのか？

ブラウン運動

ランダムウォークの「極限」

ランダムウォーク

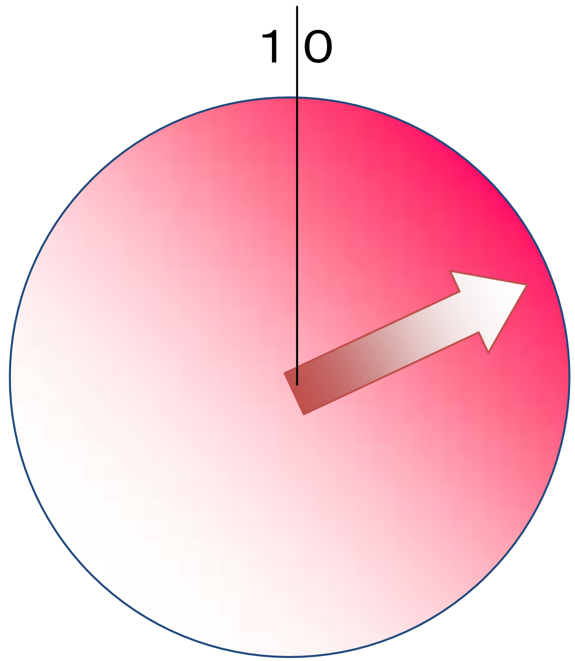
双六

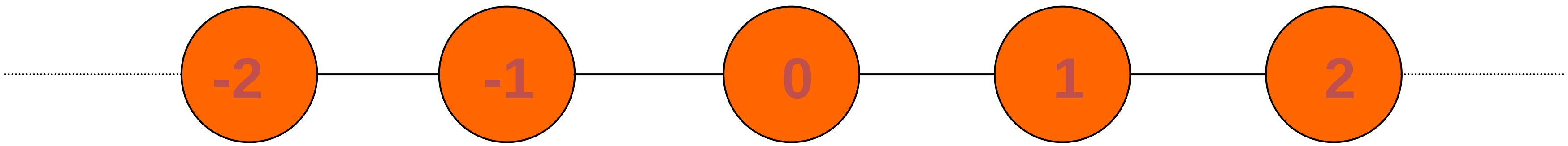
双六盤　整数の全体　$\mathbb{Z}$

ｘ　→　ｘ＋１　　１／２　の確率

ｘ－１　　１／２　の確率

ランダムウォーク

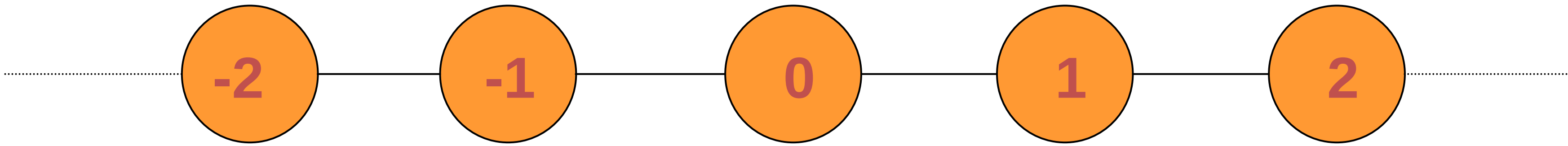




0.0-0.5 が出たら右へ一つ移動

0.5-1.0 が出たら左へ一つ移動

ランダムウォーク



$x \to x+1$　½ の確率

$x \to x-1$　½ の確率

ランダムウォーク

コマの振り出しの位置　　x 整数
時刻 n における　コマの位置 X_n
（ n 回進んだ時のコマの位置）

整数 y を一つ決め
$p(n,x,y)$ を $X_n = y$　となる確率とする

$p(n+1,x,y)$　$X_{n+1} = y$ となる確率
$X_1 = x-1$ となる確率　$1/2$
$X_1 = x+1$ となる確率　$1/2$
X_{n+1}:　X_1　から出発して n 回進んだ　マスの位置でもある

$$p(n+1,x,y) = (1/2)\ (p(n,x+1,y)+p(n,x-1,y))$$

整数上で定義された関数 f

時刻 n における $f(X_n)$ の平均値 $u(n, x)$

$f(y) \times p(n, x, y)$ （$X_n = y$となる確率）の y についての和

$$u(n+1, x) = (1/2)(u(n, x+1)+u(n, x-1))$$

平均量（統計量）の従う方程式

書き換えた差分方程式

$$u(n+1, x) - u(n, x)$$
$$= (1/2)((u(n, x+1) + u(n, x-1) - 2u(n, x))$$

この方程式がすごろくの規則を決定している

一般の離散時間のマルコフ過程

マスの全体 S　双六盤

x, y マス

コマが x にいる時、次にコマが y に移動する確率 $p(x, y)$ とする　：　双六のルール

平均量（統計量）の従う方程式

$u(n+1, x)$

$=$　$p(x, y)u(n, y)$ の y についての和

ランダムウォークの動的な表現

$Z_n,\, n = 1, 2, 3, \ldots$

$Z_n = \pm 1$ となる確率 $1/2$

$Z_n,\, n = 1, 2, 3, \ldots,$ は「独立」　　（コイン投げ）

$$X_0 = x, \qquad X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$F(x, z) = x + z, \qquad X_{n+1} = F(X_n, Z_{n+1})$$

$$Z_n \text{ の平均 } = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$$

$$Z_n^2 = 1$$

[大数の法則]

$n \to \infty$ の時

$$\frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) \to 0 \quad \text{平均}$$

(Jacob Bernoulli (1713))

[中心極限定理]

$n \to \infty$ の時

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) \to \quad \text{平均 0 分散 1 の正規分布}$$

(A. de Moivre (1733))

大数の法則

中心極限定理

確率論で最も重要な定理

どのようなものか

日本の男女出生比率

	出生数(男)	出生数(女)	比率
1951	1,094,641	1,04,3048	1.049463687
1955	889,670	841,022	1.057843909
1960	824,761	781,280	1.055653543
1970	1,000,403	933,836	1.071283395
1975	979,091	922,349	1.061519013
1980	811,418	765,471	1.060024482
1985	735,284	696,293	1.055997978
1990	626,971	594,614	1.054416815
1995	608,547	578,517	1.051908587
2000	612,148	578,399	1.058348994
2005	545,032	517,498	1.053206003
2010	550,742	520,562	1.057975803
2011	538,271	512,535	1.050213156
2012	531,781	505,450	1.052094174

Graunt(1620-74)「観察論」(1662)

男女出生数　男１４ 女１３の割合
（ １４／１３ ＝ 1.076923 ）

死亡秩序（→ 生命表 ）
人口の移動状況

等々を見いだす

政治算術 Political Arithmetick
大数を観察したとき秩序を知ることができる
頻度の安定性 ： 大数の法則

何故、大数の法則が成り立つか？
神の与えた秩序

Jacob Bernoulli の示した数学的な結果

$Y_n, n = 1, 2, 3, \ldots,$ は「独立」な確率変数

$Y_n = y$ となる確率が p $(0 < p < 1)$ とする

この時、$k = 1, \ldots, n$ の内、 $Y_k = y$ となる k の個数 R_n とすると（R_n は確率変数）どのような $\varepsilon > 0$ に対しても

$$|\frac{R_n}{n} - p| < \varepsilon \text{となる確率} \to 1, \qquad n \to \infty$$

となる

もし、生まれてくる子供が男子であるか女子であるかという事象が独立であり、男子の産まれる確率が p 女子の産まれる確率が q $(p+q=1)$ であれば, 子供が n 人生まれた時の男女出生比率は n が非常に大きければ

$$(\text{男女出生比率}) = \frac{n\ \text{人の中の男子の数}/n}{n\ \text{人の中の女子の数}/n} \sim \frac{p}{q}$$

統計学の基礎は「神の秩序」ではなく「確率論」である
従って、確率論に基づき検証される必要がある

19 世紀に確定する概念のきっかけを作った業績

先ほどの結果は

$$\frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$$

$$= \frac{1}{n}(Z_k = 1 \text{ となる } k = 1, 2, \ldots, n \text{ の個数})$$

$$-\frac{1}{n}(Z_k = -1 \text{ となる } k = 1, 2, \ldots, n \text{ の個数})$$

であるので

$$|\frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)| < \varepsilon \text{となる確率} \to 1$$

「中心極限定理」

$k = (Z_i = 1$ となる $i = 1, 2, \ldots, n$ の数$)$ とおくと

$$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = k - (n - k) = 2k - n$$

$p_{n,k} =$ 「$(Z_i = 1$ となる $i = 1, 2, \ldots, n$ の数$)$ が k となる確率」

$$p_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{1}{2})^n$$

James Stirling (1692-1770) による公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

e はネイピア数 $2.71828\ldots$

$$c_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\, n^n e^{-n}} \to \sqrt{2\pi}, \qquad n \to \infty$$

$$p_{n,k} = \underline{\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}(\frac{1}{2})^n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \frac{c_n}{c_k c_{n-k}}$$

$$-\frac{1}{n}\log_e(\underline{\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}(\frac{1}{2})^n})$$

$$= \frac{1}{n}(k\log_e k + (n-k)\log_e(n-k) - n\log_e n) + \log_e 2 = h(\frac{k}{n}) + \log_e 2$$

ただし、h はエントロピー関数とも呼ばれるもので

$$h(x) = x\log_e x + (1-x)\log_e(1-x), \qquad 0 < x < 1$$

$$h''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$$

$h'(1/2) = 0,\ h(1/2) = -\log_e 2,\ h''(1/2) = 4$

$$h(x) + \log_e 2 \sim 2(x - \frac{1}{2})^2, \qquad x = \frac{1}{2} \text{ の付近 (Taylor 展開)}$$

$$p_{n,k} = \frac{c_n}{c_k c_{n-k}} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{k/n}\sqrt{1-(k/n)}} e^{-n(h(k/n)+\log_e 2)}$$

$|k/n - 1/2| > \varepsilon > 0$ ならば $p_{n,k}$ は　$1/n^2$ 以下 $\Rightarrow$ 大数の法則

$n >> 1$ の時、$k/n = 1/2$ の周辺では

$$p_{n,k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\sqrt{n}} \exp(-2n((k/n)-(1/2))^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\sqrt{n}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{n}}(2k-n))^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) \leqq y \text{ となる確率}$$

$$= \left(\ p_{n,k} \quad の \quad \frac{1}{\sqrt{n}}(2k - n) \leqq y \text{ となる } k \text{ についての和}\right)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{n}}(2k - n)$$

とおくと k が 1 つ大きくなると x は

$$\Delta x = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

だけ増える

$$p_{n,k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \Delta x$$

従って

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) \leqq y \text{ となる確率}$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2} dx$$

平均 0 分散 1 の正規分布の y 以下の確率

特に

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1$$

もわかる

$t \geqq 0,\ h \downarrow 0$ の時

$$h(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{[t/h^2]}) \to \quad \text{平均 0 分散 } t \text{ の正規分布}$$

ただし $[t/h^2]$ は t/h^2 以下の最大の整数

$$X_h(t) = h(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{[t/h^2]})$$

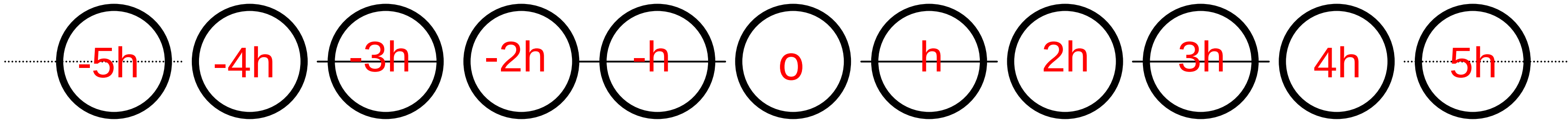
とおくと (変形ランダムウォーク)

$h \downarrow 0$ の時、確率過程 X_h は「ブラウン運動」に収束する

と考えた人たちがいた

(正当化は　M. Donsker (1952) によって与えられた)

変形ランダムウォーク



$x \to x+h$ ½ の確率

$x \to x-h$ ½ の確率

時間の単位 h^2

マルコフ過程　X_h の平均量の方程式

$$u(t+h^2,x)-u(t,x)=\frac{1}{2}(u(t,x+h)+u(t,x-h)-2u(t,x))$$

書き換えると

$$\frac{1}{h^2}(u(t+h^2,x)-u(t,x))=\frac{1}{2}\frac{u(t,x+h)+u(t,x-h)-2u(t,x)}{h^2}$$

$h\downarrow 0$ とすると

$$\frac{1}{h^2}(u(t+h^2,x)-u(t,x))\to\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)$$

$$\frac{u(t,x+h)+u(t,x-h)-2u(t,x)}{h^2}\to\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

ブラウン運動: ランダムウォークの極限

L. Bachelier (1900)　株価のモデル

A. Einstein (1905)　ブラウン運動　(原子論)

彼らが導いたのは偏微分方程式（平均量の方程式）

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

実際の「確率過程」を構成したわけではない！

N. Wiener (1923)：**関数空間**上の**測度**を構成

1 本 1 本のブラウン運動の軌道の記述

20 世紀初頭に H. Lebesgue が測度論を構築することで可能となった

ブラウン運動（ランダムウォークの極限）をノイズで表現したい

L. Bachelier,　P. Lévy　らの試み

$\xi_t,\, t \geqq 0$, 独立で

$\xi_t = \pm 1$ となる確率 1/2

Bachelier

$$X(t) = \int_0^t \xi_u du$$

がブラウン運動となると主張

しかし、形式的には

$$\int_0^t \xi_u du = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t}{n}\, \xi_{kt/n} = 0 \quad (\text{ 大数の法則 })$$

となりダメ

Lévy

$$X(t) = \int_0^t \xi_u \sqrt{du}$$

がブラウン運動となると主張

形式的には

$$\int_0^t \xi_u \sqrt{du} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{t}{n}} \xi_{kt/n}$$

$=$ 平均 0, 分散 t の正規分布 (中心極限定理)

となり、これはもっともらしいが $\sqrt{du}$ による積分に意味がつかない

Lévy の考えは他の数学者に受け入れられなかった

If $X(t)$ is written in the form

$$X(t) = \int_0^1 \xi_u \sqrt{du}\,,$$

the integral I becomes

$$I = \int_0^1 dt \int_0^t \xi_u \sqrt{du} \int_0^t \xi_v \sqrt{dv} = \int_0^1 \int_0^1 [1 - \max(u,v)] \xi_u \xi_v \sqrt{du dv}\,, [\ldots].$$

Paul Lévy (1951) Wiener's Random Function, and Other Laplacian Random Functions, in *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (ed. Jerzy Neyman, Berkeley and Los Angeles: University of California Press), 171-187, p.176.

もっと一般の連続的に変化するマルコフ過程

Kolmogorov　(1931)　のアイデア

空間：直線（多次元化は容易)

すなわち　マス　:　　x すべての実数

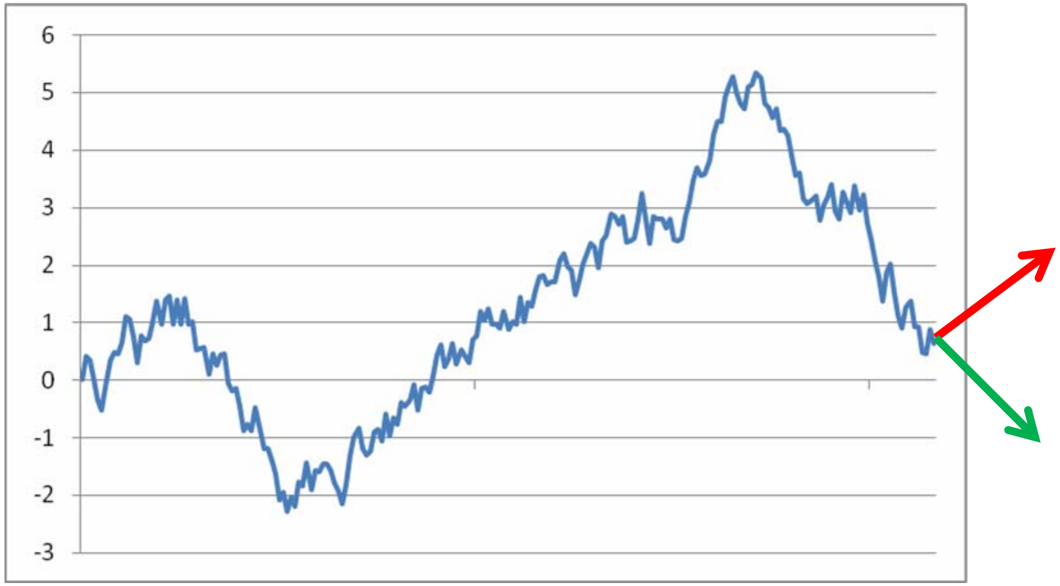
マス x から dt 時間後に動く先のマス y

y の分布は平均 $x+b(x)dt$, 分散 $\sigma(x)^2dt$

位置に依存している!

平均量の従う拡散方程式を数学的議論の下で導く

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\frac{1}{2}\sigma(x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)+b(x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)$$


6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3

Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

A. Kolmogoroff

Mathematische Annalen, Band 104, Heft 1, 415–458

伊藤 (1942)

ブラウン運動の増分 dB_t を基礎にとる

$$X_t \longrightarrow X_{t+dt} = X_t + \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$$

ブラウン運動：すごろくにおけるさいころの役割

確率微分方程式

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$$

「微分」は形式的なもの

確率積分方程式ととらえる

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds$$

伊藤 (1942) で示されたこと

確率積分の定義

確率微分方程式の解の存在と一意性

Kolmogorov の拡散方程式の導出

複雑な議論が必要

1951　**伊藤の公式** の発見

国田-渡辺（1967）確率積分の一般化

$\Downarrow$

Meyer, ストラスブルグ学派

伊藤の公式

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t \frac{df}{dx}(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dx^2}(B(s))ds$$

普通の置換積分の公式

$$f(x(t)) = f(0) + \int_0^t \frac{df}{dx}(x(s))x'(s)ds$$

Taylor 展開

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df}{dx}(x)h + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x)h^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3 f}{dx^3}(x)h^3 + \cdots$$

伊藤の公式で形式的に t についての微分をとると

$$d(f(B(t))) = \frac{df}{dx}(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(B(t))dt$$

Tayler 展開の公式と比較すると、形式的に

$$dB(t)^2 = dt, \qquad dB(t)^3 = 0$$

となることがわかる

$dB(t)$ の分布は平均 0, 分散 dt の正規分布

何故 $dB(t)^2 = dt$ となるか?

Lévy のアイデアを思い出すと

$$\xi(t)^2 = 1, \qquad (\xi(t)\sqrt{dt})^2 = dt$$

伊藤の公式は Lévy の直観を取り込んでいることになる。

伊藤の確率積分の定義

$$\int_0^t f(B(s))dB(s) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{[nt]} f(B(\frac{k-1}{n}))(B(\frac{k}{n}) - B(\frac{k-1}{n}))$$

他にも、確率積分の定義として

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{[nt]} f(B(\frac{k}{n}))(B(\frac{k}{n}) - B(\frac{k-1}{n}))$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{[nt]} f(B(\frac{1}{2}(\frac{k}{n} + \frac{k-1}{n})))(B(\frac{k}{n}) - B(\frac{k-1}{n}))$$

なども考えられる

しかし、伊藤の定義以外はうまくいかない

（ f が滑らかであれば、３つとも存在するが、極限はすべて異なる）