2016 年度 Sセメスター

学術俯瞰講義

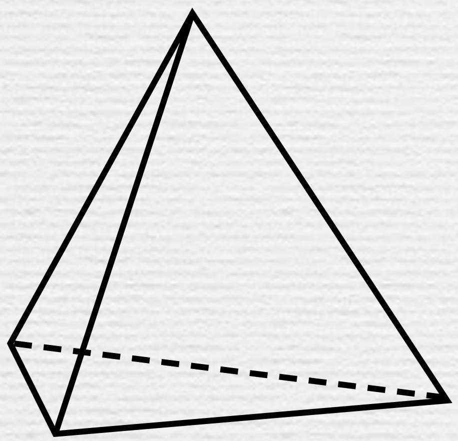
「図形から拡がる数理科学」

金井雅彦

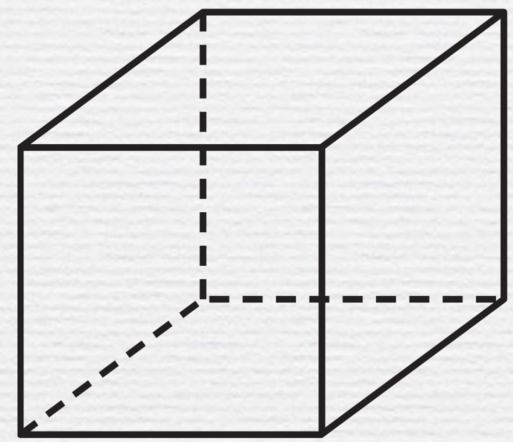
「多面体をめぐって」

第１話：オイラーの公式と正多面体

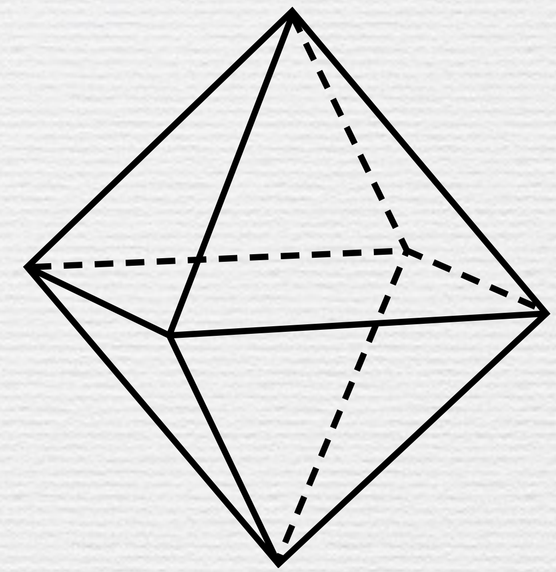
正多面体



正４面体



正６面体＝立方体



正８面体

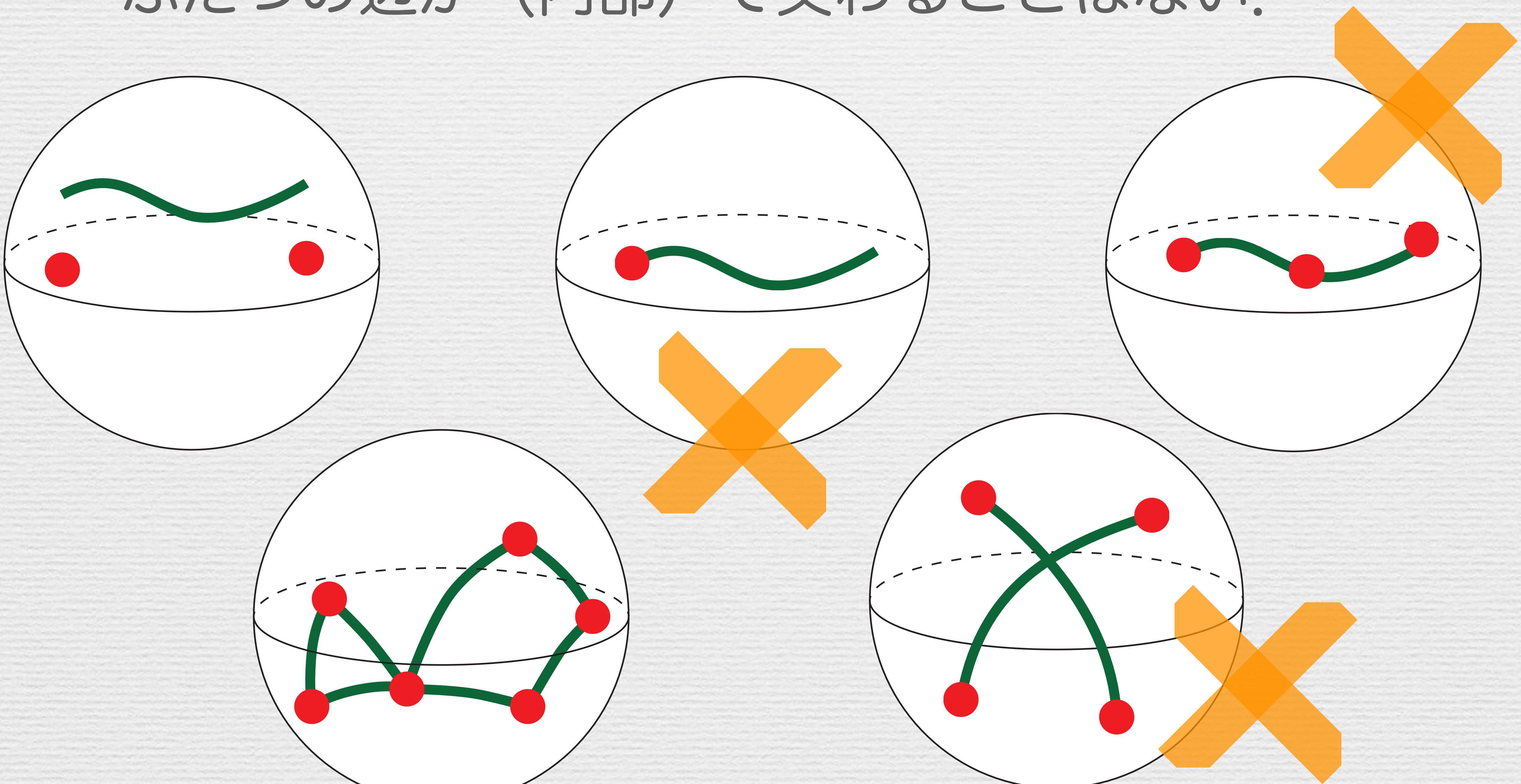
・他にある？

・どれくらいたくさんある？

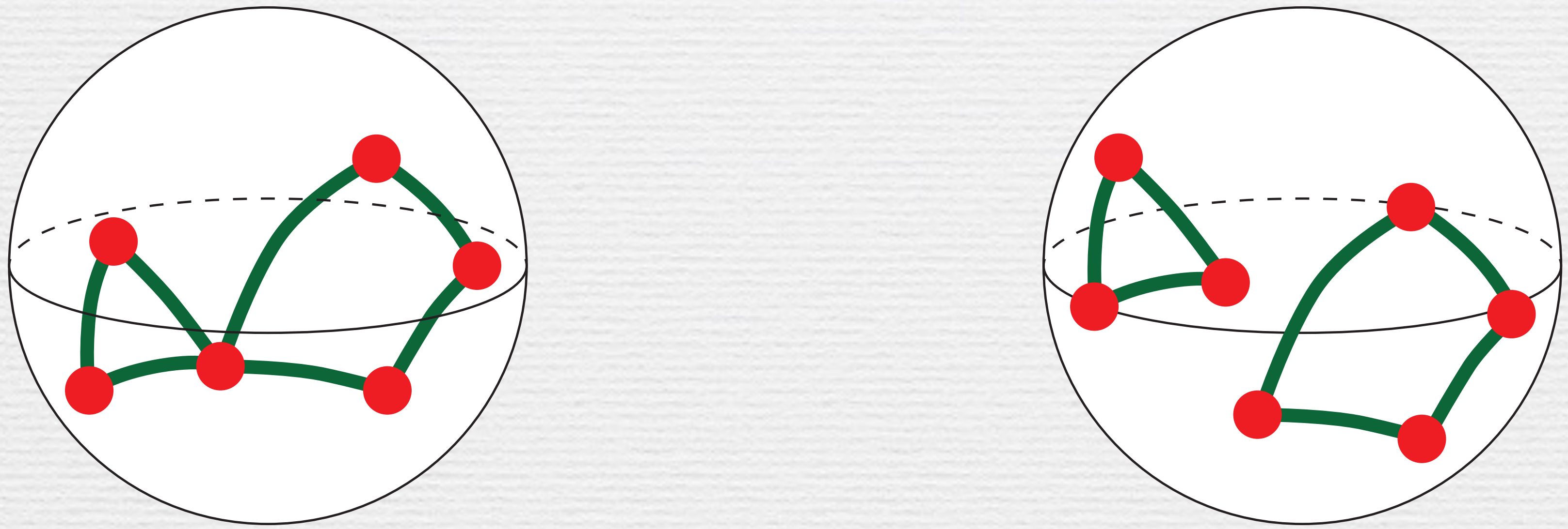
⇐　**オイラーの公式**

球面グラフ　球面上の有限個の点（ **頂点** ）と有限の長さをもつ曲線（ **辺** ）有限個からなる．ただし，

・辺の両端点は頂点でなければならない；
・辺の内部に頂点が乗ってはならない；
・ふたつの辺が（内部）で交わることはない．



グラフが与えられたとき，球面からそのグラフを取り除くことにより得られる図形の各「連結成分」を**面** と呼ぶ.



連結 なグラフ　　　**非連結** なグラフ

オイラーの公式 連結なグラフに対し，その頂点 (vertex), 辺 (edge), 面 (face) の個数をそれぞれ $v,\ e,\ f$ としたとき,

$$v - e + f = 2$$

問題　正多面体を考える.

m　- 各頂点から生えている辺の数

n　- 各面の角数

v　- 頂点の数

e　- 辺の数

f　- 面の数

(1) 以下の等式を示せ.

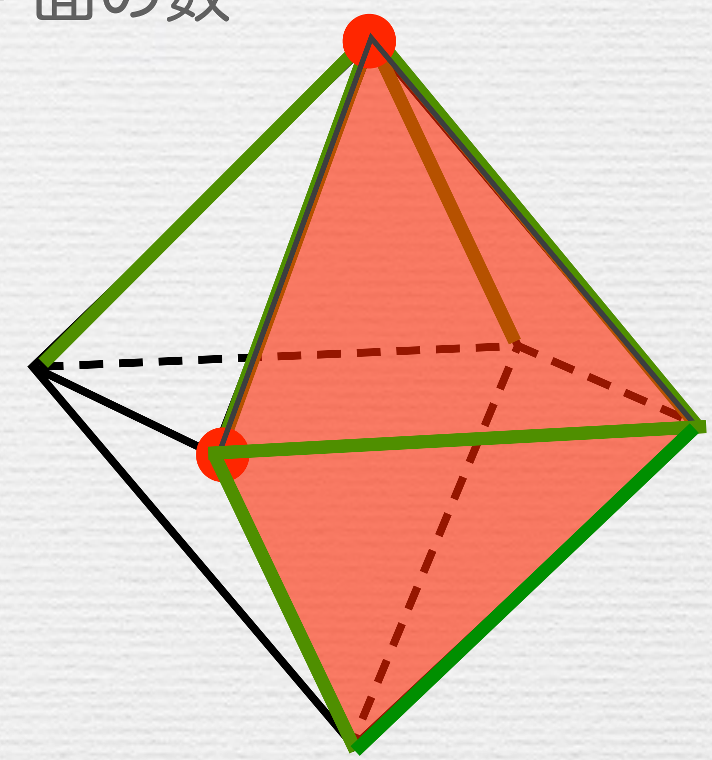
$$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)e=1$$

(2) $m,\ n,\ v,\ e,\ f$ の取り得る値を決定せよ.

解答

m - 各頂点から生えている辺の数
n - 各面の角数

v - 頂点の数
e - 辺の数
f - 面の数



(1) $2e = mv, \quad 2e = nf$

$$\therefore \quad v = \frac{2e}{m}, \quad f = \frac{2e}{n}$$

ここで，正多面体の内部の点を中心とした十分大きな（とくに正多面体を内部に含む）球面をとり，正多面体（の辺）を球面に射影することにより，球面グラフを作る．そのグラフに対するオイラーの公式 $v - e + f = 2$ に代入すれば

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) e = 1$$

解答

m - 各頂点から生えている辺の数
n - 各面の角数

v - 頂点の数
e - 辺の数
f - 面の数

(1) $$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)e=1$$

(2) $m, n \geq 3$ でなければならない.

仮に $m, n \geq 4$ とすると，(1) に矛盾.

よって，$m = 3$ または $n = 3$

m	n	v	e	f
3	3	4	6	4
3	4	8	12	6
4	3	6	12	8
3	5	20	30	12
5	3	12	30	20

m - 各頂点から生えている辺の数

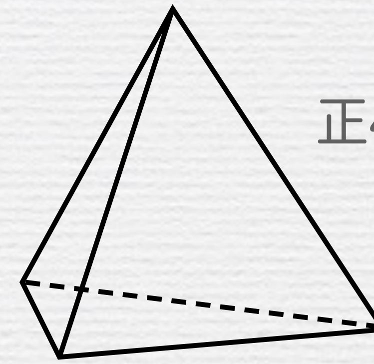
n - 各面の角数

v - 頂点の数

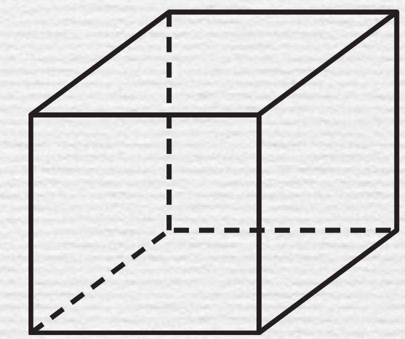
e - 辺の数

f - 面の数

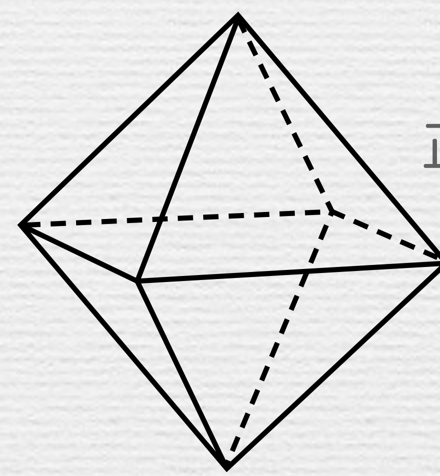
m	n	v	e	f
3	3	4	6	4
3	4	8	12	6
4	3	6	12	8
3	5	20	30	12
5	3	12	30	20



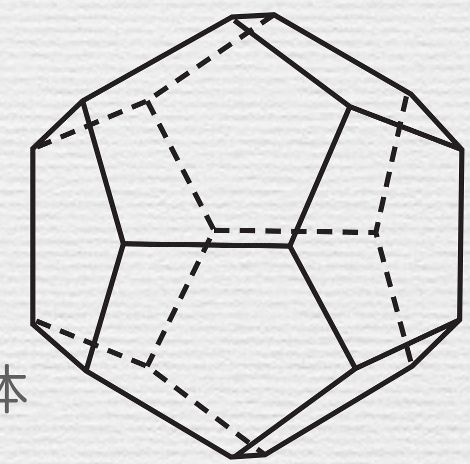
正4面体



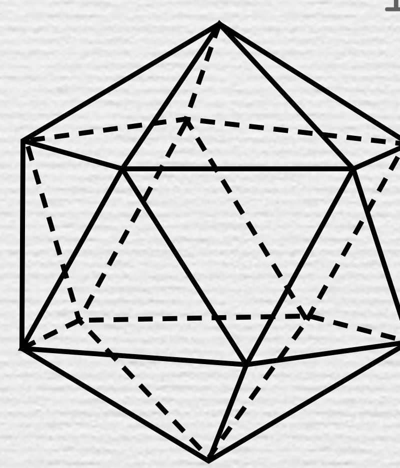
正6面体



正8面体



正12面体



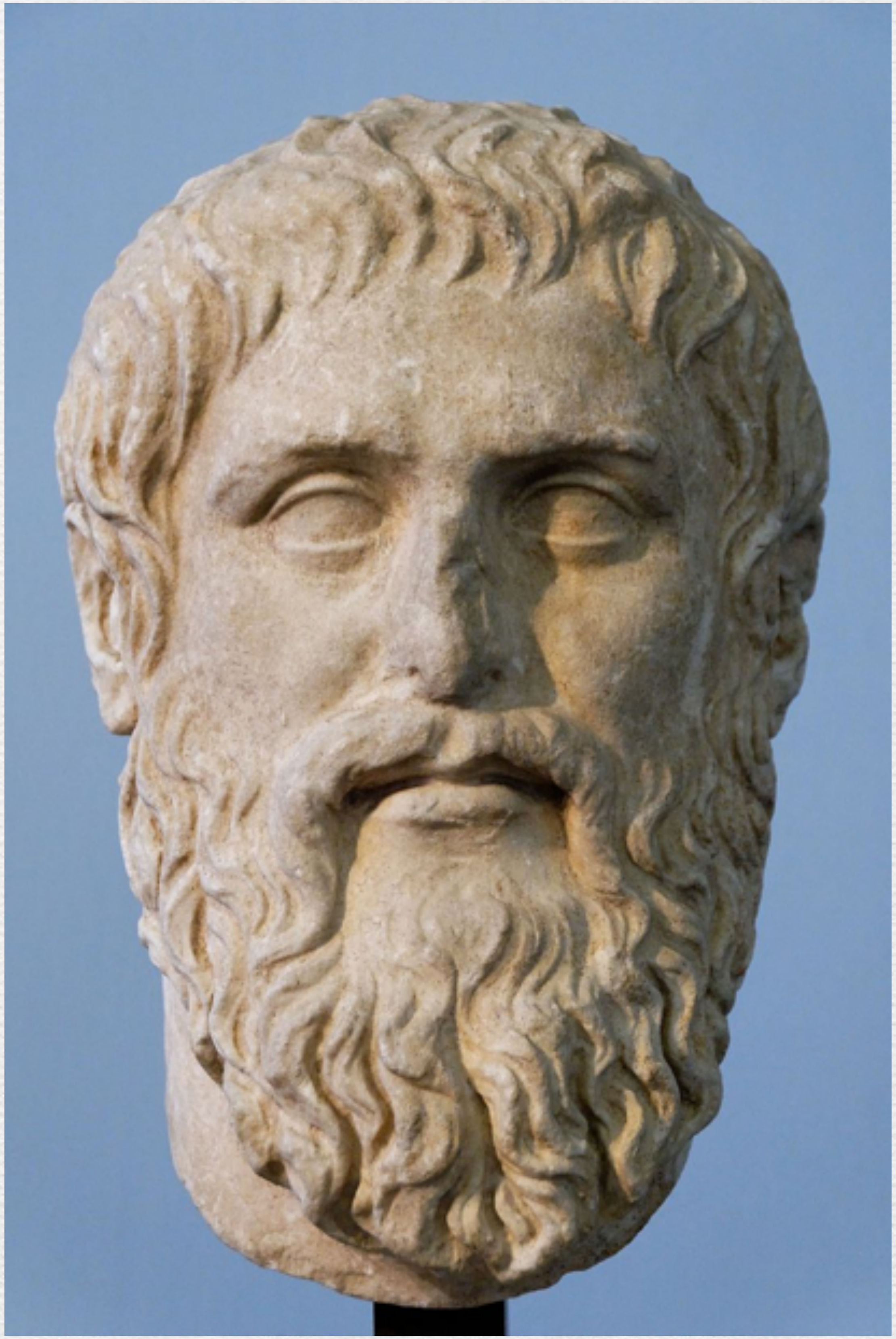
正20面体

プラトン

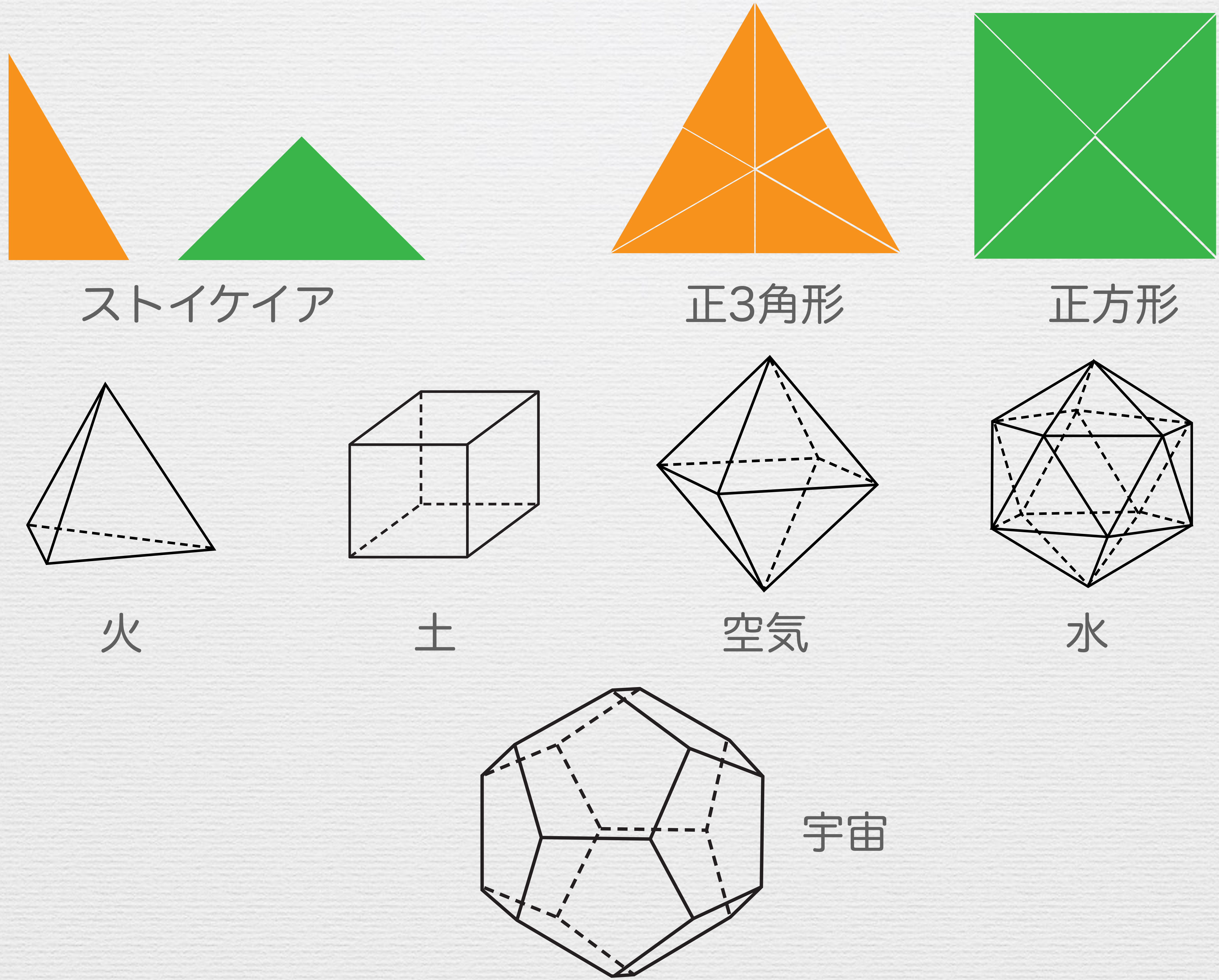
紀元前427年 - 紀元前347年

Image by Marie-Lan Nguyen, from Wikimedia Commons, ref. 2016/04/11
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plato_Silanion_Musei_Capitolini_MC1377.jpg CC BY 2.5

古代ギリシアの哲学者である．ソクラテスの弟子にして，アリストテレスの師に当たる．プラトンの思想は西洋哲学の主要な源流であり，哲学者ホワイトヘッドは「西洋哲学の歴史とはプラトンへの膨大な注釈である」という趣旨のことを述べた．『ソクラテスの弁明』や『国家』等の著作で知られる．現存する著作の大半は対話篇という形式を取っており，一部の例外を除けば，プラトンの師であるソクラテスを主要な語り手とする．(wikipedia「プラトン」より)



４大元素 = 火・土・水・空気


ストイケイア
正3角形
正方形
火
土
空気
水
宇宙

ヨハネス・ケプラー

1571年12月27日 - 1630年11月15日

ドイツの天文学者．天体の運行法則に関する「ケプラーの法則」を唱えたことでよく知られている．理論的に天体の運動を解明したという点において，天体物理学者の先駆的存在だといえる．一方で数学者，自然哲学者，占星術師という顔ももつ．

(wikipedia「ヨハネス・ケプラー」より)

Wikimedia Commons

惑星はなぜ６個（水・金・地・火・木・土)しかないのか？

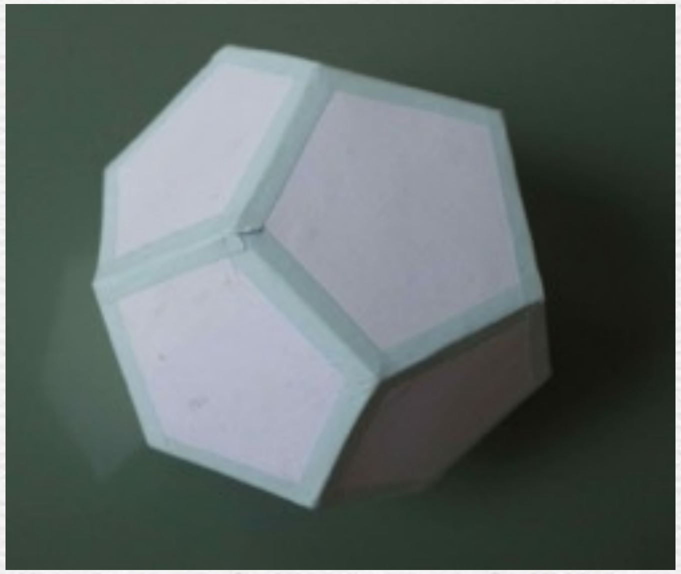
それはこの宇宙に正多面体が５個しかないことに対応しているのだ．

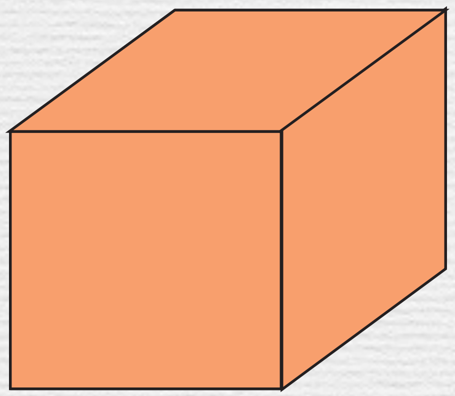
Wikimedia Commons

正多面体は「堅い」

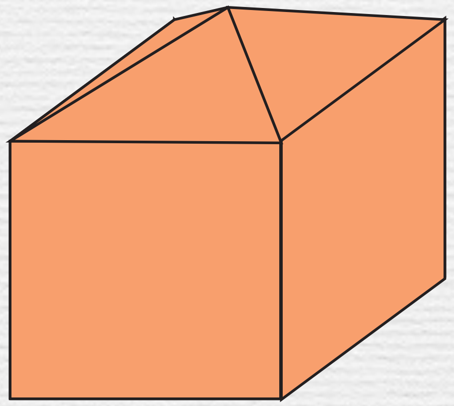
コーシーの剛性定理(1813)

閉かつ凸な多面体はつねに堅い.

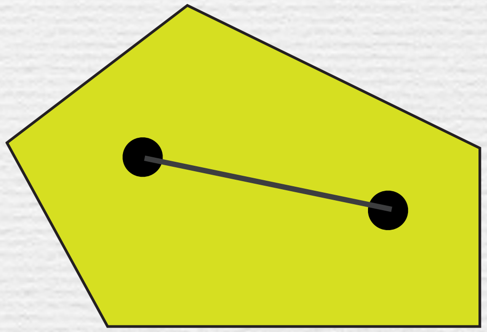




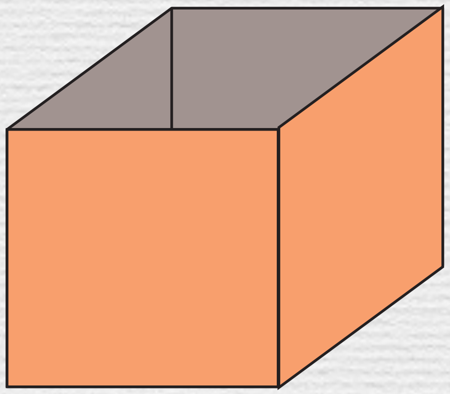
閉である



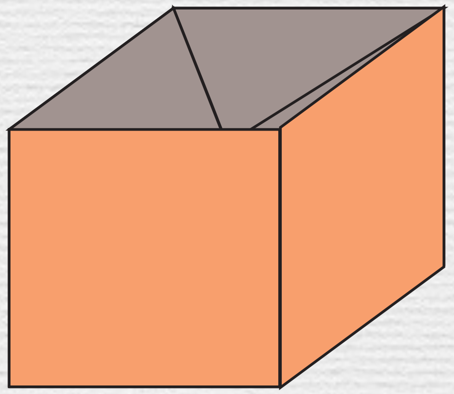
凸である



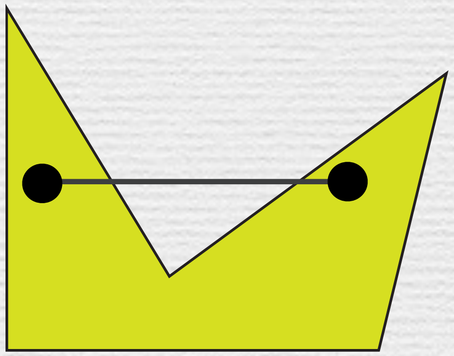
凸である



閉でない



凸でない



凸でない

オイラーの予想 (1766)

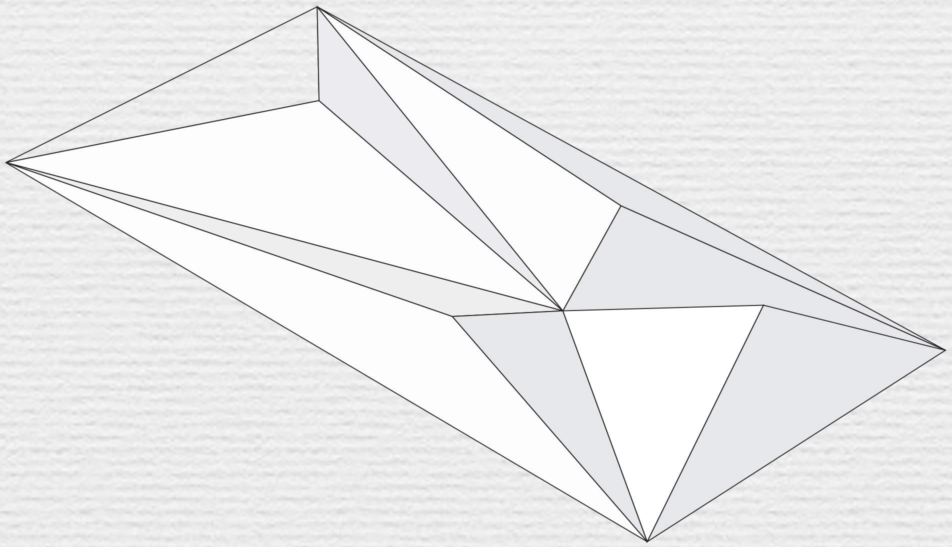
閉 な多面体はつねに堅い.

グルックの定理 (1970年代)

球面と同相な 多面体の ほとんどすべて が堅い.

コネリーの反例 (1977)

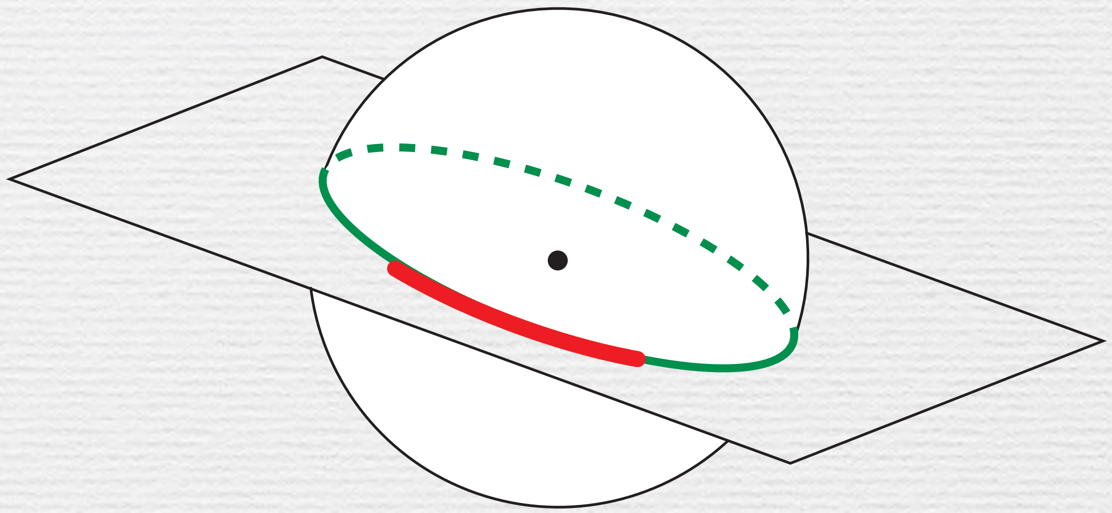
閉な多面体で**変形する**ものが存在する！！



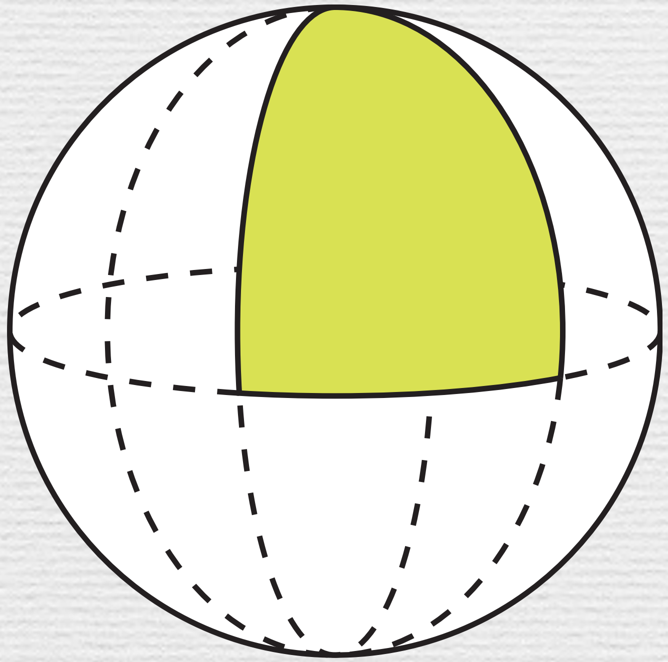
オイラーの公式　⇐　ハリオットの定理

大円　球面と，その中心を通る平面の交わり

大円弧　大円の中の弧



球面多角形　球面上の大円弧で囲まれた図形



球面３角形

平面においては

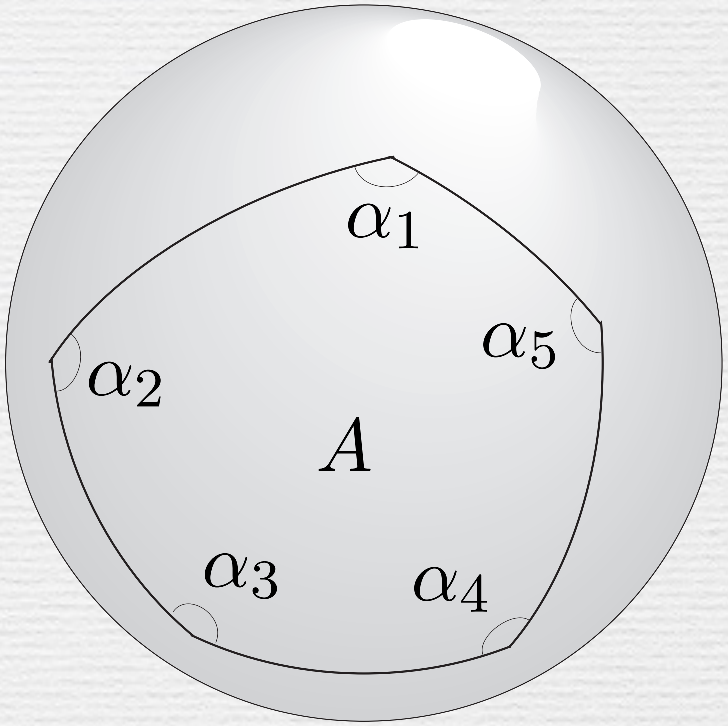
（３角形の内角の和）$= \pi$

球面においては

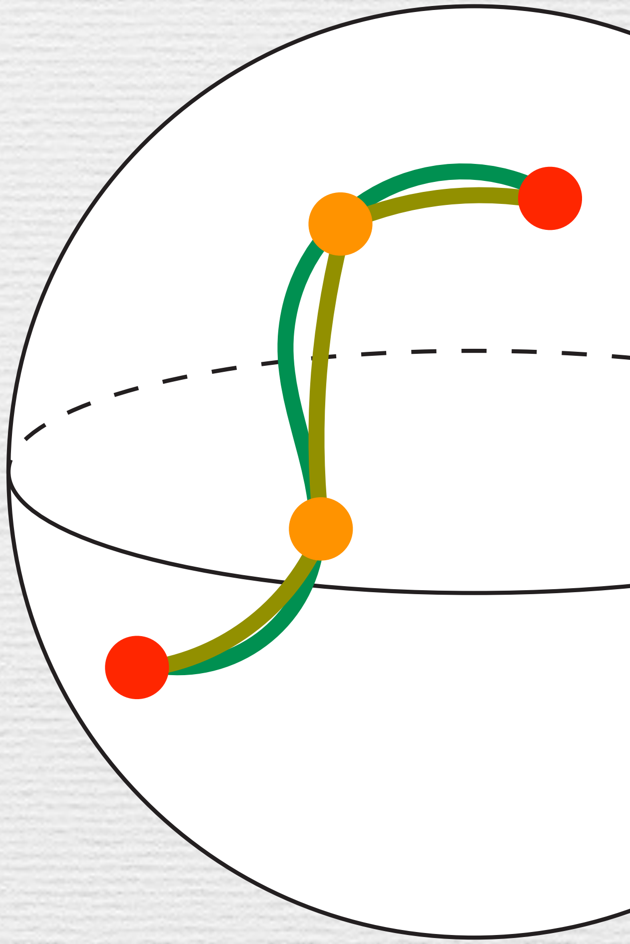
（３角形の内角の和）$\neq \pi$

ハリオットの定理　単位球面上の球面 n 角形に対し，その内角を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$，面積を A としたとき，

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = (n-2)\pi + A$$

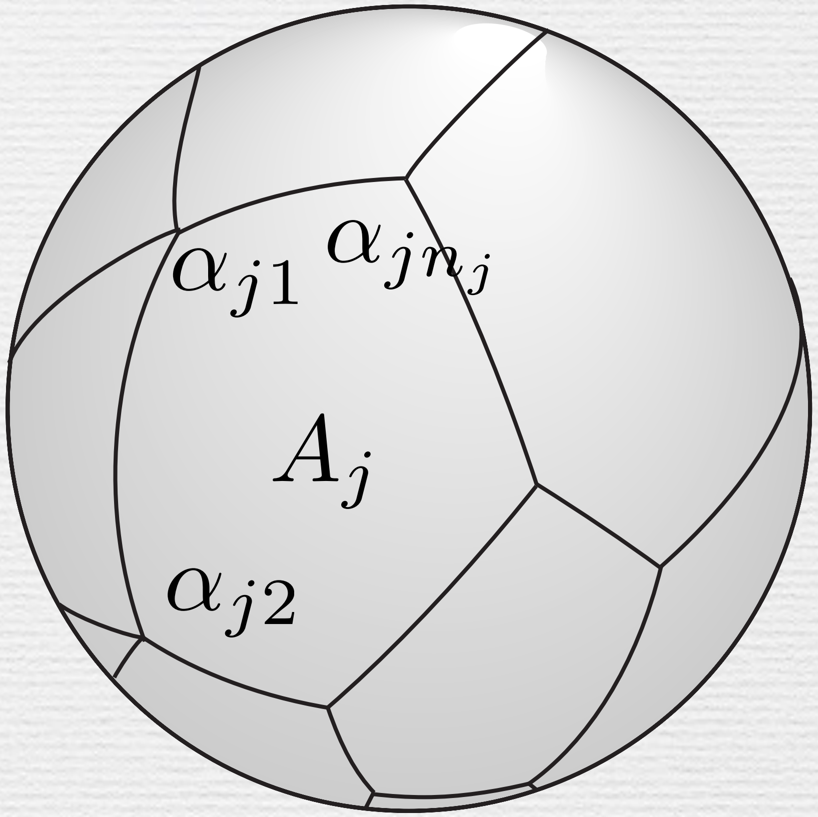


オイラーの公式の証明　与えられたグラフの各辺を，大円弧を連ねた「折れ線」で置き換えることにより，新しいグラフを作る．このとき，頂点も辺も同数増加する．一方，面の数は変化しない．したがって，$v-e+f$ の値も変化しない．したがって，この新しいグラフに対しオイラーの公式を証明すればよい．



オイラーの公式の証明（続き）

面を $F_1, \ldots, F_f$ とする．各面 F_j は n_j 角形で，その内角は $\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn_j}$，面積は A_j であるとする．



ハリオットの定理によれば，

$$\sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{jk} = (n_j - 2)\pi + A_j$$

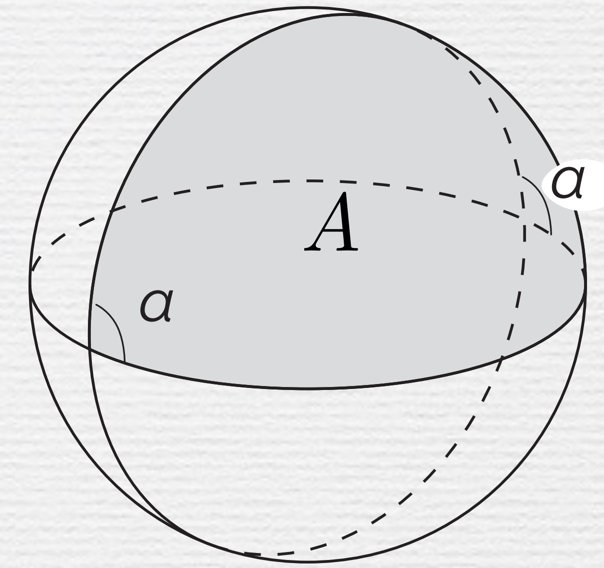
$$\sum_{j=1}^{f} \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{jk} = \left(\sum_{j=1}^{f} n_j \right) \cdot \pi - 2f\pi + \sum_{j=1}^{f} A_j$$

（左辺）$= 2v\pi$，（右辺第１項）$= 2e\pi$，（右辺第２項）$= 4\pi$

$$\therefore \quad v - e + f = 2$$

（証明終わり）

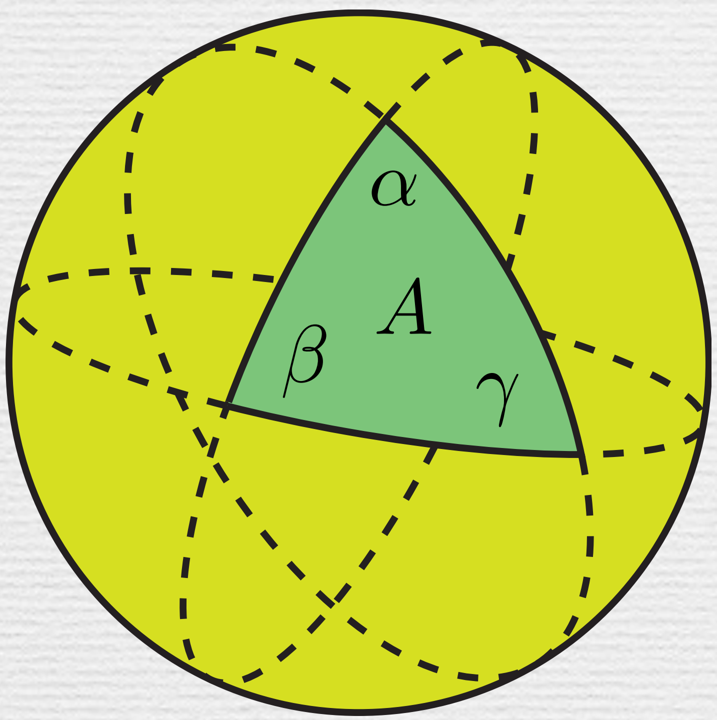
ハリオットの定理の証明

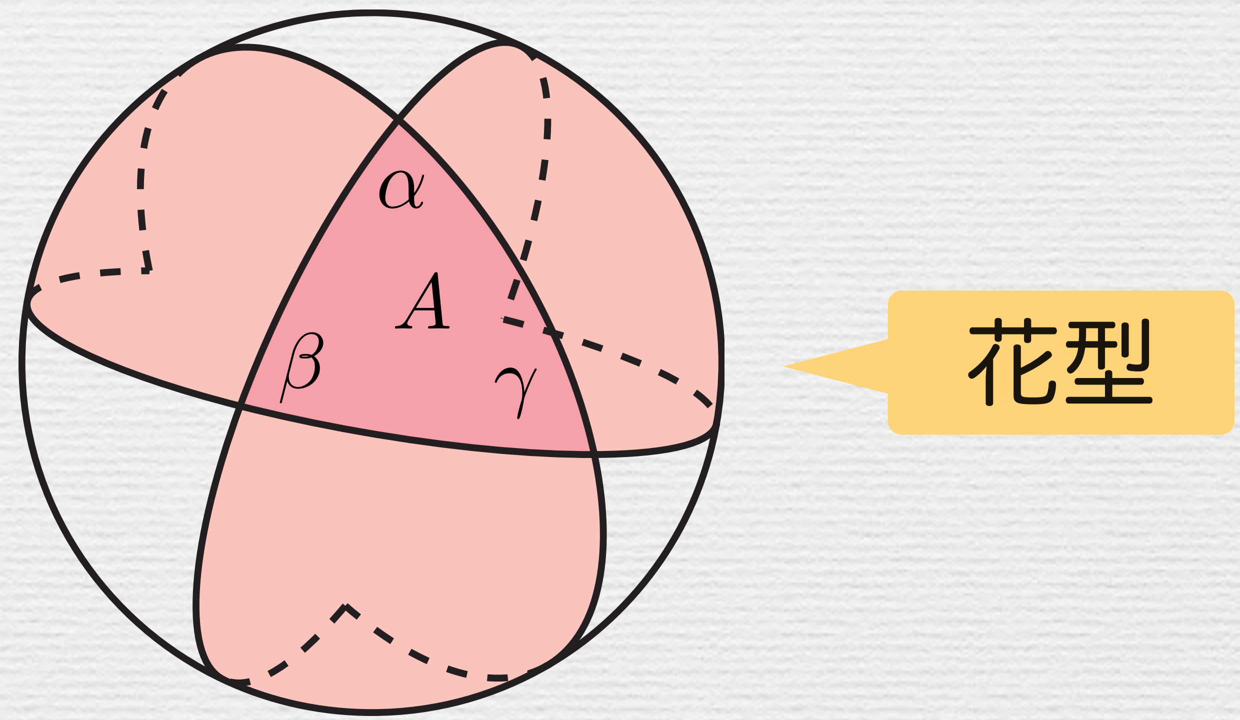


２角形の場合

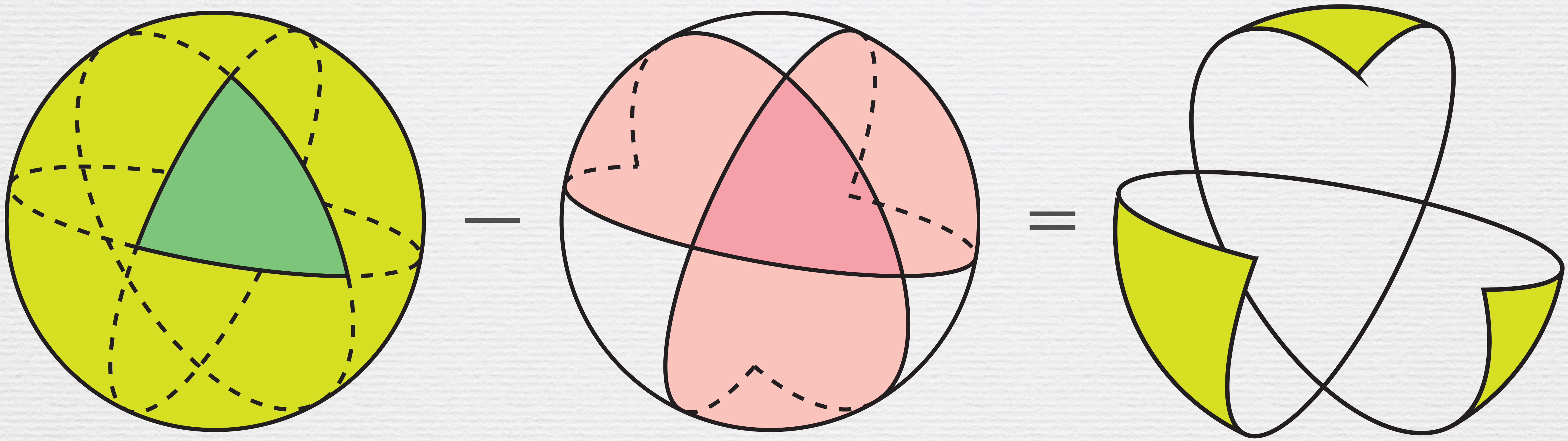
$$A = (\text{球面の面積}) \times \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha$$

３角形の場合





$$
\begin{aligned}
(\text{花型の面積}) \quad &= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2A \\
&= 2(\alpha + \beta + \gamma - A)
\end{aligned}
$$



$$（花型の面積）\quad = 2(\alpha + \beta + \gamma - A)$$

$$= （球面の面積）\times \frac{1}{2} = 2\pi$$

ゆえに $\quad \alpha + \beta + \gamma - A = \pi$

一般の場合　３角形の場合に帰着される.　　**（証明終わり）**