先週のミニッツレポートから:

トランスパレンシーの点はどういう点か ?　　　Ans.　擬似ランダム点列

そうでないとどうなるかお見せします。

ストイケイアの並べかたのアイデア　　　いろいろとやってみてください。

わからない用語がかなりあった。　ユークリッド空間とは　?

直交群とは　?　　直交行列全体のなす群

直交行列　?　　列(行)ベクトルが正規直交

行列をベクトルに掛けるとベクトルになる。

コンパクトとは ?　　「有界閉集合」の性質

同相とは ?　　両連続全単射がある

２次の直交群 = ?

２次の直交群の有限部分群が ,?

軌道空間が全く分からなかった。

同じとみなす（同値関係） ⇒ 同値類の集合が考えられる

$$x \sim x,\ x \sim y \Longrightarrow y \sim x,\ (x \sim y) \wedge (y \sim z) \Longrightarrow x \sim z$$

群の作用 $G \times F \to F : (g, x) \mapsto g(x)$ で

$g\big(h(x)\big) = (gh)(x)$ をみたすもの

我々は、G として、図形 F を F に写す両連続全単射（同相写像）で距離を保つもの全体 $I(F)$ を考えている。

x の G 軌道は $\{ g(x) \mid g \in G\}$ で定義される。

同じ軌道に属することは、同値関係で、その同値類の集合が軌道空間。

軌道空間の局所的な形状は、

[x の G 軌道]では、 x の近傍の G 軌道で定まる。

直線上の周期性、対称性をもつ図形については先週の最後に述べた。

数直線 $\boldsymbol{R}$ への等長変換群 $\boldsymbol{G}$ の作用で、$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{G}$ が、１次元のコンパクトな図形になるならば、次の２つの場合がおきる。

- $\boldsymbol{G}$ は、１つの平行移動 $\boldsymbol{T}$ により生成される群であり、$\boldsymbol{C}_\infty \cong \boldsymbol{Z}$ に同型である。

$$\cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

軌道空間 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{C}_\infty$ は円周と同相である。

- $\boldsymbol{G}$ は、２つの対称移動 $\boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{r}_1$ により生成される群であり、$\boldsymbol{C}_2 * \boldsymbol{C}_2 \cong \boldsymbol{Z} \rtimes \boldsymbol{Z}_2$ に同型である。

$$\cdots \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdots$$

軌道空間 $\boldsymbol{R}/(\boldsymbol{C}_2 * \boldsymbol{C}_2)$ は線分と同相である。

1.　2次元の周期性、対称性を持つ図形にはどのようなものがあるか？

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図（悪魔）

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図（蝶）

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図（騎乗者）

1．　2次元の周期性、対称性を持つ図形にはどのようなものがあるか？

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図
（ヒトデと二枚貝）

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図
（魚と悪魔）

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図（蟹）

1.　2次元の周期性、対称性を持つ図形にはどのようなものがあるか？

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図
（魚）

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図
（魚-Watercolor）

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図
（鳥）

エッシャー(1896-1972)のデザインを最も小さな（できるだけ簡単な）多角形の上のデザインの繰り返しであると理解しよう。

配られたデザイン上で定規を使って、最も小さな単位となるものを見つけてみよう。

まず、周期を表す平行四辺形を探し、それが分割できるかどうかを検討する。

蝶の色は区別しないことにする

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図（悪魔）

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図（蝶）

色は区別しないことにする

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図（騎乗者）

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図
（ヒトデと二枚貝）

蟹の色は区別しないことにする

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図
（魚と悪魔）

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図（蟹）

魚の色は区別しないことにする

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図
（魚）

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図
（魚-Watercolor）

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた
図を削除しました。

Maurits Cornelis Escherの図
（鳥）

このような周期性も対称性もある模様の単位になる図形を探していくと「ストイケイア」が出てくるように思われます。

「ストイケイア」を貼り付けていくと周期性も対称性もある模様ができます。

それは、「十分条件」であり、「ストイケイア」が出てくる必要性（必然性）を説明していません。

周期性の定義と格子

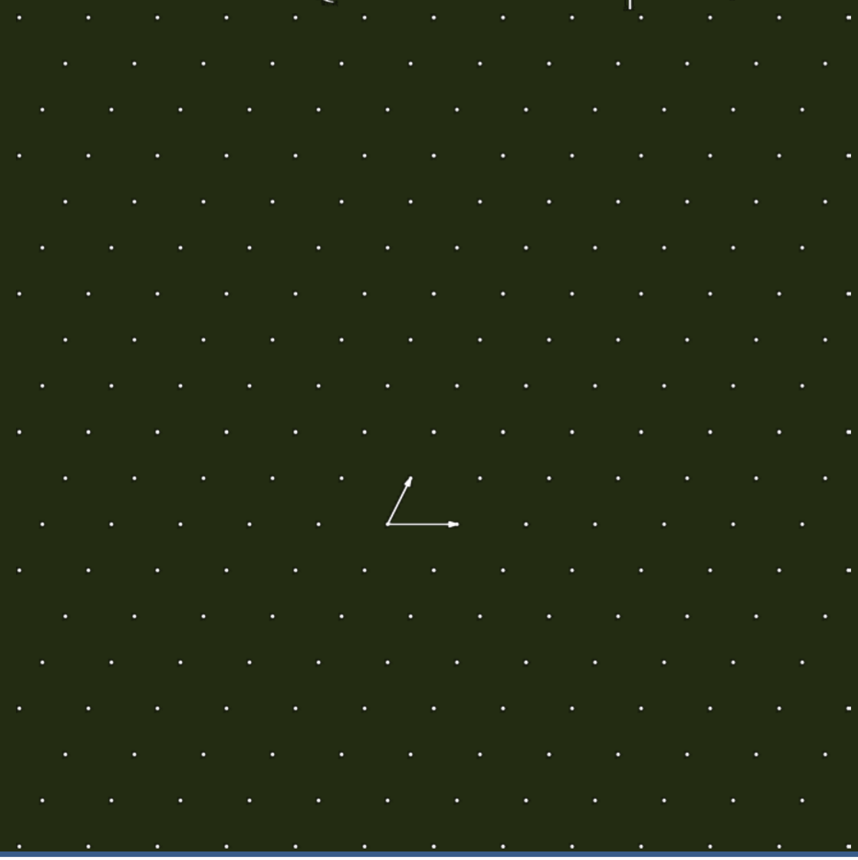
【周期性のある図形の定義】　平面上の周期性のある図形とは、その図形の等長変換群（合同変換群）G が、２つの独立な方向の平行移動をふくむものである。

【問題】 平面上の、周期性、対称性のある図形の等長変換群（合同変換群）を分類せよ。

この答えが１７通りであることが知られている。

2. 格子について

【定義】 平面上の２つの１次独立なベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し、それらの整数倍の和のなす集合 $L = \{m\vec{a} + n\vec{b} \mid m, n \in Z\}$ を平面格子と呼ぶ。

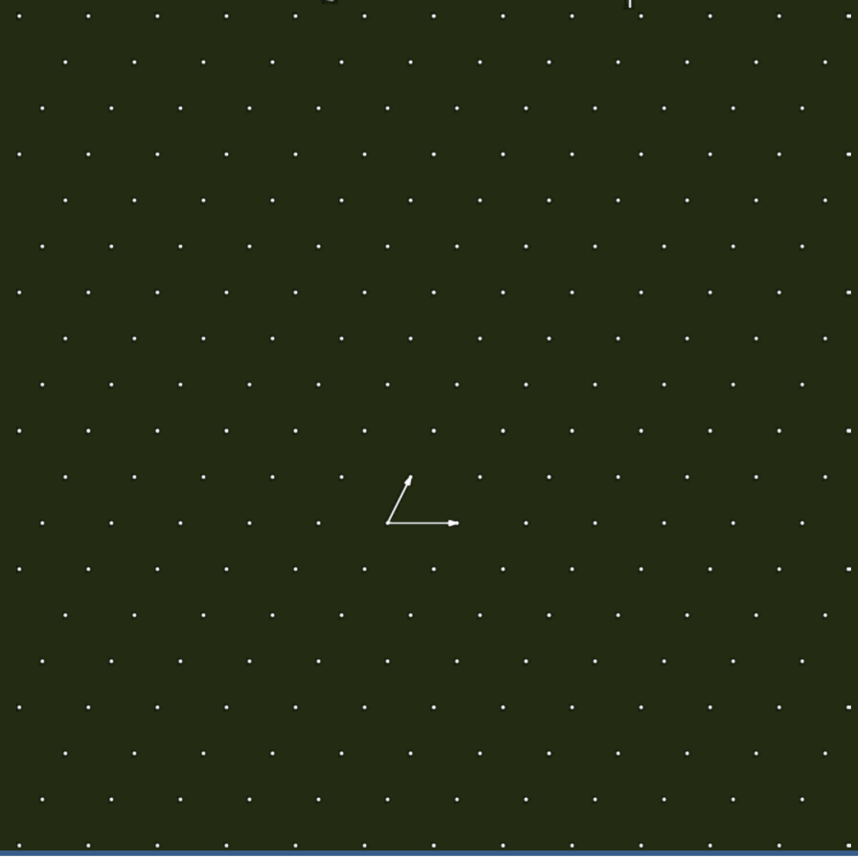


$\vec{0}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}$ を頂点とする平行四辺形の形は、２つのベクトルの大きさの比 $\dfrac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|}$ と２つのベクトルのなす角度で、相似を除いて定めることができる。平行四辺形が同じであるのは、ベクトルの大きさの比が逆数になる場合と、角度 θ がその補角 $\pi-\theta$ になる場合である。

格子は、平行四辺形を並べていったときの頂点として現れる。同じ格子を違う平行四辺形で定めることができる。

2. 格子について

【定義】　平面上の２つの１次独立なベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し、それらの整数倍の和のなす集合 $L = \{m\vec{a} + n\vec{b} \mid m, n \in Z\}$ を平面格子と呼ぶ。



$\vec{0}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ を頂点とする平行四辺形の形は、２つのベクトルの大きさの比 $\dfrac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|}$ と２つのベクトルのなす角度で、相似を除いて定めることができる。平行四辺形が同じであるのは、ベクトルの大きさの比が逆数になる場合と、角度 θ がその補角 $\pi-\theta$ になる場合である。

格子は、平行四辺形を並べていったときの頂点として現れる。同じ格子を違う平行四辺形で定めることができる。

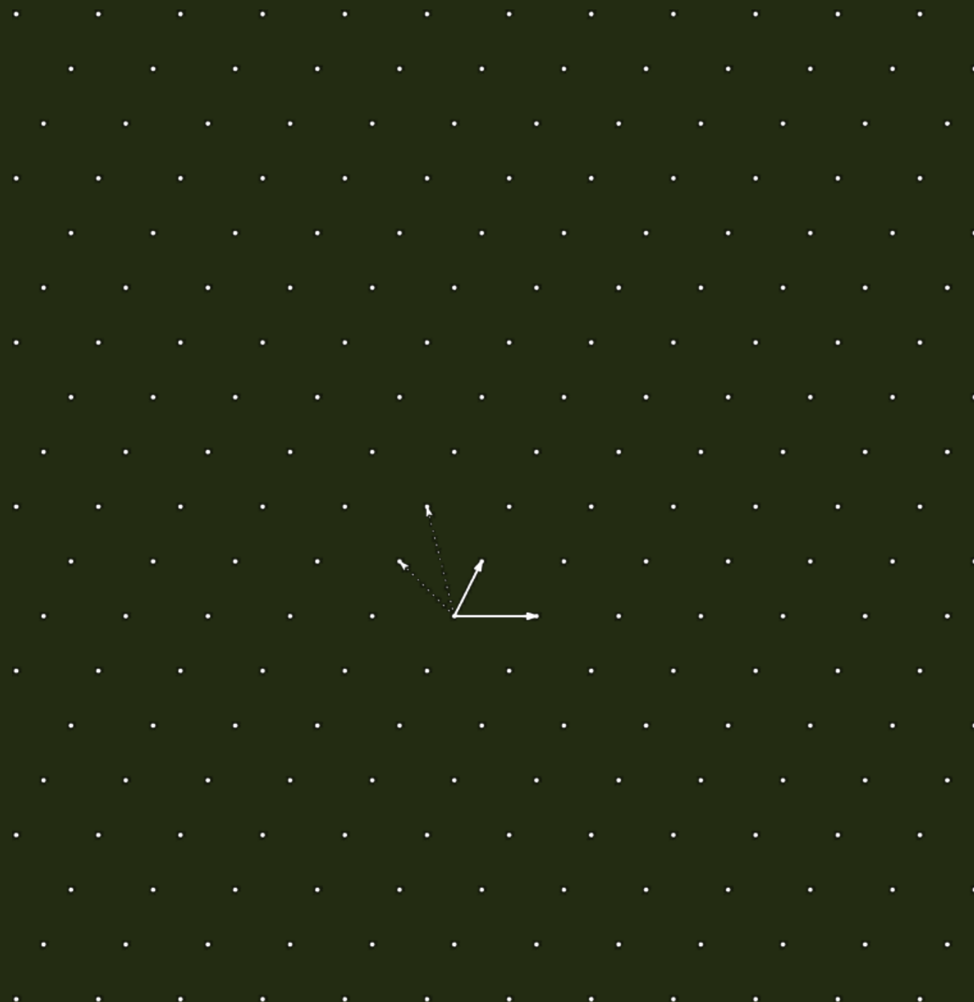
２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ と、$\vec{a}'$, $\vec{b}'$ が、同じ格子 L を定めるとすると、

$$\vec{a}' = s\vec{a} + t\vec{b},$$
$$\vec{b}' = u\vec{a} + v\vec{b}$$

となる整数 s, t, u, v が定まる。同様に、

$$\vec{a} = s'\vec{a}' + t'\vec{b}',$$
$$\vec{b} = u'\vec{a}' + v'\vec{b}'$$

となる整数 s', t', u', v' が定まる。



このとき、

$$\vec{a} = s'(s\vec{a} + t\vec{b}) + t'(u\vec{a} + v\vec{b}) = (s's + t'u)\vec{a} + (s't + t'v)\vec{b},$$
$$\vec{b} = u'(s\vec{a} + t\vec{b}) + v'(u\vec{a} + v\vec{b}) = (u's + v'u)\vec{a} + (u't + v'v)\vec{b}.$$

従って、

$$\begin{pmatrix} s' & t' \\ u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

ここに現れる行列は、整数係数であるから、これらの行列の行列式は整数である。両辺の行列式をとれば、これらの行列の行列式は ± 1 でなければならないことがわかる。

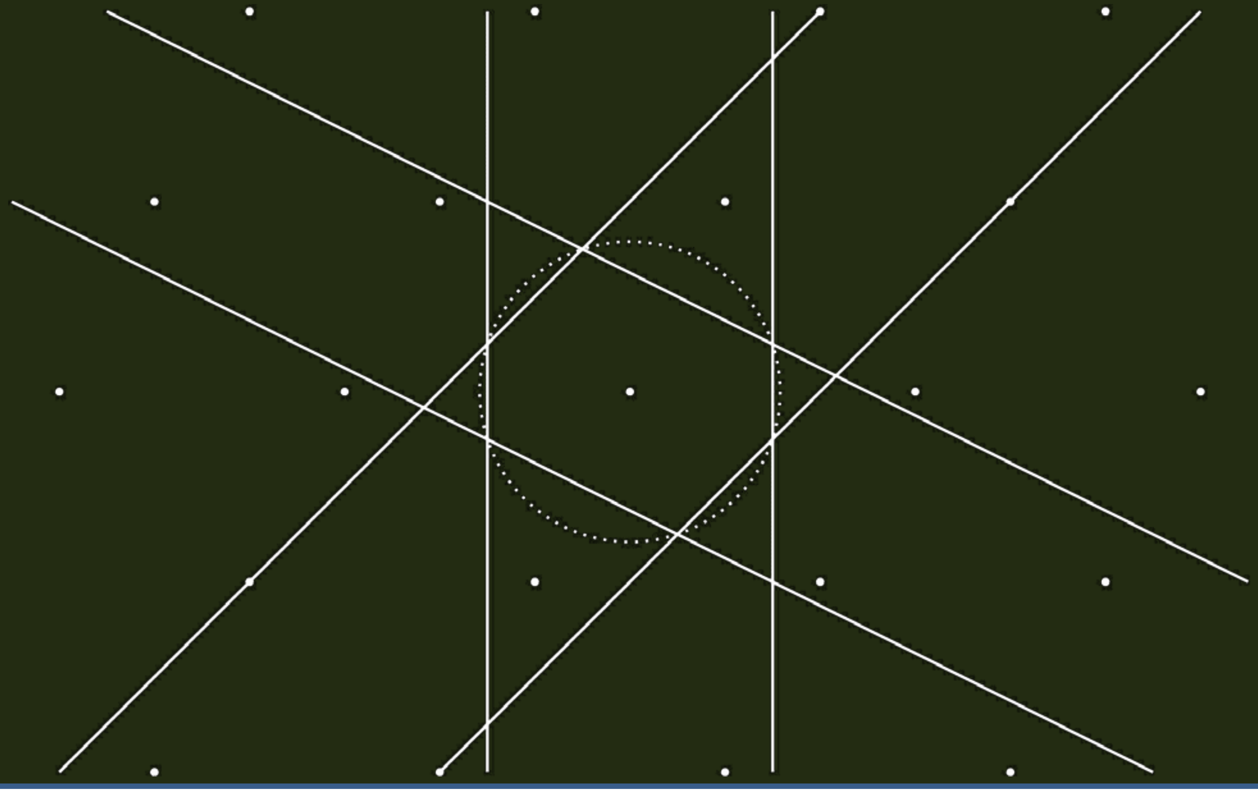
結論としては、行列式が ± 1 であるような整数係数の行列 $\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ について、$\{\vec{a}, \vec{b}\}$ と $\{s\vec{a} + t\vec{b}, u\vec{a} + v\vec{b}\}$ は同じ格子 L を定める。

これは重要であり、後で用いるが、図形的には今一つである。

格子 L に対して、自然に定まる図形を考えるのが良い。実際、ディリクレ領域あるいはボロノイ領域と呼ばれる図形が定まる。

考える図形 K は、平面上の点で、格子点の中で原点が最も近いという性質を満たすもの全体である。

$$K = \{x \in R^2 \mid \forall \ell \in L,\ \|x\| \leqq \|x - \ell\|\}$$



K は、長方形になるか、または円に内接する円の中心について点対称な対辺が平行な六角形となる。
六角形の中で特別なものとして正六角形がある。
長方形は六角形一組の辺の長さが 0 になった特別な場合と考えられる。

- 格子 L の原点 $\vec{0}$ 以外の点で原点 $\vec{0}$ に最も近いものを $\vec{p}$ とする。
- 格子 L の $\vec{p}$ の整数倍ではない点で原点 $\vec{0}$ に最も近いものを $\vec{q}$ とする。
- $\vec{p}$ と $\vec{q}$ が直交しているときは、$\vec{0}, \pm\vec{p}$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線と $\vec{0}, \pm\vec{q}$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線で囲まれる長方形がディリクレ領域である。

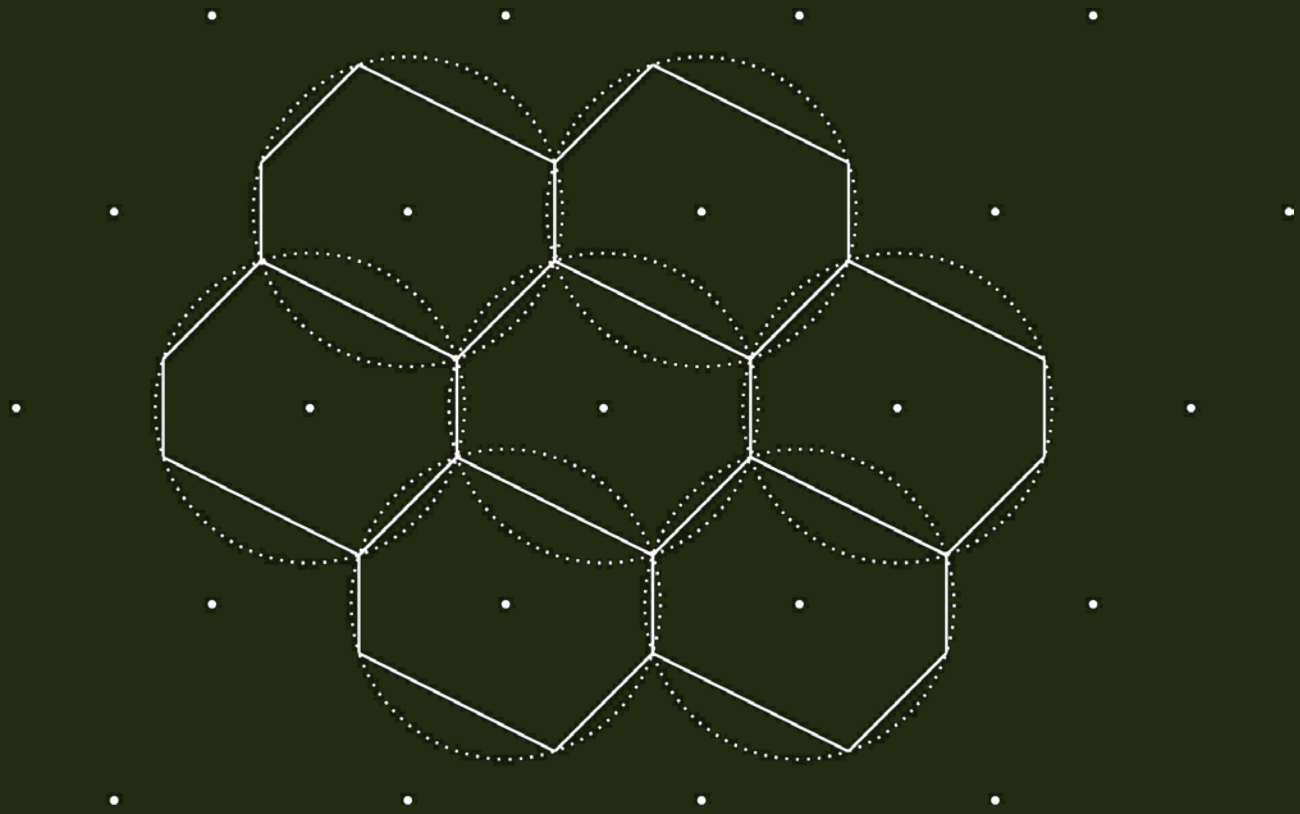
東京大学大学院数理科学研究科 Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO
東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

- $\vec{p}$ と $\vec{q}$ が直交していないときは、$\vec{q} \pm \vec{p}$ の一方が、格子 L の $\vec{p}$ の整数倍ではない点で原点 $\vec{0}$ に $\pm\vec{q}$ の次に近い点 $\vec{r}$ となる。

- このとき、$\vec{0}, \pm\vec{p}$ を結ぶ線分の垂直２等分線、$\vec{0}, \pm\vec{q}$ を結ぶ線分の垂直２等分線、$\vec{0}, \pm\vec{r}$ を結ぶ線分の垂直２等分線が原点について対称な六角形を定める。

- これが、原点 $\vec{0}$ のディリクレ領域である。六角形の頂点は、$\pm$ をうまくとると、$\vec{0}, \pm\vec{p}, \pm\vec{q}$ などを頂点とする三角形の外心であるから、この六角形は円に内接する。

K をタイルとして平面を周期的に覆うことができる。



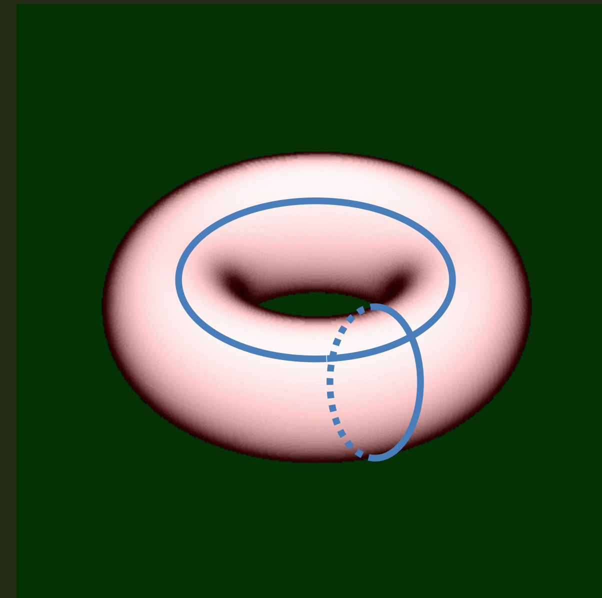
- 格子 $L = \{m\vec{a} + n\vec{b} \mid m, n \in Z\}$ の元による平行移動で、原点のディリクレ領域 K は、他の点のディリクレ領域に移される。
- ２つのベクトルに沿う平行移動で生成される群 L は平面に作用しており、その軌道空間は、K の対辺を貼りあわせたものである。
- この空間は、平行四辺形の対辺を貼りあわせたものでもあり、トーラスと同相な空間である。

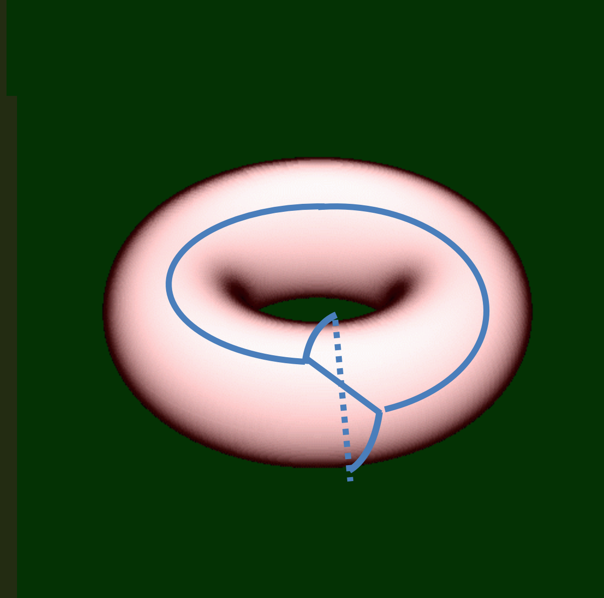
トーラスのオイラー数は、0 であることが、穴のない多角形に分割することで確かめられる。

コンパクトな曲面のオイラー数は、それを穴のない多角形に分割したときの、頂点の数を v , 辺の個数を e , 面の個数を f とするとき、

$$v - e + f$$

で定義される。





3.　対称性をもつ格子

格子 L は、原点や２等分点について点対称な図形であるが、さらに、回転対称や線対称になるのは、特別な格子に限る。

格子 L がある移動 $\vec{x} \longmapsto A\vec{x} + \vec{c}$ で格子 L 自身に移るとすると、特に、$\vec{0} \longmapsto A\vec{0} + \vec{c} = \vec{c} \in L$ である。ここで A は直交行列である。

$\pm\vec{c}$ の平行移動は、格子 L を格子 L 自身に移す。従って、$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ は、格子 L を格子 L 自身に移す。

このとき格子を生成するベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は、

$$A\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{b},$$
$$A\vec{b} = u\vec{a} + v\vec{b}$$

に移される。

これは、$A\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix}$ であるから、

$P = \begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix}$ に対し、

$$A = P\begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix}P^{-1}$$

となる。

特に A のトレース $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix} = s + v$ は、整数となる。

直交行列 A のトレースは、A が折り返しのとき 0, A が角度 θ の回転のとき $2\cos\theta$ で、これが整数 -2, -1, 0, 1, 2 のどれかの値をとる。

A が折り返しのとき、対称軸上に格子 L の点があることがわかり、格子 L は、長方形か菱形を基本領域にもつことがわかる。

このとき格子を生成するベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は、

$$A\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{b},$$
$$A\vec{b} = u\vec{a} + v\vec{b}$$

に移される。

これは、$A\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix}$ であるから、

$P = \begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix}$ に対し、

$$A = P\begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix}P^{-1}$$

となる。

特に A のトレース $\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix} = s + v$ は、整数となる。

直交行列 A のトレースは、A が折り返しのとき 0, A が角度 θ の回転のとき $2\cos\theta$ で、これが整数 -2, -1, 0, 1, 2 のどれかの値をとる。

A が折り返しのとき、対称軸上に格子 L の点があることがわかり、格子 L は、長方形か菱形を基本領域にもつことがわかる。

A が θ 回転のとき、θ は、$\pi, \pm\frac{2}{3}\pi, \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{1}{3}\pi, 0$ のいずれかになる。

回転対称性をもつ格子に対しての対称移動の回転角が、このように制限されていることが、基本領域に「ストイケイア」がしばしば現れる理由である。

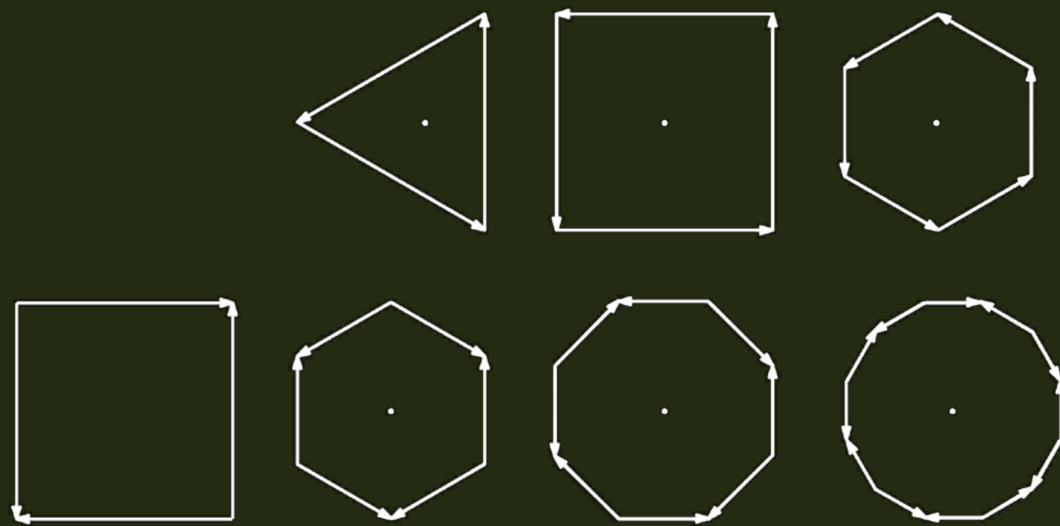
4.　軌道空間

ユークリッド平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の図形 $\boldsymbol{F}$ の等長変換群（合同変換群）$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{F})$ が、２つの独立な平行移動で生成される格子 $\boldsymbol{L}$ を含むとする。

【定義】　$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ に対し、$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$ とする。$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{x}$ における等方部分群 (isotropy subgroup) と呼ばれる。

G_x は直交行列のなす群 $\mathbf{O}(2)$ の部分群と同型となるが、G が格子 L を含むから、前の議論により G_x の各元は格子 L を保つ。その結果、G_x は次のいずれかに同型である。

- $\{\mathrm{id}\}$(恒等写像だけからなる群)
- C_2（点対称）, C_3, C_4, C_6
- D_2（線対称）, D_4, D_6, D_8, D_{12}



従って、軌道空間の点 $[x] \in \boldsymbol{R}^2/G$ の近傍は、次のいずれかと合同である。

- 平面の原点。
- 角度 $\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ の円錐の頂点。
- 半空間 $\{(x, y) \mid x \leq 0\}$ の原点。
- 角度 $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ の扇型の頂点。

5.　２次元平坦オービフォールド

- R^2/G は、２次元平坦オービフォールドとよばれる図形である。
- ２次元平坦オービフォールドは、その各点の近傍が、平面の一部、半平面の一部、n を自然数として角度 $\dfrac{2\pi}{n}$ の円錐、n を自然数として角度 $\dfrac{\pi}{n}$ の扇型からなるものである。（折り紙でできる図形というように考えるとよい）。

- 辺（さらには扇型の頂点）を持つ2次元平坦オービフォールドに対して、そのダブルと呼ばれる、2枚のコピーを辺に沿って貼り合わせて得られる辺を持たない（円錐の頂点は持ちうる）２次元平坦オービフォールドが構成される。

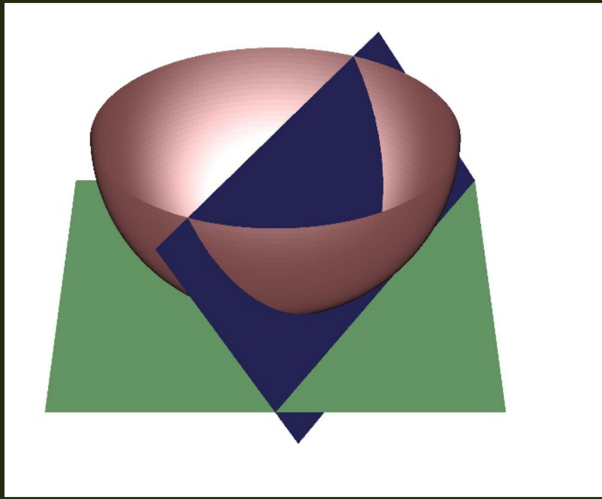
- まず、辺（つまり境界）を持たない（円錐の頂点は持ちうる）２次元平坦オービフォールドを分類する。

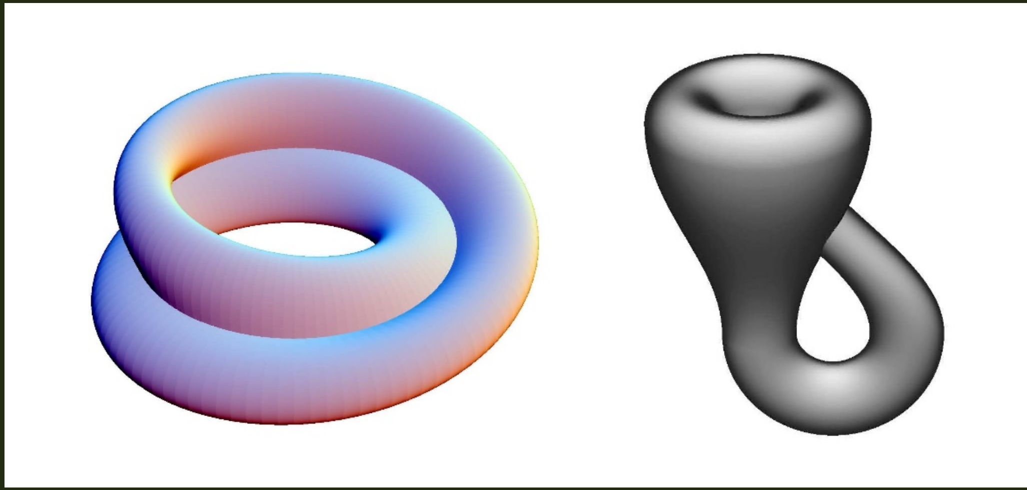
- 辺を持たない2次元平坦オービフォールドの対称線を探して半分にすれば、辺を持つ２次元平坦オービフォールドも分類される。

- 辺を持たない（円錐の頂点は持ちうる）２次元平坦オービフォールドは、T^2, Kl, $RP^2(2,2)$, $S^2(2,3,6)$, $S^2(2,4,4)$, $S^2(3,3,3)$, $S^2(2,2,2,2)$ の７種である。

- ここで、T^2, Kl, RP^2, S^2 は、それぞれ、トーラス、クラインの壺、射影平面、球面を表し、(n_1,n_2), (n_1,n_2,n_3), (n_1,n_2,n_3,n_4) は、角度が $\dfrac{2\pi}{n_1}, \ldots$ の円錐の頂点を持つことを表す

- 辺を持たない２次元平坦オービフォールドが７種類であることは、２次元平坦オービフォールドのオイラー数がゼロであることから導かれる。





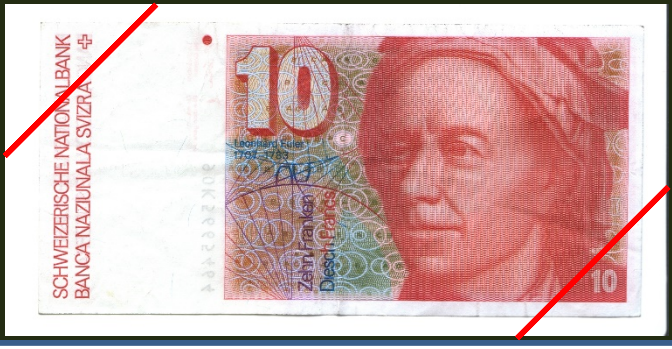
- 辺（境界）を持たない（円錐の頂点は持ちうる）２次元平坦オービフォールドは、円錐の頂点も円板と同相な近傍を持つから、位相的には閉曲面である。

- 閉曲面は、向き付け（裏表）を持つかどうかと、その曲面のオイラー数で分類される。

- 閉曲面 S のオイラー数 $\chi(S)$ は、閉曲面を三角形に分割したときに、
（頂点の個数）－（辺の個数）＋（面の個数）
により定義される。

- 向き付けを持つ閉曲面のオイラー数は、$2,\ 0,\ -2,\ -4,\ \ldots$ の値を持ち、これらのオイラー数の曲面は順に、球面 S^2、トーラス T^2、種数２の向き付けを持つ閉曲面、種数３の向き付けを持つ閉曲面、…である。

- 向き付けを持たない閉曲面のオイラー数は、$1,\ 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ の値を持ち、これらのオイラー数の曲面は順に、射影平面 RP^2、クラインボトル Kl、種数３の向き付けを持たない閉曲面、種数４の向き付けを持たない閉曲面、…である。



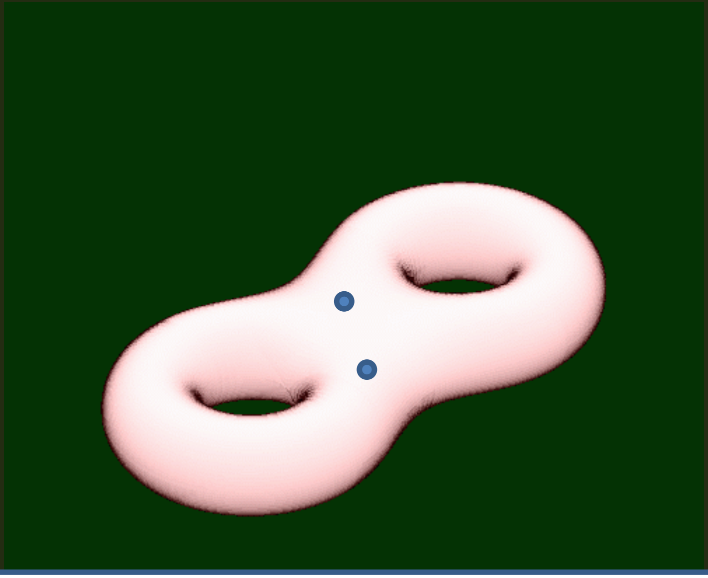
6.　分岐被覆とオイラー数

- 閉曲面の間の分岐を持たない k 重の被覆写像 $S_k \longrightarrow S_1$ に対し、$\chi(S_k) = k\,\chi(S_1)$ である。
- これは、S_k の頂点、辺、面の個数は S_1 の頂点、辺、面の個数の k 倍だからである。

- 辺（境界）を持たない（円錐の頂点は持ちうる）２次元平坦オービフォールドに対しては、その間の分岐被覆を考えるのが自然である。
- 分岐被覆とは、局所的には円板あるいは円錐から、それに回転として作用する m 次巡回群 C_m の作用の軌道空間の円錐への写像を許したものである。

- 境界を持たない２次元平坦オービフォールドは、位相的には閉曲面 S に有限個の錘点 $p_1, \ldots, p_k$ があって、それぞれの点は $\dfrac{2\pi}{n_1}, \ldots, \dfrac{2\pi}{n_k}$ の角度になっていると記述される $(n_1 \geqq 2, \ldots, n_k \geqq 2)$。

  そのような２次元平坦オービフォールドを $S(n_1, \ldots, n_k)$ と表す。



境界を持たない２次元平坦オービフォールド $S(n_1,\ldots,n_k)$ のオイラー数 $\chi(S(n_1,\ldots,n_k))$ を定義しよう。

- 錘点が頂点になるように三角形分割すると、角度が $\dfrac{2\pi}{n}$ の錘点の頂点は、n 重に分岐被覆したときに１個と数えるべきものであるから、$\dfrac{1}{n}$ 個と数えるべきものである。
- そこで、境界を持たない２次元平坦オービフォールド $S(n_1,\ldots,n_k)$ のオイラー数 $\chi(S(n_1,\ldots,n_k))$ を

$$\begin{aligned}\chi(S(n_1,\ldots,n_k)) &= \chi(S) - \left(1-\frac{1}{n_1}\right) - \cdots - \left(1-\frac{1}{n_k}\right)\\ &= \chi(S) - k + \left(\frac{1}{n_1}+\cdots+\frac{1}{n_k}\right)\end{aligned}$$

で定義する。

東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO
東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

- このように定義すると、m 重分岐被覆写像 $S_m(n_1,\ldots,n_k) \longrightarrow S_1(n'_1,\ldots,n'_{k'})$ に対し、

$$\chi(S_m(n_1,\ldots,n_k)) = m\ \chi(S_1(n'_1,\ldots,n'_{k'}))$$

である。
- 平坦オービフォールド $S(n_1,\ldots,n_k)$ に対しては、適当に分岐被覆をとると、2次元トーラスになり、$\chi(S(n_1,\ldots,n_k)) = 0$ を満たさなければならない。
- 従って、平坦オービフォールドを分類するには、

$$\chi(S) - k + \left(\frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_k}\right) = 0$$

を満たす $S(n_1,\ldots,n_k)$ を分類すればよい。

2次元平坦オービフォールドが7通りであることの証明

- 条件から、

$$\chi(S) = \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n_k}\right) \geqq 0$$

である。

- 等号は、$k = 0$ のときであり、その時には $S = T^2$ または $S = \mathrm{Kl}$ である。
- 不等号の場合、$\chi(S) = 1$ または $\chi(S) = 2$ である。
- $\chi(S) = 1$ ならば $S = RP^2$ であり、$\chi(S) = 2$ ならば $S = S^2$ である。

- $\left(1-\frac{1}{n_1}\right) \geqq \frac{1}{2}$ だから、$k \leqq 2\chi(S)$ である。
- $\chi(S) = 1$ のとき、
  $k = 1$ とすると、$1 = \left(1-\frac{1}{n}\right)$ となる正整数 n は存在しない。
  $k = 2$ とすると、$1 = \left(1-\frac{1}{n_1}\right) + \left(1-\frac{1}{n_2}\right)$ となるのは、
  $n_1 = n_2 = 2$ のときである。

$\chi(S) = 2$ のとき、

- $k = 1$ とすると、$2 = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ となる正整数 n は存在しない。
- $k = 2$ とすると、$2 = \left(1 - \dfrac{1}{n_1}\right) + \left(1 - \dfrac{1}{n_2}\right)$ となる正整数 n_1, n_2 は存在しない。

- $k=3$ とすると、

$$2=\left(1-\frac{1}{n_1}\right)+\left(1-\frac{1}{n_2}\right)+\left(1-\frac{1}{n_3}\right),$$

すなわち、

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=1$$

となる正整数 $n_1,\ n_2,\ n_3$ を $n_1 \leqq n_2 \leqq n_3$ として求めて、$(n_1, n_2, n_3)=(2,3,6),\ (2,4,4),\ (3,3,3)$ が得られる。

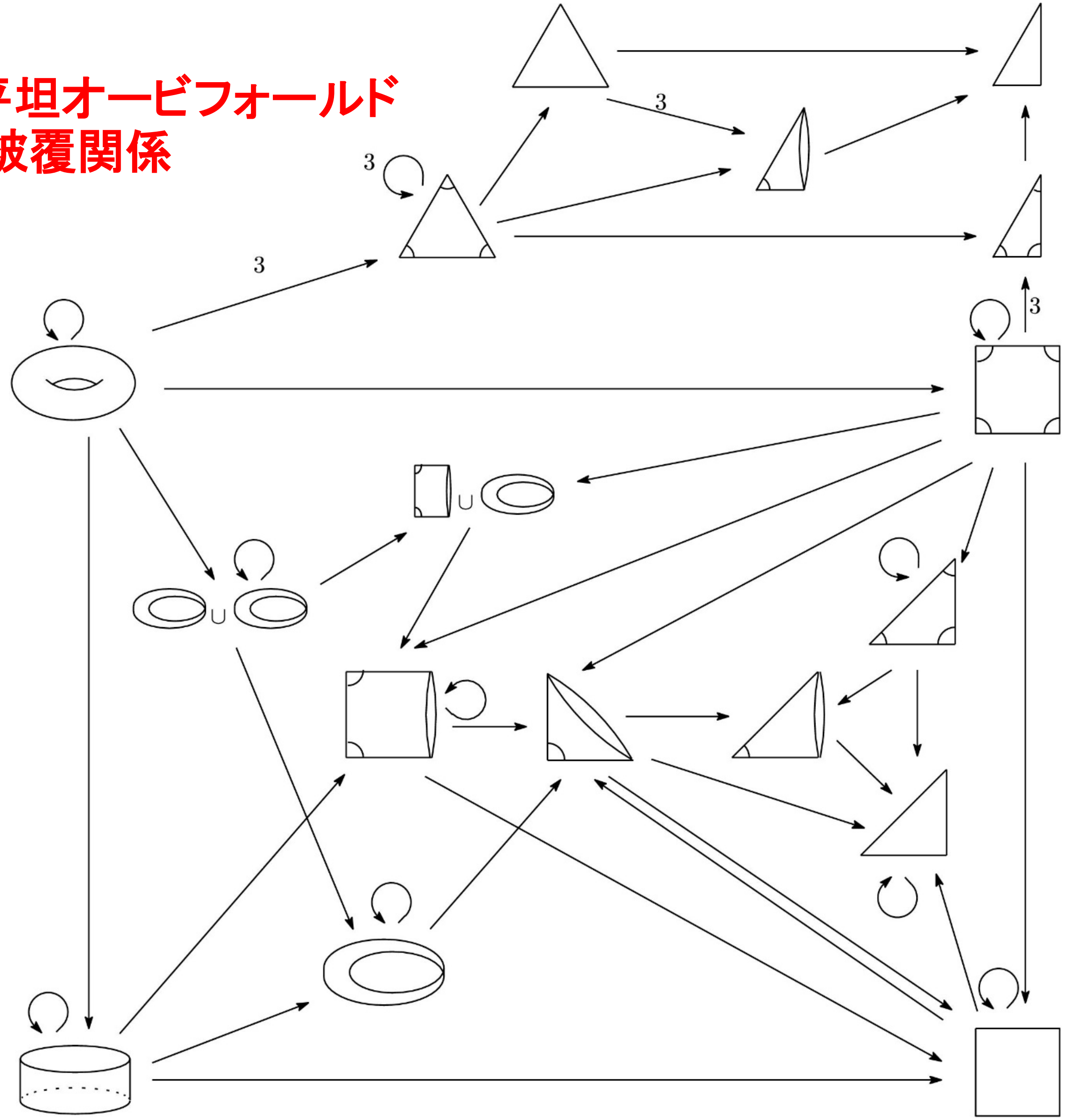
- $k=4$ とすると、

$$2=\left(1-\frac{1}{n_1}\right)+\left(1-\frac{1}{n_2}\right)+\left(1-\frac{1}{n_3}\right)+\left(1-\frac{1}{n_4}\right)$$

となるのは、$n_1=n_2=n_3=n_4=2$ のときである。

- これで、求める２次元平坦オービフォールドは、T^2, Kl, $RP^2(2,2)$, $S^2(2,3,6)$, $S^2(2,4,4)$, $S^2(3,3,3)$, $S^2(2,2,2,2)$ の７種であることがわかった。
- 境界を持つ２次元平坦オービフォールドを分類するには、上に得られた７種のオービフォールドがどのような線対称の軸を持つかを考察する。
- T^2 は１通り、Kl は１通り、$RP^2(2,2)$ は軸を持たない。$S^2(2,3,6)$ は１通り、$S^2(2,4,4)$ は２通り、$S^2(3,3,3)$ は２通り、$S^2(2,2,2,2)$ は３通りの軸を持つ。
- 従って、境界を持つ平坦オービフォールドは１０種ある。

2次元平坦オービフォールドの正則被覆関係



コンパクト2次元平坦オービフォールドが17種類であることと、平面上の周期性と対称性を持つ図形が17種類であることは同じことである。

この17種類については、

Jeff Weeks氏の千手観音イラストレータ（KaleidoPaint）

http://www.geometrygames.org/KaleidoPaint/index.html

で、確認すると良い。

また、次のウェブページも参考になる。

http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/urabe/urabe/index.html

次回の内容を含め、この俯瞰講義の最後の3コマを担当される河野俊丈教授の「結晶群」（共立講座 数学探検 7）を参考図書として挙げる。

また、 http://tambara.ms.u-tokyo.ac.jp/2011/201109v2ni.pdf

にも解説がある。