指数関数と微分方程式

大学院数理科学研究科
儀我 美一

第1回　2014年6月12日（木）

内容

0. はじめに
1. 複利と指数関数
2. 残留放射性物質等を記述する方程式の抽象化
3. 抽象論で微分方程式を解くには

0. はじめに

数学に対する通常のイメージ？

- ▶ A. 数や計算の学問、算術
- ▶ B. 物理の隣にある自然科学の一分野
- ▶ C. 答えが一つの学問
- ▶ D. 奇人変人のなす学問／
一部の天才たちの学問／
一般社会とは関係が少ない

〈我が国の場合、社会をリードする人、
　また科学者でも、このような認識の人が多い〉

▶ 誤解Aに対して

数学とその研究の特徴

現在も大きく進歩発展している学問
（新分野の創設、新学術雑誌の刊行、…）

汎用性　どの分野にも**適用可**

普遍性　**ひとたび証明されれば、覆されることがない**
新概念の創造／大発見の例：虚数、確率積分、カオス…
原理的には万人が検証可能

自由かつ公正

個人でも研究可能、2～3名の共同研究も多い、
小さい大学や数学科以外にも世界をリードしている研究者がいる

- **老若男女、経験を問わない；長いタイムスケール；寄与者が明確**
- **権威と無関係（将棋・碁のように）；完成品の美しさ（芸術性）**
- **芸術のように個性を発揮できる**

アメリカ数学会発行のMathematical Reviews（数学評論）による数学分野の分類

00 一般
01 歴史と伝記
03 数理論理及び数学基礎論
05 組合せ論
06 順序，束，順序代数構造
08 一般代数系
11 数論
12 体論と多項式
13 可換環と可換代数
14 代数幾何学
15 線形と多重線形代数; マトリックス理論
16 結合的環と代数
17 非結合的環と代数
18 カテゴリー論，ホモロジー代数
19 K理論
20 群論とその一般化
22 位相群，リー群
26 実関数
28 測度と積分
30 複素一変数関数
31 ポテンシャル論
32 複素多変数関数と解析空間
33 特殊関数
34 常微分方程式
35 偏微分方程式
37 力学系・エルゴード理論
39 差分方程式と関数方程式
40 列，級数，総和可能性
41 近似と展開
42 フーリエ解析
43 抽象調和解析
44 積分変換，演算子法
45 積分方程式
46 関数解析
47 作用素論
49 変分法，最適制御，最適化
51 幾何学
52 凸幾何と離散幾何
53 微分幾何学
54 一般位相空間論
55 代数的位相幾何学
57 多様体と胞複体
58 大域解析，多様体上の解析
60 確率論と確率過程
62 統計学
65 数値解析
68 計算機科学
70 質点と質点系の力学
74 変形可能な固体力学
76 流体力学
78 光学，電磁気学
80 古典的熱力学，熱の移動
81 量子論
82 統計力学，物質の構造
83 相対論と重力理論
85 天文学と宇宙物理学
86 地球物理学
90 OR理論，数理計画法
91 ゲーム理論，経済学，社会科学および行動科学
92 生物学およびその他の自然科学
93 システム理論，制御
94 情報と通信，回路
97 数学教育

The 2000 Mathematics Subject Classification, by editors of Mathematical Reviews and Zentralblatt fur Mathematik. http://www.ams.org/msc/pdfs/classifications2000.pdf (Japanese translation by Department of Mathematics, Hokkaido University)

▶ 誤解Bに対して

確かに物理を研究するのには欠かせないが、科学・工学・技術を記述するための**共通言語**。

数学は理系のためだけのものではなく、いわゆる文系にも欠かせない。

「文系だから数学をやらなくてよい、少なくてよい」は完全に間違い。勉強すべき数学が若干異なるだけである。

▶ 誤解Cに対して

　数学は答えがひとつできれいな問題には対応できるが、複雑な世の中の問題には対応できないと考えられていた（特に日本では）。

これは致命的な誤解である。

　どんな複雑な問題でも、これをある程度客観的に扱うには数学は必要。

　また、問題のとらえ方により答えは複数となり得る。

▶ 誤解Dに対して

- 20世紀前半、第２次大戦前までは数学は物理と工学への応用が主で、この傾向は強かった。18世紀までは貴族の遊びの要素も大きかった。
- コンピューターの登場、発達によって数学者が考えていることが通常の人々がわかるように表現できるようになった。
- 経済学をはじめ文系学問に対しての応用も進んだ。

昔： 数学の成果が世に用いられるようになるまでものすごい時間を要した。

例: 確率微分方程式論（伊藤清）

金融工学に用いられる（ブラック･ショールズ、1970年代）まで30年近くかかっている。

数学の直接の社会への応用（他学問を通さない）。

現在： 数学の成果が世に用いられるまで比較的短くなった。

数学をどのくらい社会に生かし、また社会の難問を数学に取りこんでいけるかが、学問だけではなく、産業技術の発展に本質的である。

G.-M. グロイエル / R. レンメルト
G. ルップレヒト 編
（戸瀬信之 / 丸山文綱 訳）
「数学が経済を動かす」 シュプリンガー･ジャパン（2009）

ドイツ企業のトップの話す数学の重要性、
および**数学研究者の必要性**

- 産業にはオリジナルな技術が必要
- 古い機器の刷新と同様に用いられている数学の刷新が必要
- オーダーメードの数学の必要性

……数学研究者の必要性

この電子化の時代に、数学のない経営は物理学のない宇宙旅行と同じです。

（SAP CEO/サービスビジネス）

自動車メーカーにおいて、いや、自動車メーカーだからこそ、最先端の数学抜きには科学技術もイノベーションも成功しない。 （ダイムラーCEO）

現在当社では、ドイツ国内だけで900名の数学者が活躍しています。 （シーメンスCEO）

日本企業版

儀我 美一 / 小林 俊行 編

「数学は役に立っているか？」

シュプリンガー・ジャパン（2010）

　数学は論理を鍛えるのに重要であるということが主体。

　使っている数学そのものを刷新していこうという姿勢はあまり見られない。

数学は抽象的でわかりにくい？

抽象性のゆえの汎用性
抽象化による視野の拡大

1. 複利と指数関数

元金 a、年利率 r とする。

１年後の元利合計は？

答 $a(1+r)$

利息は？

答 ar

単利の場合、m 年後の元利合計は？

- 毎年の利息が ar なので、
  総利息は amr
- 元利合計は $a(1+mr)$

複利の場合、m 年後の元利合計は？

１年後は $a(1+r)=a_1$

２年後は $a_1(1+r)=a_2$ …

答　k 年後の元利合計を a_k とすると、
$(k+1)$ 年後の元利合計 a_{k+1} は
$a_{k+1}=a_k(1+r)$ となる。よって
$a_m=a(1+r)^m$

複利と単利、どちらが元利合計は大きいか？

答　複利のほうが大きい。

本当か？ $(1+r)^m > 1+mr$ は $r>0$ で成立するか？

2項定理

$$(1+r)^m = 1 + {}_mC_1 r + {}_mC_2 r^2 + \cdots + {}_mC_m r^m$$
$$= \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k r^k$$

${}_mC_k$: 組合せの数

（異なるm個のものから異なるk個のものを選ぶ方法の数）

$${}_mC_k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

${}_mC_1 = m$ なので $(1+r)^m > 1 + mr$ は明らか。

元金 a、年利率 r とし、半年複利とする。
１年後の元利合計は？

答

半年後の利率は $\frac{r}{2}$ とするので、半年後の元利合計は

$$a\left(1+\frac{r}{2}\right)$$

１年後は

$$a\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$$

となる。
（利息を元金に繰り入れる回数が２回）

元金 a、年利率 r とし、1か月複利とする。
１年後の元利合計は？

答 $a\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}$

１日複利では $a\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365}$

一般に $365/n$ 日複利とすると、1年後の元利合計は

$$a\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}$$

$\boxed{1}$ 元利合計は n とともに増えるか

$\boxed{2}$ n を増やすと元利合計はいくらでも大きくできるか

$\boxed{1}$ は $q_n = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ としたとき、数列 $\{q_n\}$ が単調増加か、つまり

$$q_n < q_{n+1}$$

かという問題。

$\boxed{2}$ は $\{q_n\}$ が上に有界かどうか、つまり

$$q_n < C$$

がすべての n に対して成立する定数 C（r にはよる）が存在するかという問題。

単調性の証明

２項定理を用いる。

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{r}{n}\right)^k$$

r^kの係数: $\frac{1}{n^k}\,{}_nC_k = \frac{1}{k!}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$は
n に対して単調増加

$$\because\ 1-\frac{h}{n} < 1-\frac{h}{n+1} \qquad (h>0)$$

自然対数の底

定義　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$ を自然対数の底、

あるいはNapier数、Euler数という。

［**実数の公理：**単調な有界列は極限を持つ］
を用いている。

$$e = 2.71828\ldots$$

有界性の証明

$\{q_m\}$ は r について単調増加である。よって $r = m$（自然数）の場合に示せばよい。

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^n = \left(1+\frac{m}{m\ell}\right)^{m\ell} \quad (n = m\ell, \ell \text{自然数})$$

$$= \left(1+\frac{1}{\ell}\right)^{\ell m}$$

よって $r = 1$ の場合に示せばよい。

$\boldsymbol{r = 1}$ の場合の証明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} {}_nC_k \frac{1}{n^k}$$

ここで ${}_nC_k \dfrac{1}{n^k} \leq \dfrac{1}{2^k}$

よって $\displaystyle \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$< 3.$$

歴史

ジョン・ネイピア（17世紀はじめ） 自然対数のいくつかの値を計算

ヤコブ・ベルヌーイ（18世紀はじめ） ネイピア数の発見、複利計算

レオンハルト・オイラー（1727） e を用いる

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x$$

となるとき $a = e$ と定義

[つまり $\frac{d}{dx}a^x = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \left(\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\right)a^x$ なので

$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ となるように定義]

ネイピア
（1550～1617）

ベルヌーイ
（1654～1705）

オイラー
（1707～1783）

指数関数

命題　r を正の有理数とする。

このとき $\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$

$r=\frac{q}{p}$, p,q 自然数とする。ℓ を q の倍数とし、$n=p\ell/q$ と置くと

$$\left(1+\frac{p}{nq}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\ell}\right)^{\ell\, p/q}$$

ここで $\ell\to\infty$ とすると、ベキ関数の連続性により命題が示せる。

[ベキ関数の連続性 $\lim_{z\to a} z^r = a^r$]

指数関数（任意の実数ベキ）

有理数 r について e^r が定義できた。e^r は r について単調であることは明らかである。また少し議論を要するが、r について連続であることがわかる。この結果、一般の正実数 x に対して有理数で近似することにより、e^x が $x > 0$ の連続関数として定義できることがわかる。

要約

1. 年利率 r、元金 a の1年後の元利合計は、$365/m$日複利の m が大きいほうが大きい。つまり利息がつく回数が多いほうが大きい。

2. 年利率 r、元金 a の1年後の元利合計は、１日複利であろうと1時間複利であろうと

$$ae^r$$

を超えることはない。

課題

　100万円に対して毎年1%ずつ残金に対して手数料を取られる場合の10年後の残金と、10年間に1回だけ手数料10%を取られる場合の10年後の残金は、どちらが多いか？

$$\left(1-\frac{0.1}{10}\right)^{10} \lesseqgtr 1-0.1$$

一般に

$$\left(1-\frac{r}{n}\right)^{n}$$

は n に対して単調増加か。ただし $r<1$ とする。