

クレジット:

UTokyo Online Education 学術俯瞰講義 2016 齊藤宣一

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。

シミュレーションと多角形・多面体

齊藤 宣一 (さいとう のりかず)

<http://www.infsup.jp/saito>

数理科学研究科

2016 年 6 月 16 日 16:50–18:35

2016S 学術俯瞰講義

図形から広がる数理科学 第 9 回

今日の内容

- ① シミュレーション：ニュートンからスパコンへ
- ② 三角形分割と有限要素法
- ③ 歴史は繰り返す：曲面の面積

§1 と §2 は「お話」になってしまいます。 §3 の内容は、自分で計算が再現できるものだと思います。

① シミュレーション：ニュートンからスパコンへ

② 三角形分割と有限要素法

③ 歴史は繰り返す：曲面の面積

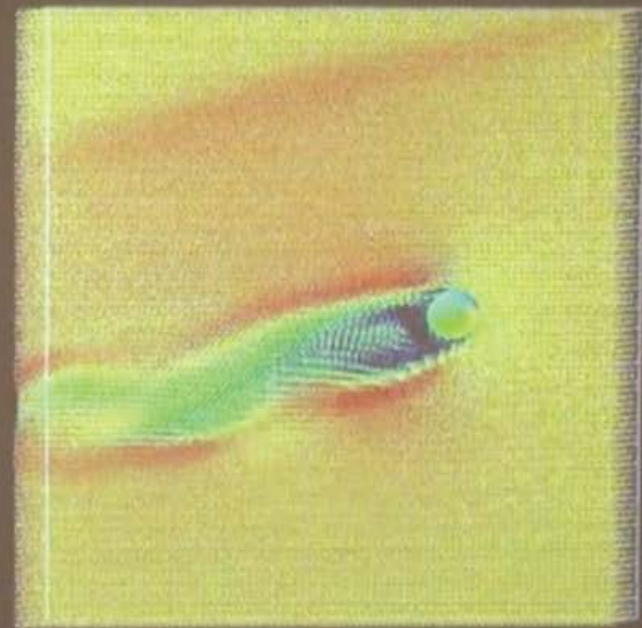
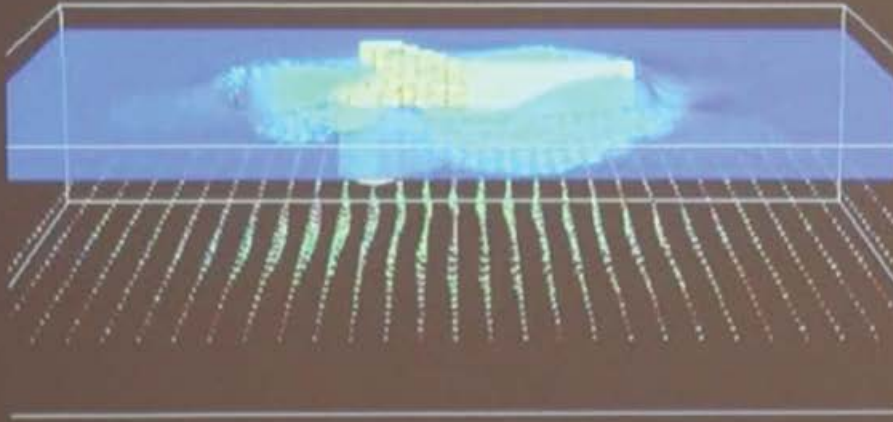
「シミュレーション」とは何？

シミュレーション (simulation) という言葉はよく聞か、

- 広辞苑では,
「物理的・生態的・社会的等のシステムの挙動を, これとほぼ同じ法則に支配される他のシステム, またはコンピュータの挙動によって, **模擬**すること」
- Wikipedia では,
- google では,
- **シュミ**レーションではない.

この講義で扱うのは, **コンピュータを用いたシミュレーション**
コンピュータ上での物理現象の模擬実験 → 例を見てもらいます

ラグビーボールの運動

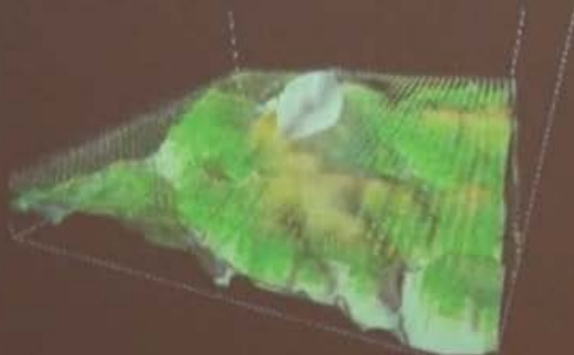


農業用ため池の水質浄化

time : 0.41900

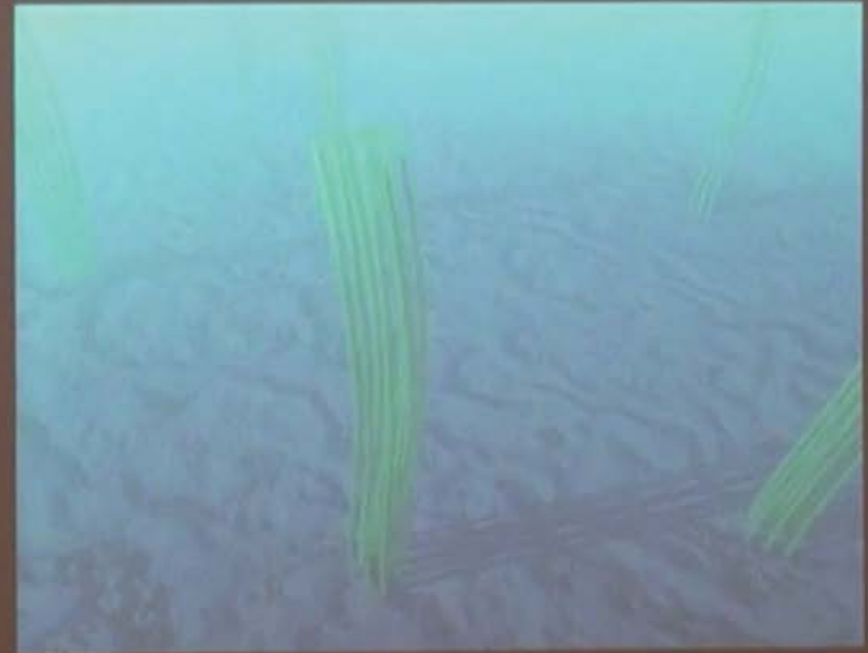
step : 420

ゴミ焼却施設による汚染物質の拡散



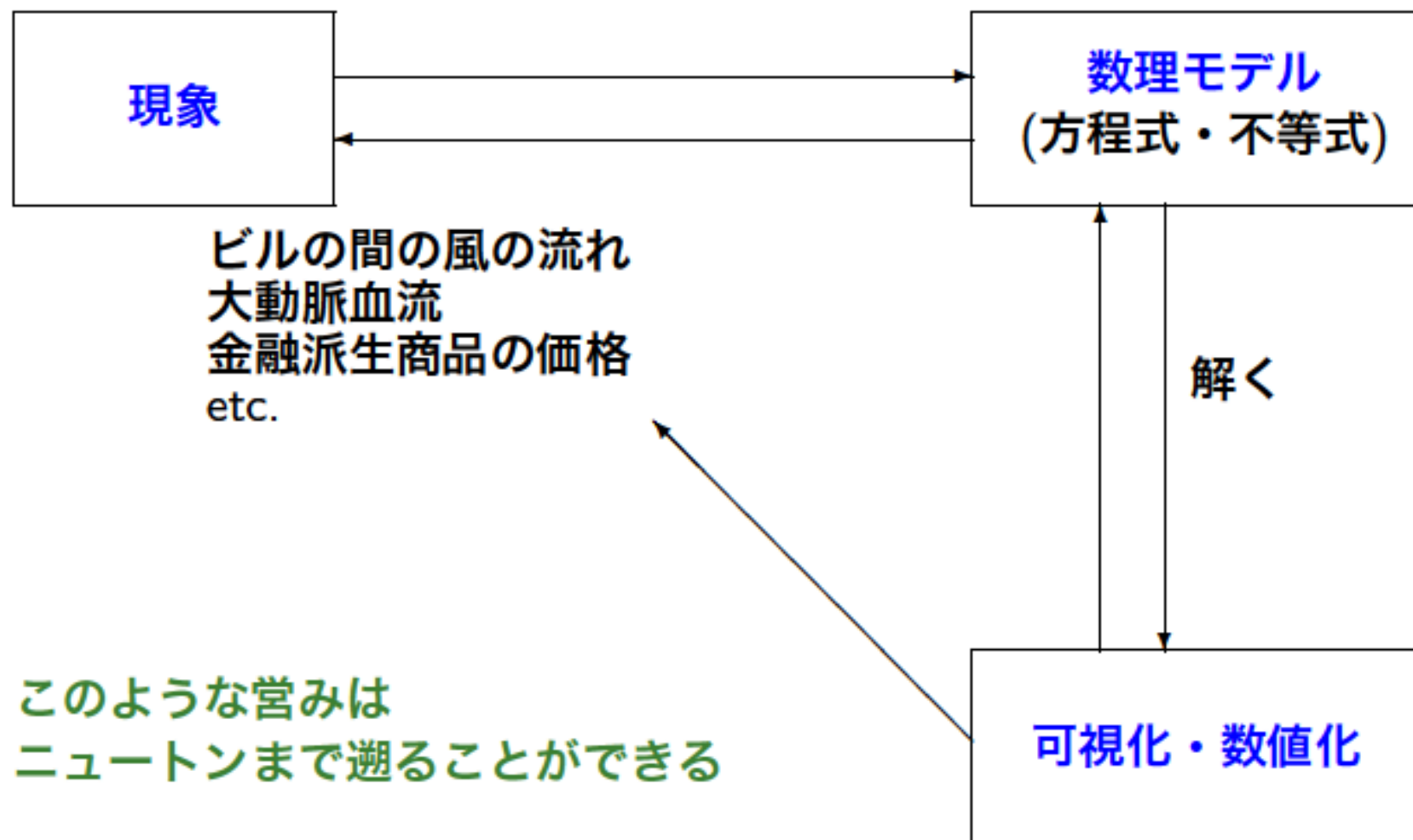
2本のろうそくの相互
作用による不安定性

海底植物の運動



“何”を計算しているか？

あいだに数理モデル（方程式）あり

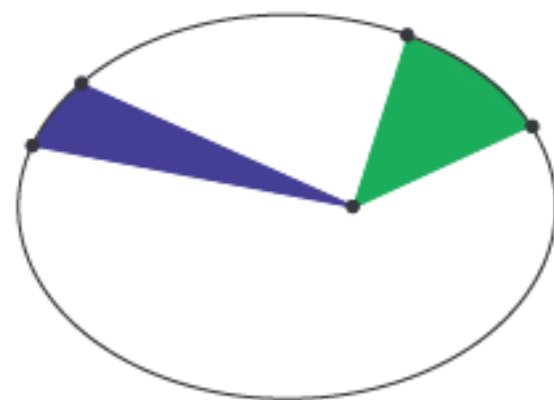


ニュートンによる惑星運動の解析

ケプラーの法則

- ① 惑星は太陽を焦点の1つとする楕円軌道上を運動する (1609)
- ② 太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に掃く面積は一定である (1609)
- ③ 惑星の公転周期の自乗は、楕円軌道の長半径の三乗に比例する (1619)

- ヨハネス・ケプラー
(Johannes Kepler, 1571–1630)
- ティコ・ブラーエ
(Tycho Brahe, 1546–1601)

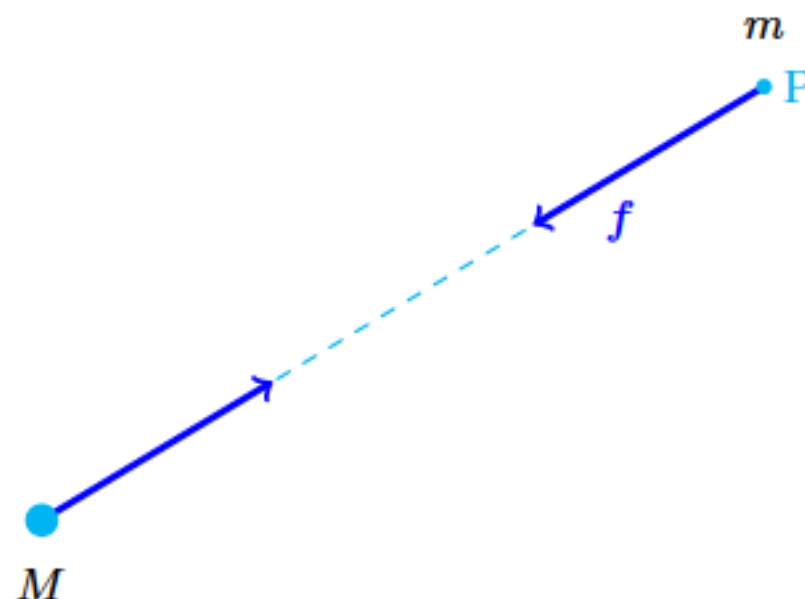


ニュートン (Isaac Newton, 1642–1727) は、これらのことを、微分積分学、力学の法則、万有引力の法則を基に、**数学的に説明した**。
自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア) 1687 年

惑星運動の方程式

- M : 太陽の質量, m : 惑星の質量. ($m/M \ll 1$ と仮定)
- 太陽の位置を位置ベクトルの基準 (原点)
- $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$: 時刻 t における惑星の位置ベクトル
- G : 万有引力定数
- $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$: 太陽と惑星の距離

$$m \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{x}(t) = -\frac{GMm}{r(t)^3} \boldsymbol{x}(t)$$



惑星運動の方程式

実際は、平面運動を考えれば十分：

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{GM}{r(t)^3}x(t), \quad \frac{d^2}{dt^2}y(t) = -\frac{GM}{r(t)^3}y(t)$$

(適当な初期条件 $x(0) = a_1, y(0) = a_2, x'(0) = a_3, y'(0) = a_4$)

- この微分方程式 (differential equations) を満たす $(x(t), y(t))$ を見つければ惑星の運動がわかったことになる (これを、微分方程式を解くと言う。)
- 初等的な求積法

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 2, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = t^2 + t + 1$$

- 初等的な求積法は適用できない。
- 解を初等的な関数を用いて表現できない。 (これを、解析的には解けないと言う)
- しかし、(ニュートンがやったように) 間接的な方法で、ケプラーの法則を証明することはできる。
- しかし、それでは、ある時刻 t で、 $x(t) = ?$, $y(t) = ?$ はわからないまま。
▷ そこで、 $x(t_n) \approx X^n$, $y(t_n) \approx Y^n$ を求める (数値解法, 近似解法)

例題

例として、次の微分方程式を満たす $u(t)$ を求める。

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t) \quad (0 < t < 1), \quad u(0) = 1$$

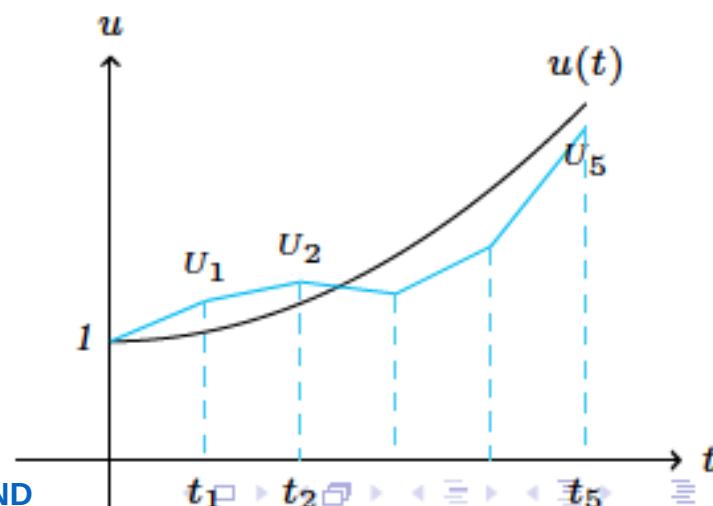
微分係数の定義から $\frac{du}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \approx \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$ が期待できる。そこで、正の整数 N をとって、 t 軸上に分点

$$t_n = nh \quad (n = 0, 1, \dots, N), \quad h = 1/N$$

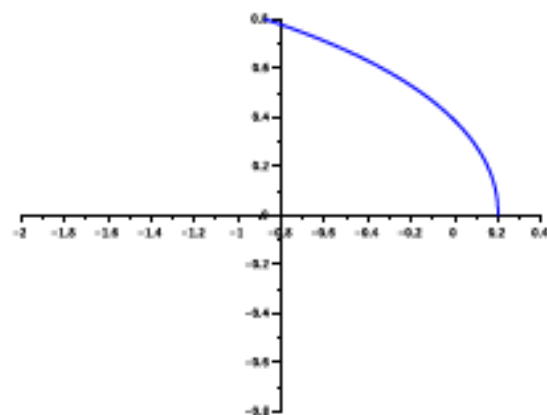
を取り、 $U_n \approx u(t_n)$ を求めるために、

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{h} = U_n \quad (\text{Euler 法})$$

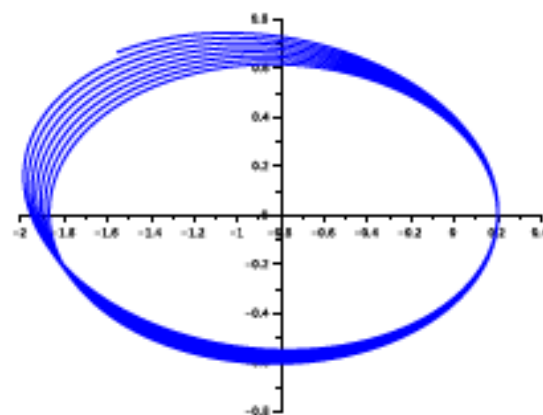
を解く。実は、 $U_N = (1 + \frac{1}{N})^N \rightarrow e$ 。



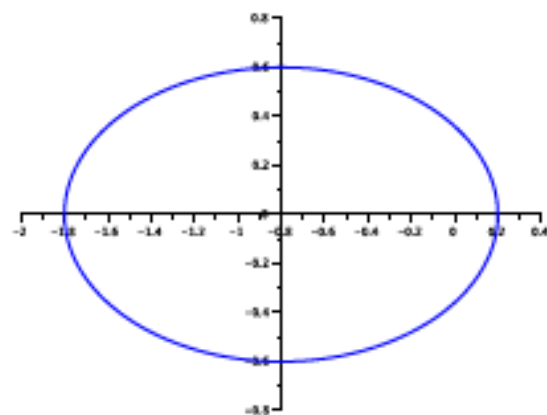
惑星運動の方程式を解く



Euler 法



Heun 法



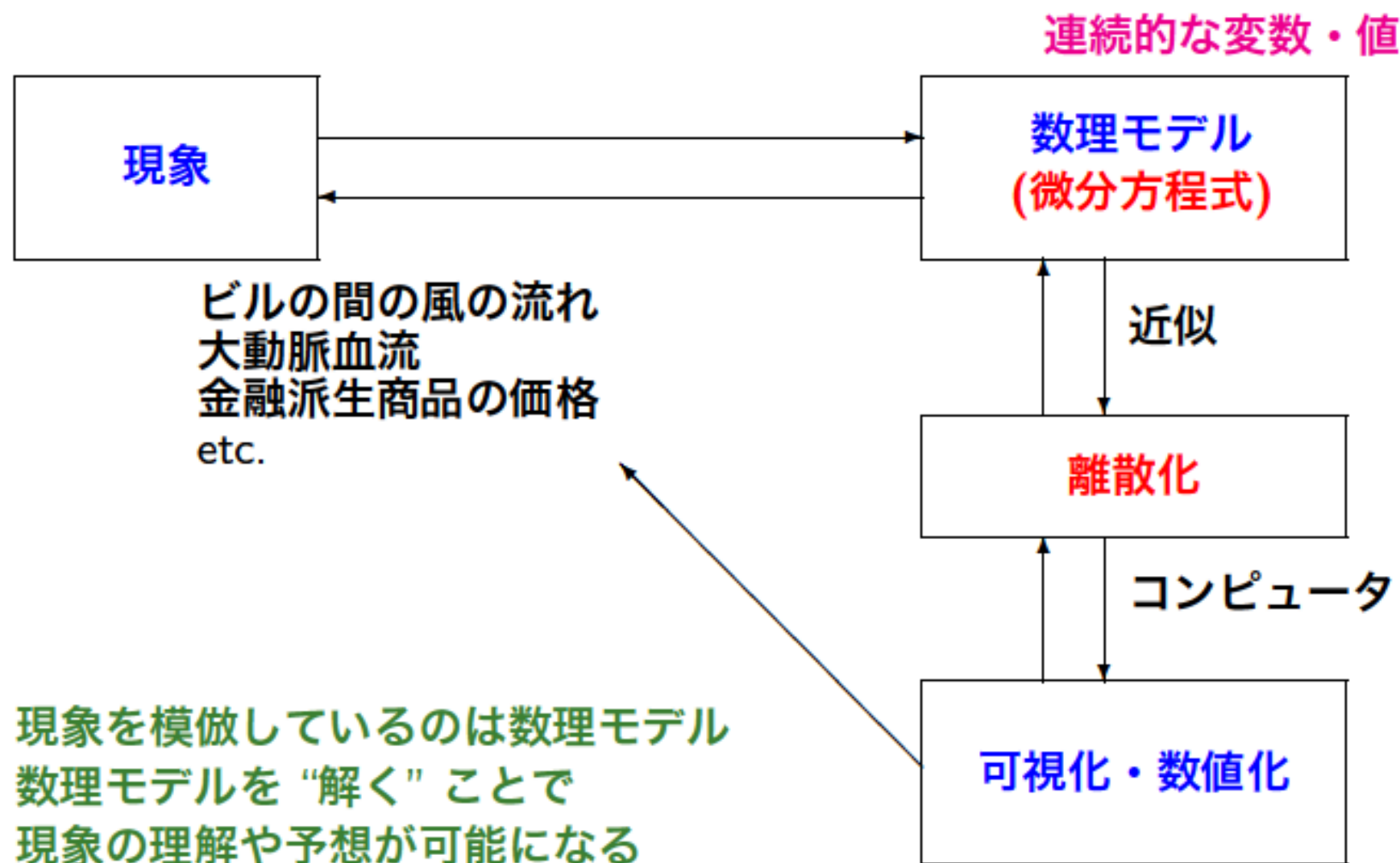
Runge-Kutta 法

ある条件下での計算例

すべて, $h = 0.01$, $T = 16\pi$

良い方法もあれば**良くない方法**もある

数理モデルとシミュレーション



数理モデルとシミュレーション

- 現実の問題（をモデル化した方程式）を解くには、もっともっと、労力がかかる。スーパーコンピュータが必要になることもある。
- 数理モデルの導出や、その数学的正当性の研究は、数学の重要な課題。
- それを解くための数値解法の提案や、その数学的正当性の研究も、数学の重要な課題。
- 実は、これらのことと、三角形の形について考察することは、深く関係がある。

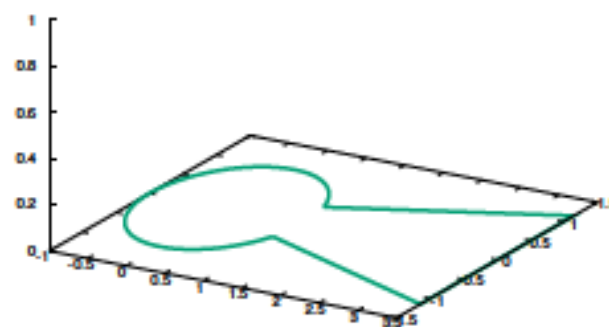
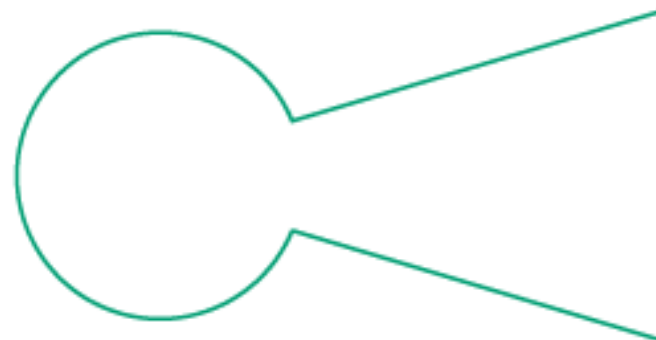
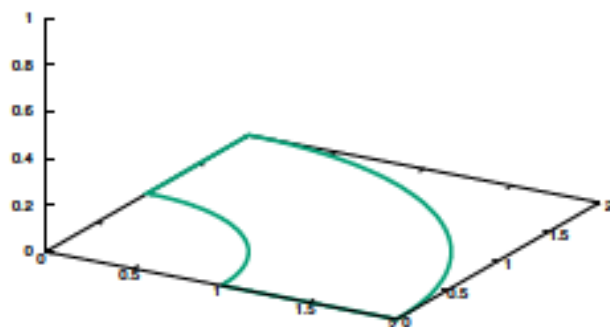
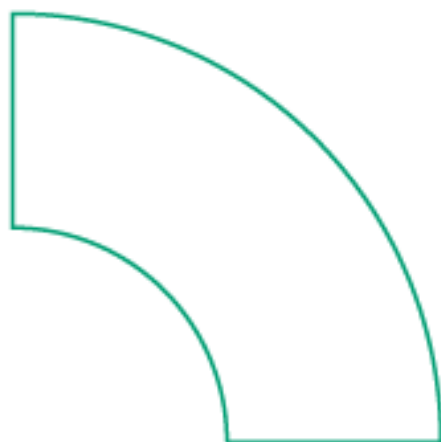
① シミュレーション：ニュートンからスパコンへ

② 三角形分割と有限要素法

③ 歴史は繰り返す：曲面の面積

膜の釣り合い

xy 平面上に置かれた枠 Γ に薄い膜が張ってある。膜に力を加えた時、膜はどう変形するか？



Poisson 方程式

“答え” は, Poisson (ポワッソン) 方程式を解けば得られる.

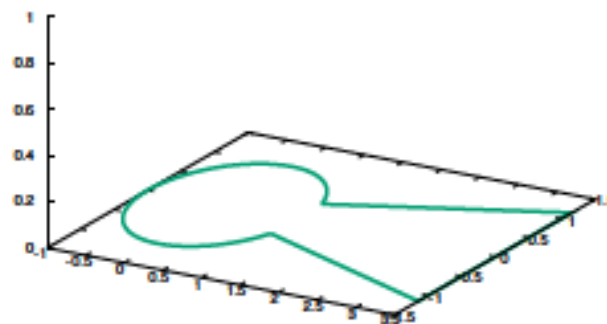
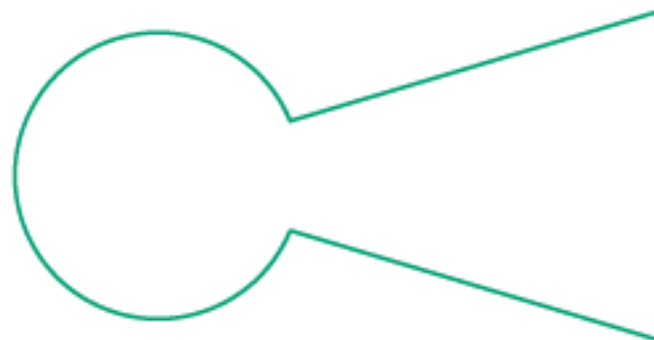
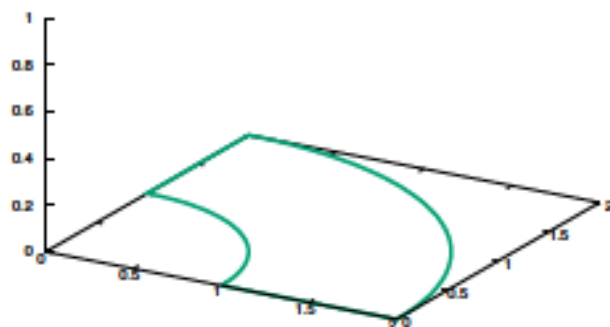
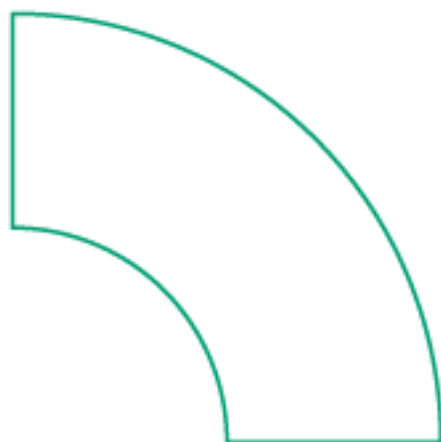
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y) \quad \left[\Delta u = -f \quad \Delta \text{ ラプラシアン} \right]$$

- $u = u(x, y)$ 膜の変位 (高さ), $f(x, y)$ 膜に加える力
- Siméon Denis Poisson (1781–1840)
- 単位を取り直すことで, 方程式を無次元化している
- 偏微分 (一つの変数は “気にせず”, もう一つの変数について微分する)

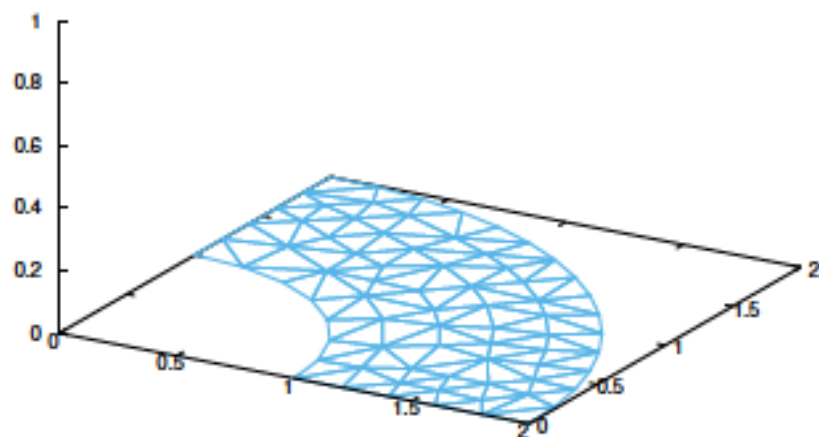
$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, b) = u_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a + h, b) - u(a, b)}{h}.$$

膜の釣り合い

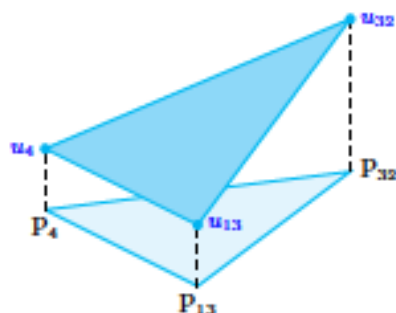
xy 平面上に置かれた枠 Γ に薄い膜が張ってある。膜に力を加えた時、膜はどう変形するか？



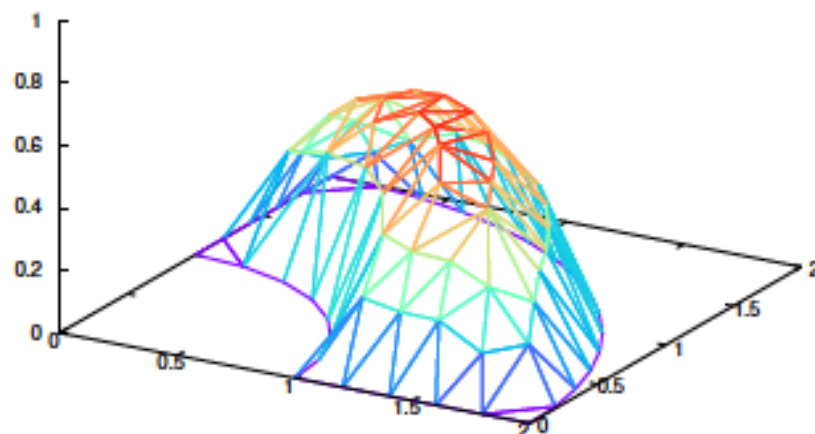
それでは、どうやって解くか？



[1] 枠内（領域）を重ならない三角形に分割する。各三角形の頂点に $P_1, P_2, \dots, P_N$ と番号をつける。（図の例では $N = 76$ ）



[3] 一つの三角形のみ拡大したもの。三角形の頂点は P_4, P_{13}, P_{32} 。



[2] 各三角形の頂点でのみ値（近似値）

$u_1, u_2, \dots, u_N$ を求め、それを“繋ぐ”

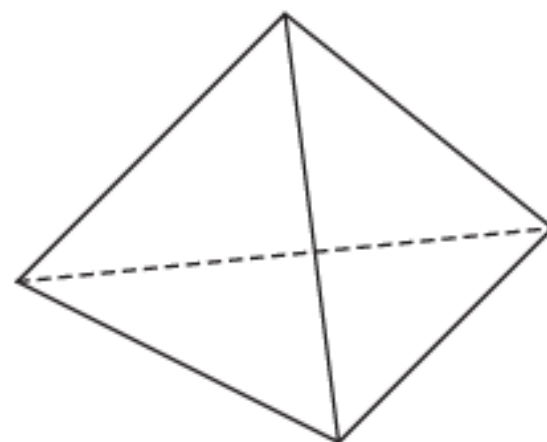
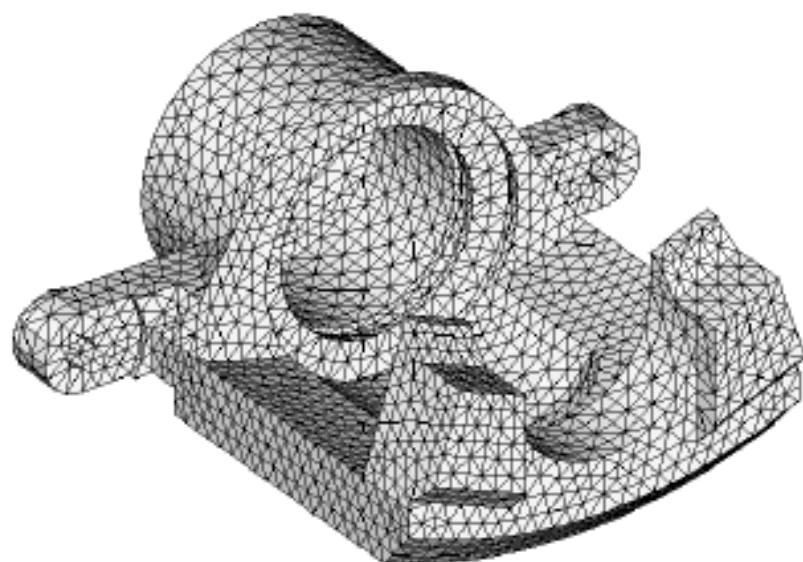
[4] $u_1, u_2, \dots, u_N$ を求める式は、連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}$$

になる (???). あとは、これを解けば良い。

有限要素法

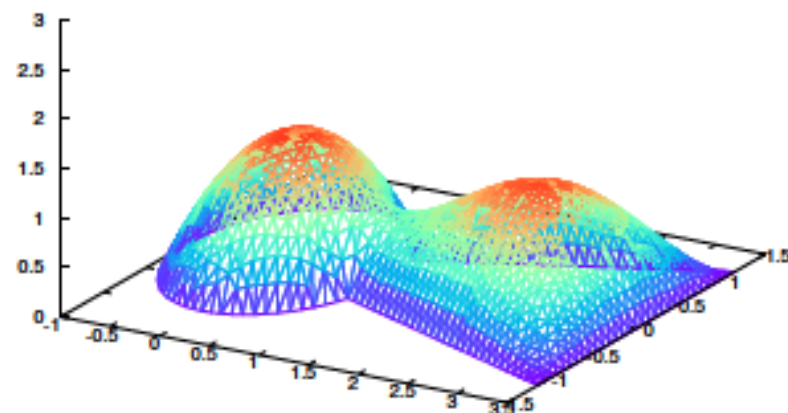
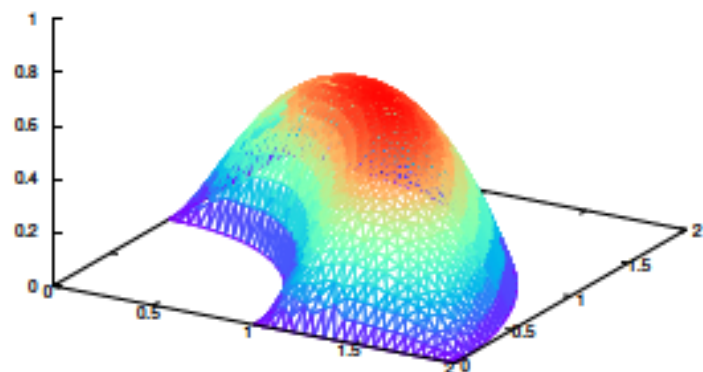
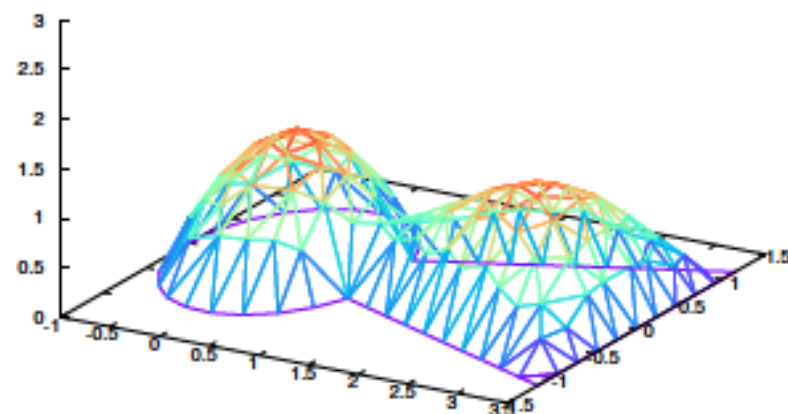
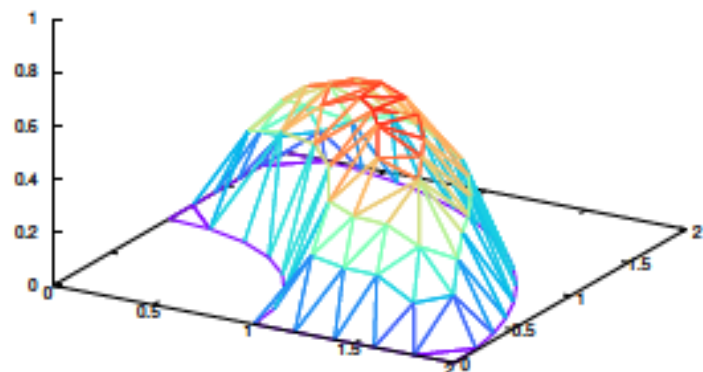
このような方法を有限要素法 (finite element method, FEM) という.



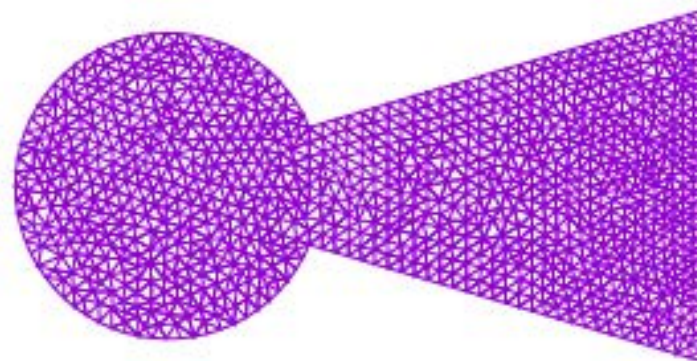
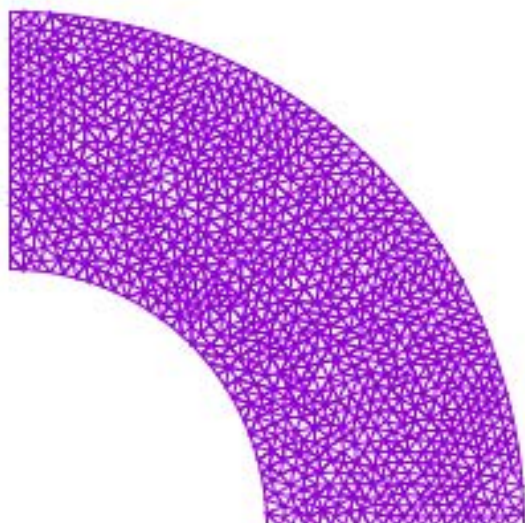
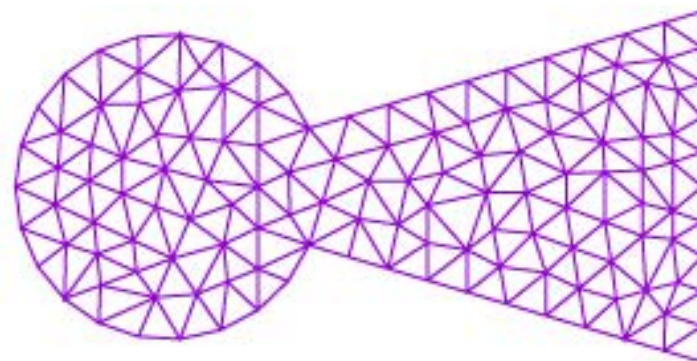
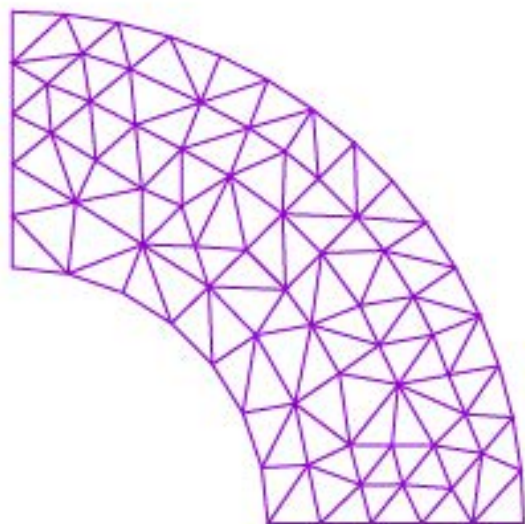
- 計算対象は, Poisson 方程式に留まらない. 空間 3 次元・時間 1 次元の問題でも活躍する
- 計算対象を, 三角形・四面体に分割し, 各四面体上で, 近似方程式をたてて, それを統合し, 近似解 (数値解) を得る
- 普通, 連立一次方程式を解くことに帰着される. 未知数の数は, 10^{10} 程度になることも.

計算された膜の形

$f(x, y) = 5$ という一様な力を加える.



計算に使った三角形分割



連立一次方程式

n 元の連立一次方程式 $Ax = b$ を解くことは、簡単なことか？
線形代数学の教科書には**クラメールの公式**が書いてある。

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

(細かい記号の説明は省略)

FLOPS (フロップス, floating-point operations per second)

- 1 秒間に演算 (浮動小数点数演算) を何回行える？
- 現在 (2016 年), パーソナルコンピュータや高性能のスマートフォンは 100 GFLOPS 程度
- スーパーコンピュータは 10 PFLOPS を超える

1 GFLOPS (ギガフロップス) = 10^9 FLOPS,

1 PFLOPS (ペタフロップス) = 10^{15} FLOPS

連立一次方程式を解くのに“何分”かかる？

クラメールの公式を（出てくる記号の定義通りに）計算する際に，必要な乗除算の回数は， n が十分大ならば， $(n+1)!$ 程度.

10^{12} FLOPS の性能がある コンピュータでの計算時間

n	乗除算回	秒	日	年
10	$3.99 \cdot 10^7$	$3.99 \cdot 10^{-5}$	$4.62 \cdot 10^{-10}$	$1.27 \cdot 10^{-12}$
20	$5.11 \cdot 10^{19}$	$5.11 \cdot 10^7$	$5.91 \cdot 10^2$	1.62
30	$8.22 \cdot 10^{33}$	$8.22 \cdot 10^{21}$	$9.52 \cdot 10^{16}$	$2.61 \cdot 10^{14}$

10^{17} FLOPS の性能がある コンピュータでの計算時間

n	乗除算回	秒	日	年
10	$3.99 \cdot 10^7$	$3.99 \cdot 10^{-10}$	$4.62 \cdot 10^{-15}$	$1.27 \cdot 10^{-17}$
20	$5.11 \cdot 10^{19}$	$5.11 \cdot 10^2$	$5.91 \cdot 10^{-3}$	$1.62 \cdot 10^{-5}$
30	$8.22 \cdot 10^{33}$	$8.22 \cdot 10^{16}$	$9.52 \cdot 10^{11}$	$2.61 \cdot 10^9$

ビックバン： 10^{10} 年前

では、どうするか？

一方で、**ガウスの消去法**ならば、 $n = 30$ くらいなら**一瞬**で解ける！
実際、ガウスの消去法を実行する際に必要な乗除算回数は $\frac{1}{3}n^3$ 程度。

その他にも、大規模 (n が十分大) な連立一次方程式を解くための**新解法の研究**は、現在でもとても活発。

数学的な公式がある + 高性能のコンピュータがある $\neq$ 問題が解ける

技術で実現可能な
数学的な理論がある + 理論を現実的な時間で
実現できる技術がある = 問題が解ける

有限要素法の世界

- 現在, 最も強力な微分方程式の数値解法 (の内の一つ)
 - 流体力学, 電磁気学, 構造力学, 生命科学, 臨床医学, ...
 - 汎用コード, 商用ソフト, フリーソフト, ...
 - 端正な数学理論, ...
- 航空工学の急速な発展 (1940 年代後半 ~) ... 固体力学・構造力学の分野
 - Turner, Clough, Martin and Topp (1956)
 - Clough (1960) finite-element, ...
- 数学的研究の黎明期 (1960 後 ~1970 前)
 - 有限要素法は Galerkin 法 (Ritz 法) の特殊な場合, ...
 - 微分方程式の弱解を近似している, ...
- 齊藤宣一, 数値解析—偏微分方程式の解を見る, 「数学の現在 e (斎藤, 河東, 小林編), 東京大学出版会, 2016 年, 3,240 円」の第 8 講

ある論文の冒頭部分、、

As Henri Poincaré once remarked, *solution of a mathematical problem* is a phrase of indefinite meaning. Pure mathematicians sometimes are satisfied with showing that the non-existence of a solution implies a logical contradiction, while engineers might consider a numerical result as the only reasonable goal. Such one sided views seem to reflect human limitations rather than objective values. In itself mathematics is an indivisible organism uniting theoretical contemplation and active application.

This address will deal with a topic in which such a synthesis of theoretical and applied mathematics has become particularly convincing. ...

これは次の論文 (1943 年!) の冒頭部分：

R. Courant: *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943) 1–23.
pdf ファイルが入手可能です。一読を薦めます。

有限要素法の誕生: Courant (1943) Appendix

著作権等の都合により、
ここに挿入されていた画像を削除しました。

R. Courant (1943) Variational methods for the
solution of problems of equilibrium and vibrations,
Bulletin of the American Mathematical Society
49(1):1-23, p.21.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9904-1943-07818-4>

しかし、この手法が現実的な手法として認識されるには、電子計算機 (コンピュータ) の登場を待たねばならなかった。

Richard Courant (1888–1972)

- 師匠は D. Hilbert
- ニューヨーク大学教授 (1936–)
- Courant Institute of Mathematical Sciences
- *Methoden der Mathematischen Physik*
数理物理学の方法, クーラン & ヒルベルト
- *What is Mathematics?* (数学とは何か)
ロビンズと共著
- C. リード : クーラント—数学界の不死鳥, (加藤瑞枝 訳), 岩波書店, 1978 年



<http://owpodb.mfo.de/detail?photoID=726>
Copyright: MFO, CC BY-SA 2.0 DE

Navier-Stokes方程式

Poisson 方程式よりも現実的な例として,

Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

- 粘性非圧縮性流体（液体 + 気体）の運動を記述
- $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1, u_2, u_3)$: 速度ベクトル場
- $p(x_1, x_2, x_3, t)$: 圧力スカラー場
- $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3, t) = (f_1, f_2, f_3)$: 外から流体に働く力の総和
- ρ : 質量密度 (正定数); ν : 動粘性係数 (正定数)
- L. M. H. Navier (1827), G. G. Stokes (1845)
- 岡本久: Navier-Stokes 方程式の数理, 東大出版, 2009 年

なぜ解きたいか？

- **理工学・医学の立場**：これを解くことでいろいろなことがわかる。
必要性は論を待たない。
- **数学の立場から**：わからないことだらけ

Millennium Problem (The Clay Mathematics Institute)

<http://www.claymath.org/>

<http://www.claymath.org/millennium-problems/navier-stokes-equation>

Navier-Stokes 方程式を $\mathbb{R}^3$ で考え、 $f = 0$ とする。このとき、“任意”の初期値に対して、

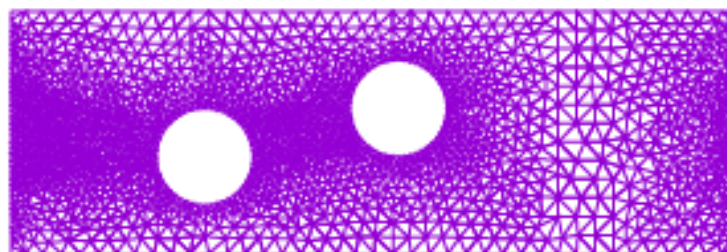
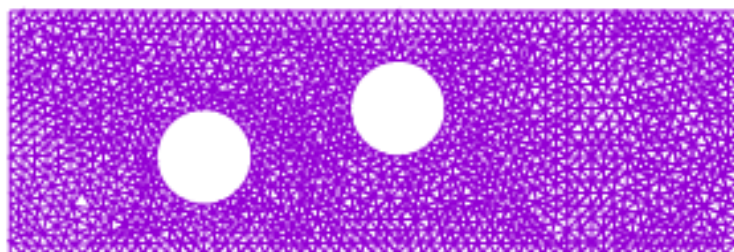
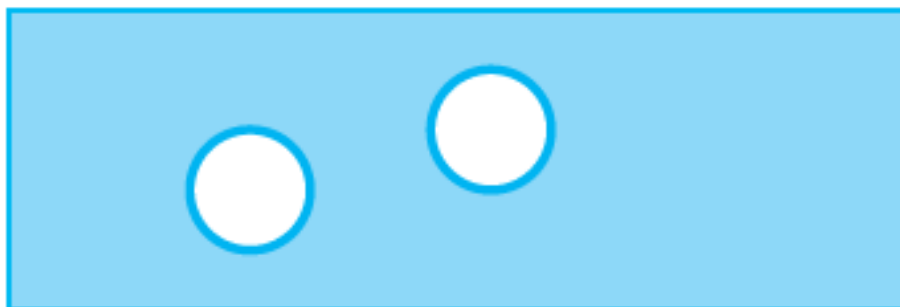
$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx < \infty$$

を満たす時間大域的古典解の存在・非存在？

\$1 million $\approx$ 1 億円

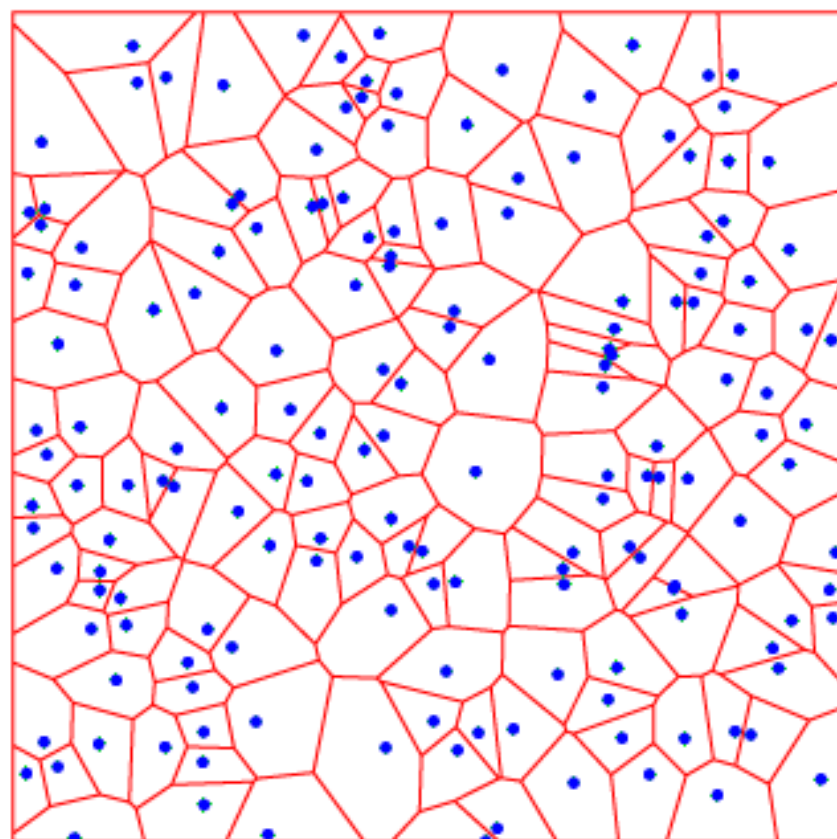
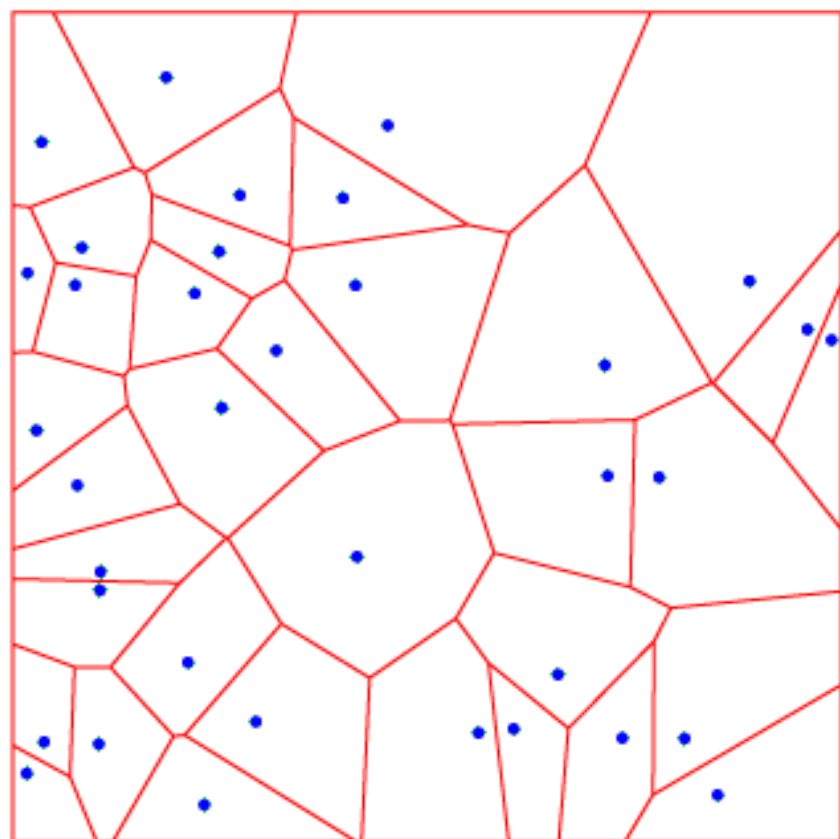
計算例

2つの円柱を通り過ぎる流れ.



このように複雑な形状をした領域を、どうやって三角形に分割すれば良いであろうか？一例を紹介する.

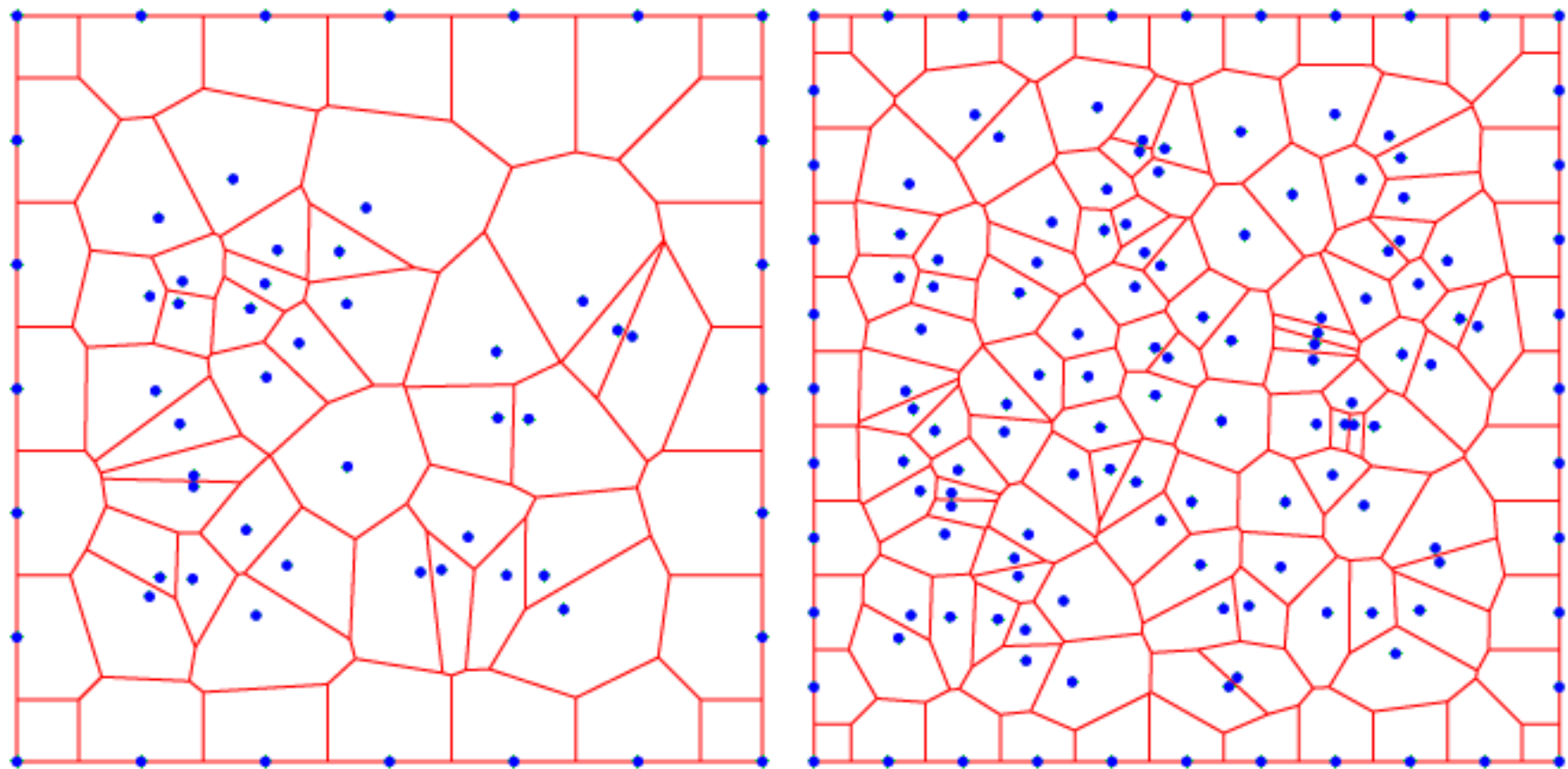
Voronoi 図



$P_1, P_2, \dots, P_N$: 母点の集合, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - P_i| < |x - P_j| \quad (j = 1, \dots, N, j \neq i)\}$$

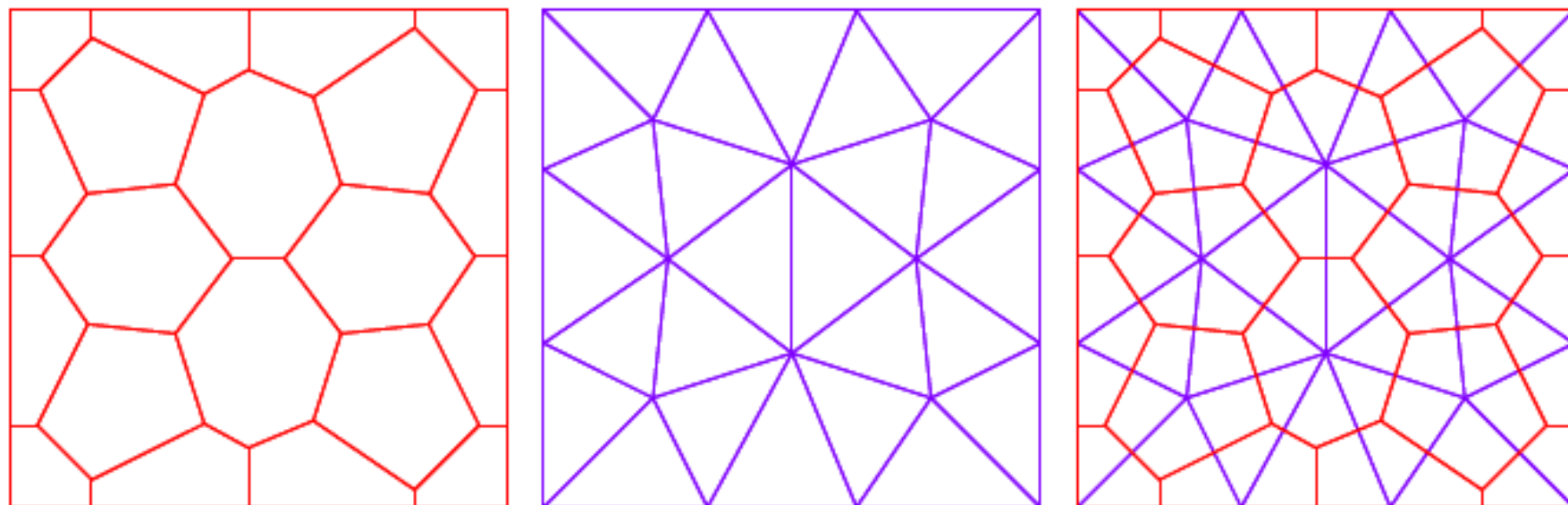
Voronoi 図



実際に使う時は，境界の上に多めに母点を配置しておく．

Delaunay 三角形分割

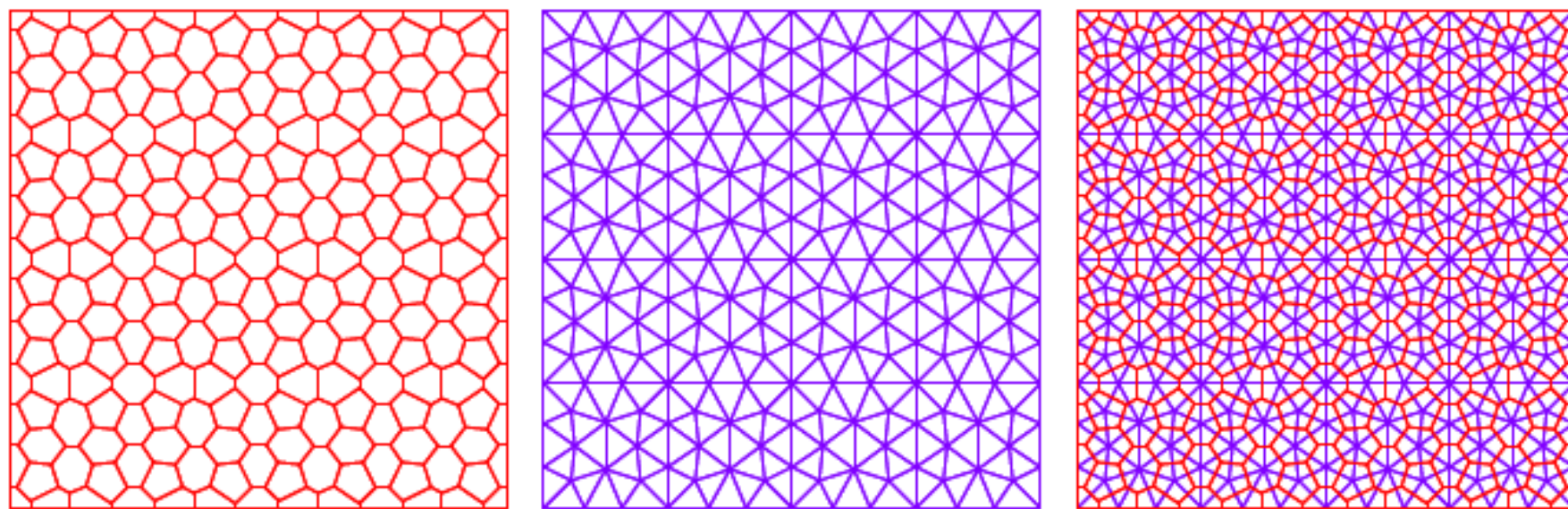
Voronoi 領域が境界辺を共有するとき、それらの母点を線分で結ぶ。



このようにして得られる三角形分割を、**Delaunay (ドロネー) 三角形分割**と言う。

Delaunay 三角形分割

Voronoi 領域が境界辺を共有するとき、それらの母点を線分で結ぶ。



このようにして得られる三角形分割を、**Delaunay (ドロネー) 三角形分割**と言う。

(それでは、どうやって Voronoi 図を得るのだろうか?)
もちろん、三角形分割の作り方は、これだけではない。

何が良い三角形分割か？

① 構造保存

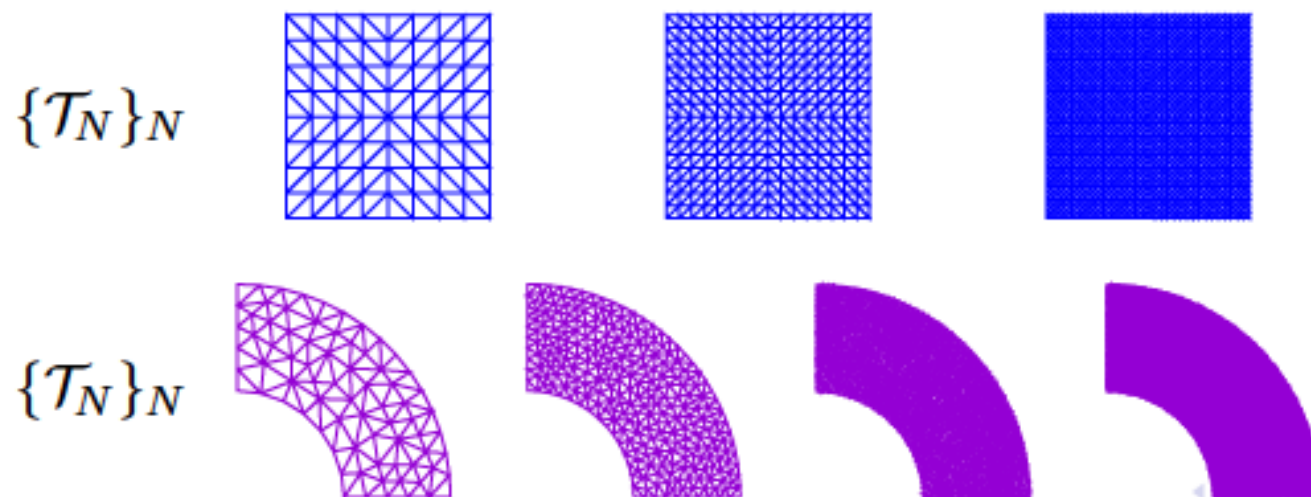
与えられた三角形分割 $\mathcal{T}$ で、エネルギー保存，正值性保存，順序保存など（問題により異なる）が再現されるか？

② 安定性・収束性

三角形分割の族 $\{\mathcal{T}\} = \{\mathcal{T}_N\}_N$ (三角形の集合の集合) を考えるとき，

$$u_N \rightarrow u \quad (N \rightarrow \infty) \quad \text{[収束性]}$$

となるか？ $N \rightarrow \infty$ は，頂点の数を増やすこと = 三角形分割を細かくしていくこと，に対応している．



収束性と三角形分割の条件

収束性が肯定的に解決されるための条件として、次が知られている：

最小角条件 (M. Zlamal, 1968)

適当な正の数 α に対して、分割に現れる三角形の角度が、すべて、 α 以上となるように、分割を細かくすれば良い。

最大角条件 (I. Babuška and A. K. Aziz, 1976)

適当な数 β ($60^\circ \leq \beta < 180^\circ$) に対して、分割に現れる三角形の角度が、すべて、 β 以下となるように、分割を細かくすれば良い。

外接半径条件 (小林・土屋, 2014)

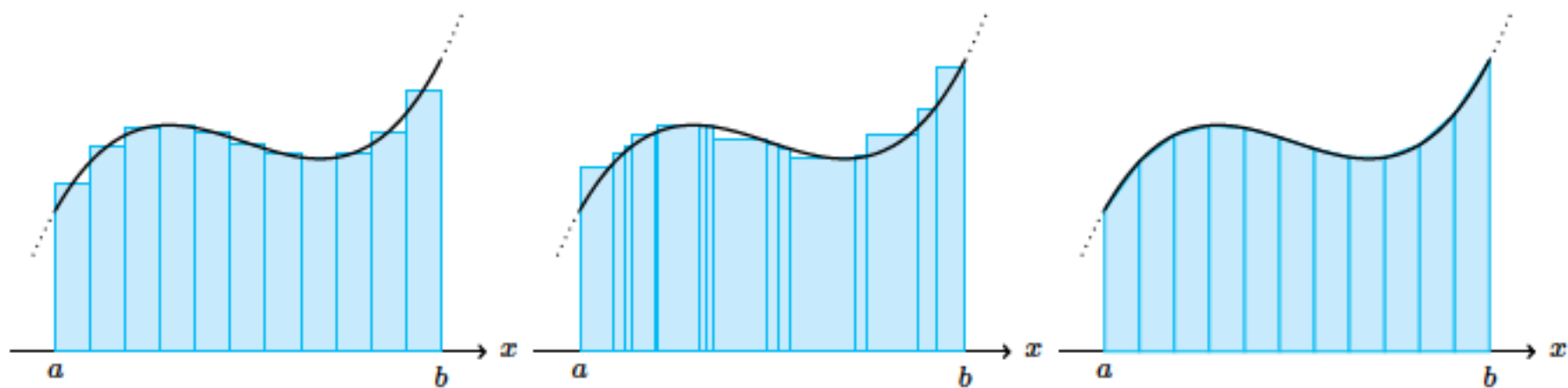
分割に現れる三角形の外接円の半径が 0 に近づくように、分割を細かくすれば良い。

有限要素法の数学理論

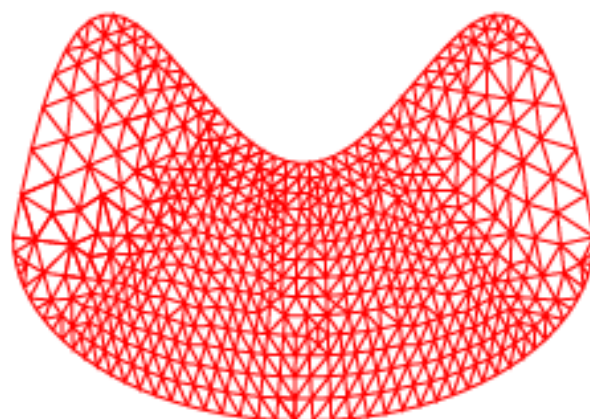
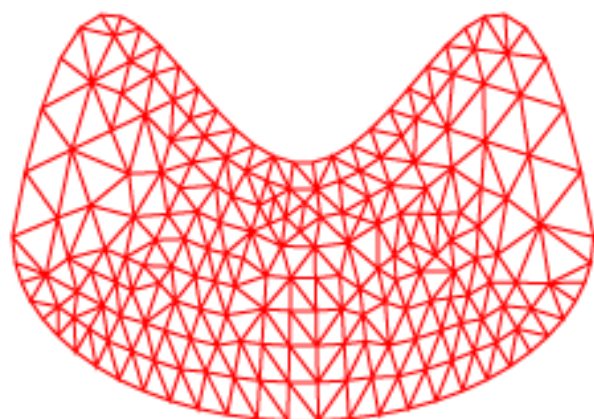
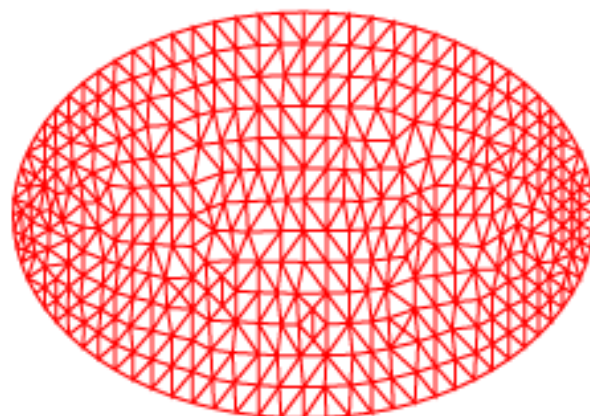
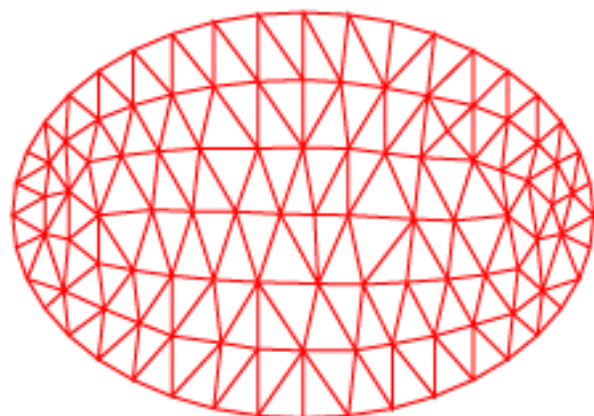
- 有限要素法の一つの顕著な特徴は、**端正な数学理論** によってその正当性が保証されていること。収束性の結果はその典型例。
- 是非説明したいが、そのためには、**Schwartz の超関数 (distribution)**, **Hilbert 空間**, **Sobolev 空間**, **コンパクト集合**などの数学的概念が必要になる。実際、数学科では、4年生と大学院の講義で基礎的な部分のみを扱う。
- そこで、もう少し簡単な問題を対象にして、**三角形分割の細分化**について検討してみる。

- ① シミュレーション：ニュートンからスパコンへ
- ② 三角形分割と有限要素法
- ③ 歴史は繰り返す：曲面の面積

図形の面積

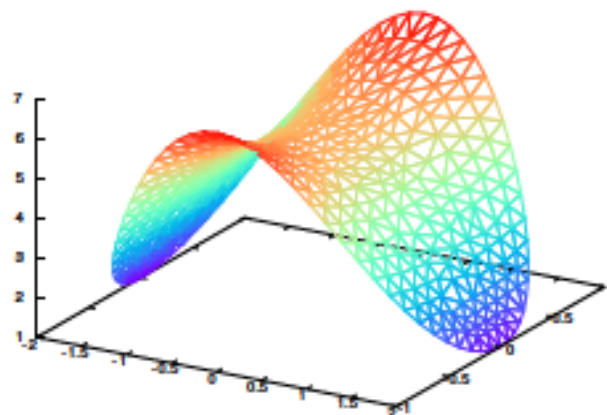
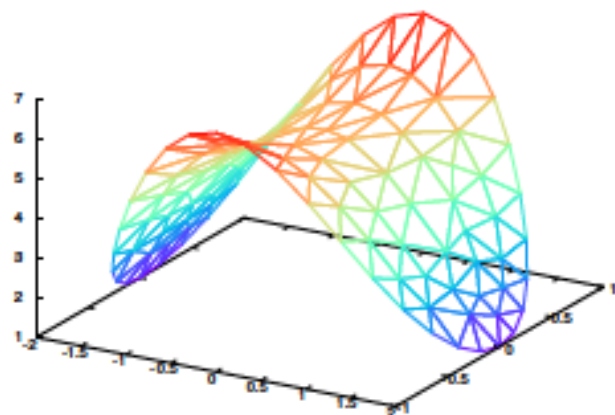


図形の面積



- 実際には、三角形を小さくしなければならないのは、曲がった部分の近くのみ
- 先に曲線上に点をたくさん置いて、それらが頂点となるように三角形をつくる

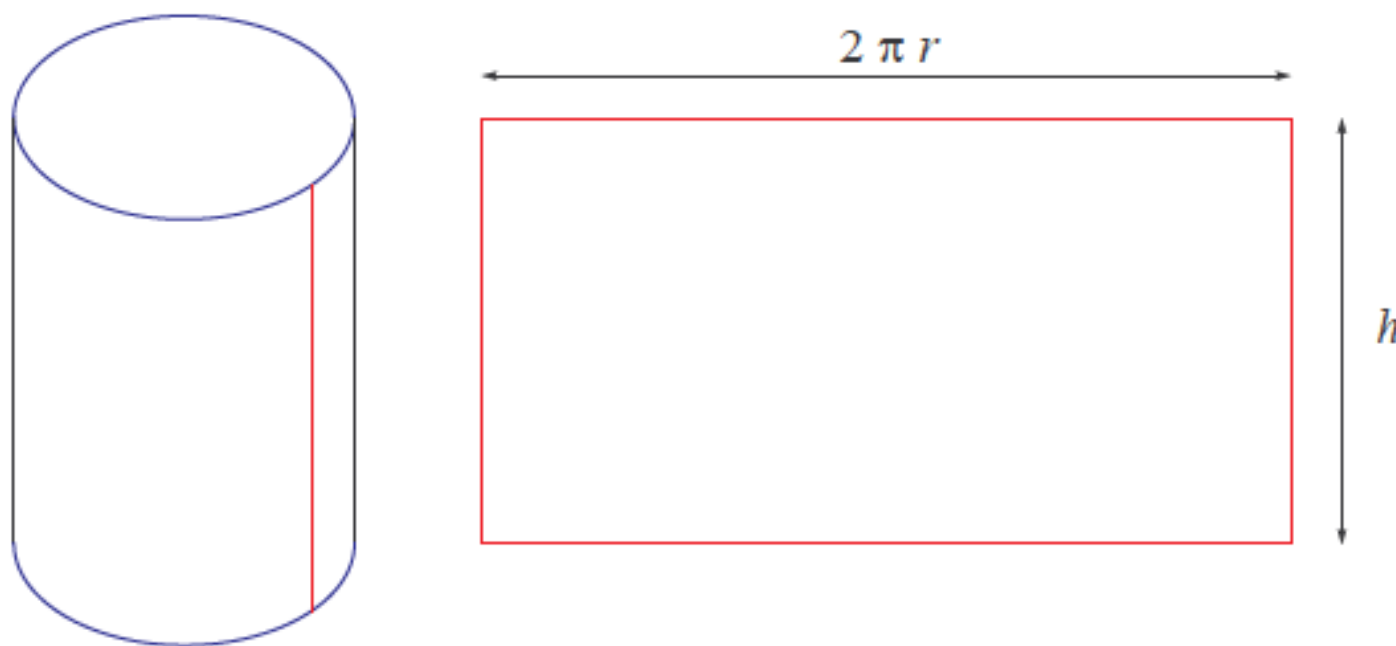
曲面の面積



- 各三角形の各頂点は曲面上にあり，各三角形は三頂点を結んでできる平らな図形（ふつうの三角形）とする
- 三角形をすべて集めてできる図形は，もとの曲面には含まれない
- このような三角形の集合を曲面の**三角形分割**
- 三角形の面積の総和を**三角形分割の面積**
- 三角形を小さくしていく操作を**分割を細かくする**という

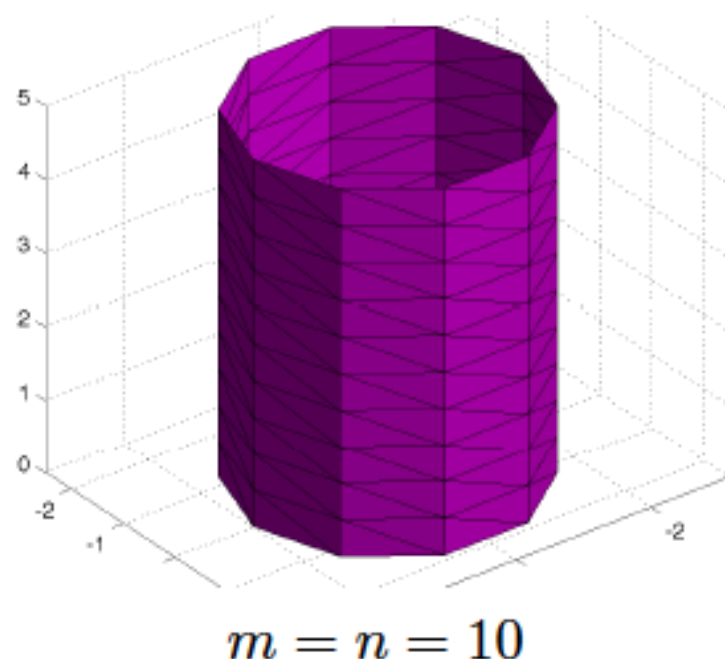
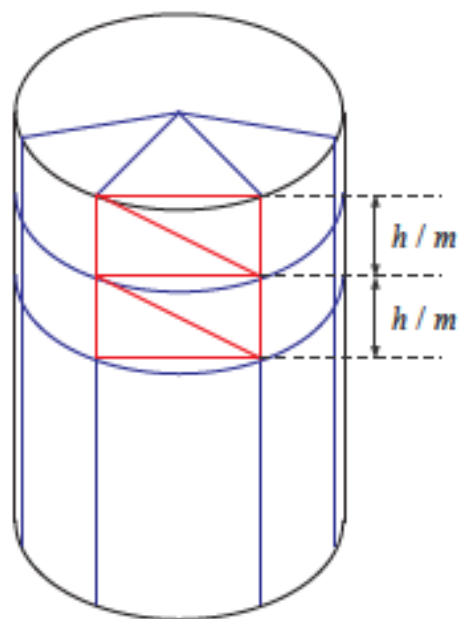
円柱の側面の面積を求めてみよう

半径 r ，高さ h の円柱を考える．側面の面積は， $S = 2\pi r h$ と習った．



方法 1

円柱を縦に m 等分
底面の円周上に等間隔に n 個の点を取る
上面と下面の対応する点を線で結ぶ
長方形に対角線を入れて三角形を作る



方法1

各三角形の高さは $\frac{h}{m}$

底辺の長さは, $2r \sin \frac{180^\circ}{n}$

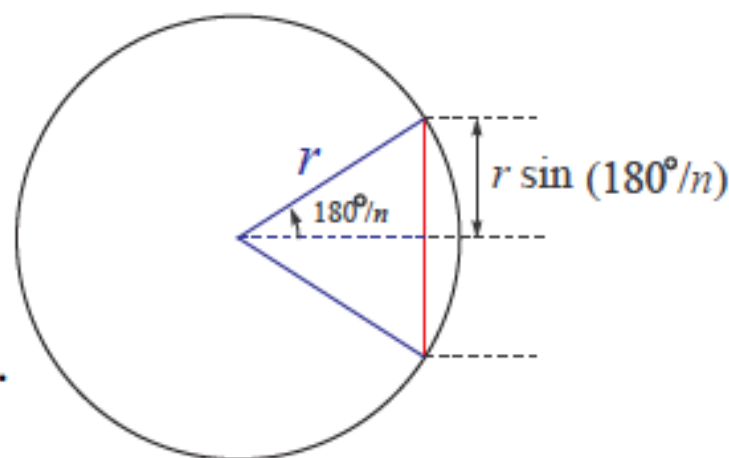
各三角形の面積 $\frac{1}{2} 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{h}{m}$

したがって, 三角形分割の面積は,

$$mn \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{h}{m} = 2rhn \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

m には関係しないので, これを S_n と書こう.

$$S_n = 2rhn \sin \frac{180^\circ}{n}.$$



方法1で実際に計算してみる

$r = 2$, $h = 5$ とする.

このとき, $S = 2\pi rh = 20\pi = 62.83185\dots$.

n	S_n	$ S_n - 20\pi $
16	62.4289	0.4030
32	62.7310	0.1009
64	62.8066	0.0252
128	62.8255	0.0063
256	62.8303	0.0016
512	62.8315	0.0004

方法2

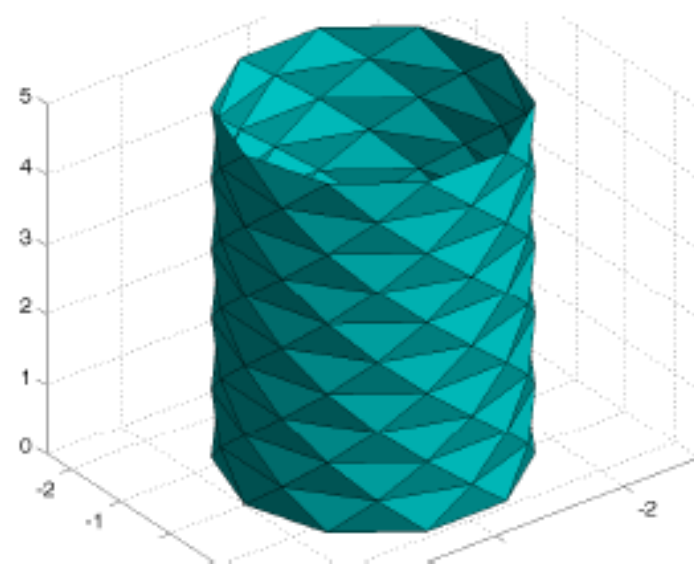
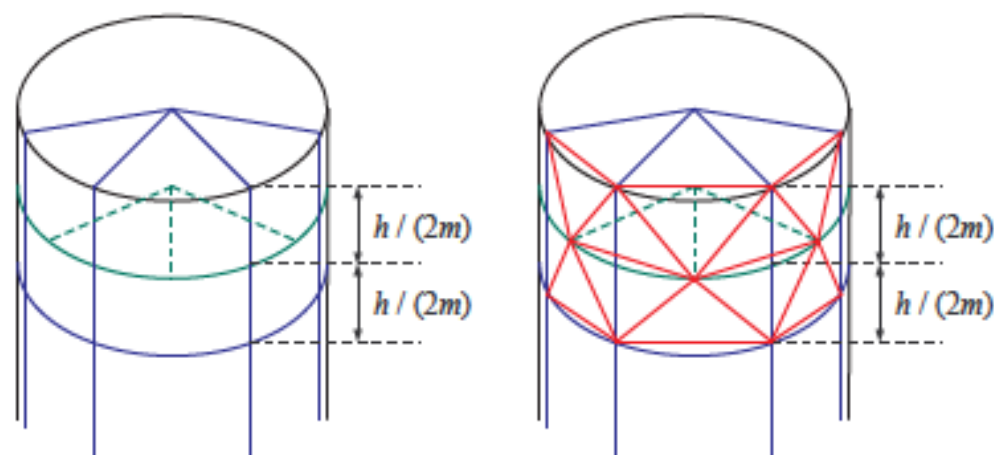
多面体の作り方は、これだけではない！

円柱を縦に $2m$ 等分

各“切れ目”の底面の円周上に等間隔に n 個の点を取る（前と同じ）

ただし、今度は、半分ずらしたものを交互に考える

これらを利用して三角形を作る



$$m = 5, n = 10$$

方法2

先ほどと同様に、三角形の面積を計算して、三角形分割の面積を求めると

$$\frac{1}{2} \cdot \underbrace{2r \sin \frac{180^\circ}{n}}_{\text{底辺}} \cdot \underbrace{\sqrt{r^2 \left(1 - \cos \frac{180^\circ}{n}\right)^2 + \left(\frac{h}{2m}\right)^2}}_{\text{高さ}} \cdot \underbrace{(2 \cdot n \cdot 2m)}_{\text{個数}}.$$

今度は、 m と n の値を指定しなければならないので、 $m = n$ として、上の面積を T_n と書こう。

再度、 $r = 2$, $h = 5$ の場合を計算する ($S = 62.8318\dots$) .

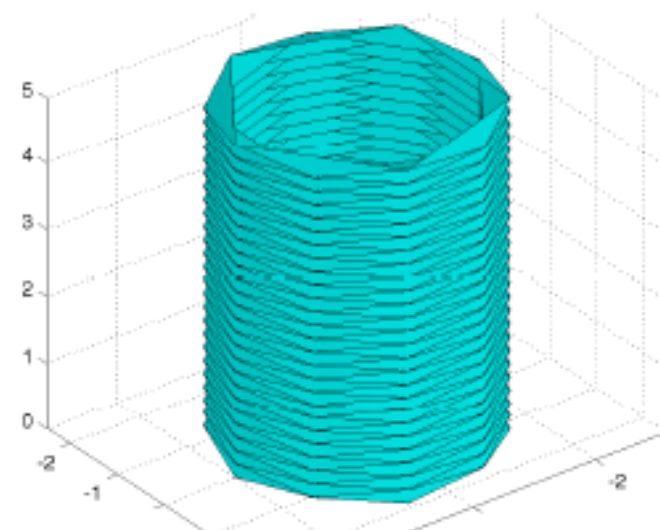
n	T_n	$ T_n - 20\pi $
16	64.2894	1.4575
32	63.2058	0.3739
64	62.9260	0.0941
128	62.8554	0.0236
256	62.8377	0.0059
512	62.8333	0.0015

方法2

ところが、、、

$m = n^2$ において、面積を T'_n と書く

n	T'_n	$ T'_n - 20\pi $
16	253.5	190.6
32	255.3	192.4
64	255.7	192.9
128	255.8	193.0
256	255.9	193.0
512	255.9	193.1



$n = 5, m = 25$

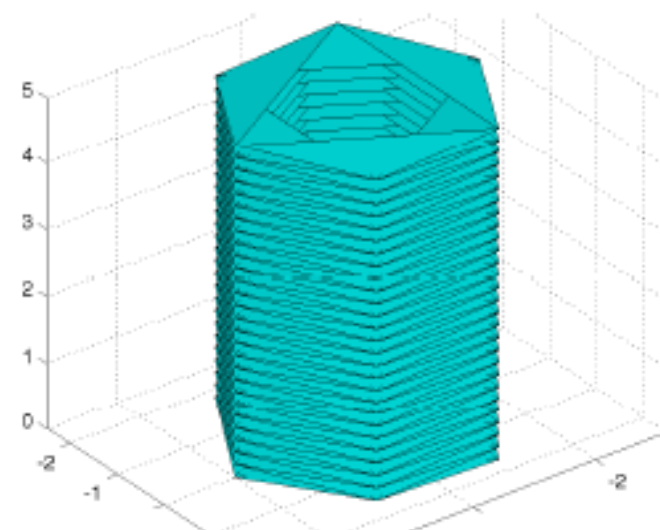
面積が、全然異なる値 (256?) に近づいてしまう！

方法2

さらに、、、

$m = n^3$ において, 面積を T_n'' と書く

n	T_n''	$ T_n'' - 20\pi $
16	3931.2	3868.4
32	7918.7	7855.9
64	15865.8	15802.9
128	31745.7	31682.9
256	63498.5	63435.7



$n = 3, m = 27$

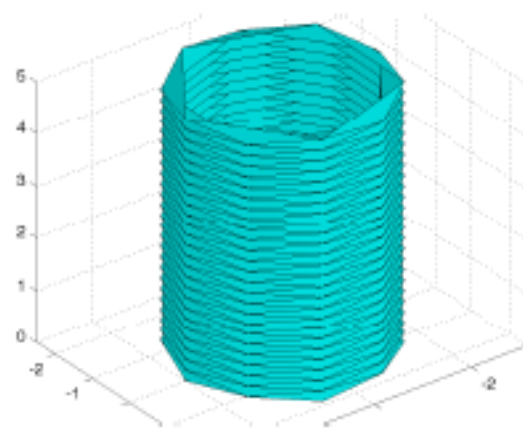
面積が, どんどん大きくなってしまふ！

シュワルツの提灯

一松信,
解析学序説 (下巻), 裳華房, 1967 年, p. 199

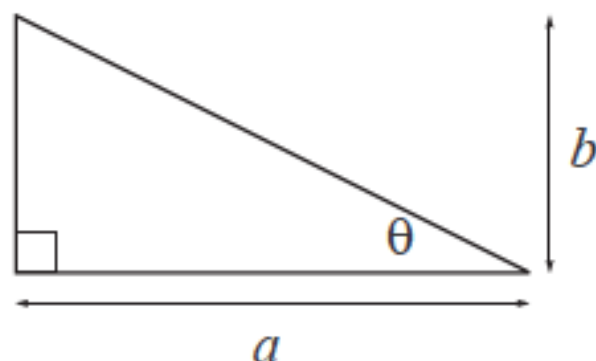
... この立体を仮にシュワルツの提灯とよぼう.

... よく考えてみればこれは当然かもしれない.
 n に比べて m をものすごく多くすれば, 小三角形は激しく波うち, 見掛け上狭い範囲に, おびただしい面積をもつ面がおりたたまれていることになる (提灯という名前はこれからつけた).
曲線の場合には内接折れ線を細かくすれば, 弦と弧の方向が自然に近づいてきたが, 曲面の場合には, ただ分割を細かくしただけではそうならないのである.



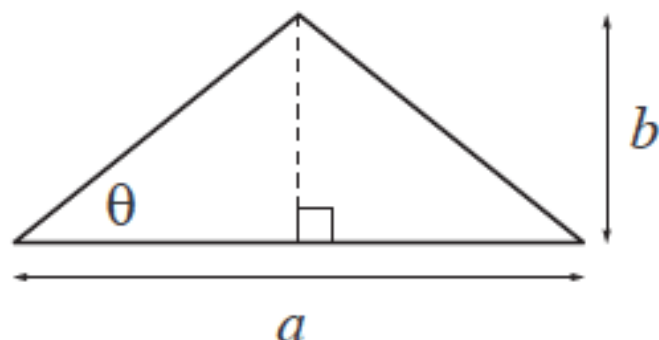
復習

方法 1 に出てくる三角形はすべて直角三角形.



$$a = 2r \sin \frac{180^\circ}{n},$$
$$b = \frac{h}{m}.$$

方法 2 に出てくる三角形はすべて二等辺三角形.



$$a = 2r \sin \frac{180^\circ}{n},$$
$$b = \sqrt{r^2 \left(1 - \cos \frac{180^\circ}{n}\right)^2 + \left(\frac{h}{2m}\right)^2}.$$

確認 1：以後以下のことを使う

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

n	$\frac{1}{n}$
1	0.001
4	0.00025
16	0.0000625
64	0.000015625
256	0.00000390625
1024	0.0000009765625

確認 2：以後以下のことを使う

角度を $0^\circ \sim 360^\circ$ (度数法) ではなく, 弧度法に変える.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

x	$\frac{\sin x}{x}$
1.0000	0.8415
0.2500	0.9896
0.0625	0.9993
0.0156	1.0000
0.0039	1.0000

この公式は,

$$\frac{\sin(\text{小さな数})}{(\text{小さな数})} \approx 1$$

のように使う.

度数法	弧度法
30°	$\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6},$
45°	$\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$
90°	$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
180°	$\frac{2\pi}{2} = \pi$

方法1で求めた面積

求めた面積は

$$S_n = 2rhn \sin \frac{180^\circ}{n}$$

であった。弧度法を採用することにして、 $\frac{180^\circ}{n} = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ と書き換える。すなわち、

$$S_n = 2rhn \sin \frac{\pi}{n} = 2rhn \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{n}.$$

n が十分に大きいときには、 $\frac{\pi}{n}$ は十分に小さいので、

$$S_n \rightarrow 2\pi rh$$

となる。

方法2で求めた面積

考えやすいように変形したものは,

$$T = 2\pi r \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \sqrt{h^2 + \pi^4 r^2 \left(\frac{m}{n^2}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^4}.$$

- $m = n$ のとき, $\frac{m}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ なので,

$$T \rightarrow 2\pi r \cdot 1 \cdot \sqrt{h^2 + \pi^4 r^2 \cdot 0 \cdot 1^4} = 2\pi r h.$$

- $m = n^2$ のとき, $\frac{m}{n^2} = 1$ なので,

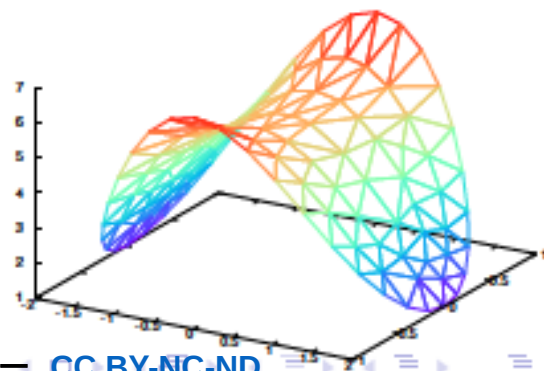
$$T \rightarrow 2\pi r \cdot 1 \cdot \sqrt{h^2 + \pi^4 r^2 \cdot 1 \cdot 1^4} = 2\pi r \sqrt{h^2 + \pi^4 r^2} = 255.884 \dots$$

- $m = n^3$ のとき, $\frac{m}{n^2} = n$ なので,,,

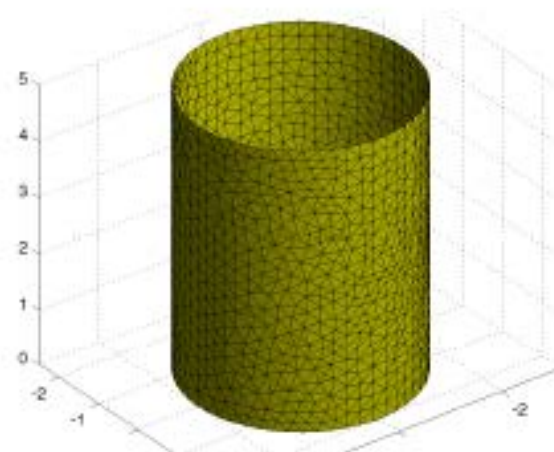
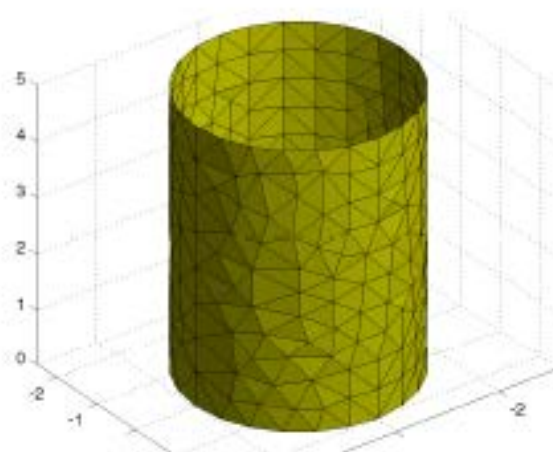
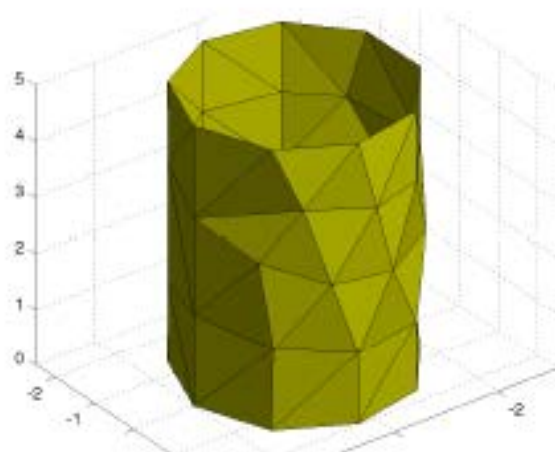
曲面の三角形分割

問題. 規則的な三角形ではなく、いろいろな形の三角形を、無作為に並べて三角形分割を作ったとき、分割を細かくすれば、曲面の面積を計算できるか？
(そもそも“曲面の面積”とは何か？)

- 対象は、円柱の側面に限らず、“一般の曲面”
- このような問題意識は、数学的な面白さだけでなく、**極小曲面**の研究で重要
 - 与えられた閉曲線に、面積が最小となるように、曲面を張る問題
 - 石鹸膜の実験
 - 第1回フィールズ賞 (1936) J. Douglas
- 本当は、「三角形分割が可能か」という問題と「可能な場合それを具体的にどうやって構成するか」という問題がある



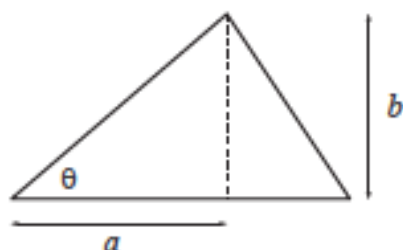
三角形分割の例



ラーデマッヘルの条件

ラーデマッヘル (H. Rademacher) の条件 (1919, 1920)

適当な正の数 α に対して、分割に現れる三角形の角度が、すべて、 α 以上となるように、分割を細かくすれば良い。



$$0 < \alpha \leq \theta \leq \tan \theta = \frac{b}{a}$$

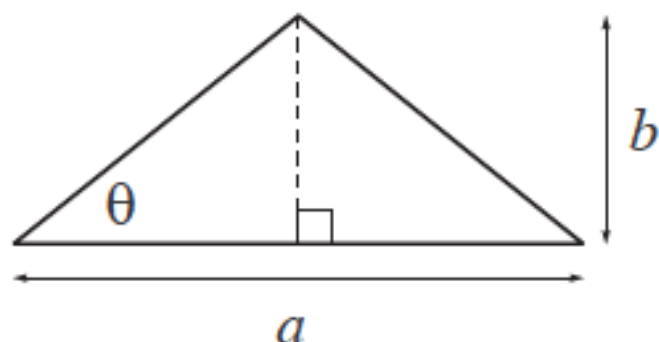
$$(0 \leq \theta < \pi/2)$$

これは、分割を細かくする過程において、三角形が “つぶれない” ことを要請している。

円柱の側面積の例で、この条件の意味を検証してみよう。

方法2の解析

方法2に出てくる三角形はすべて二等辺三角形.



$$a = 2r \sin \frac{\pi}{n},$$

$$b = \sqrt{r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{h}{2m}\right)^2}.$$

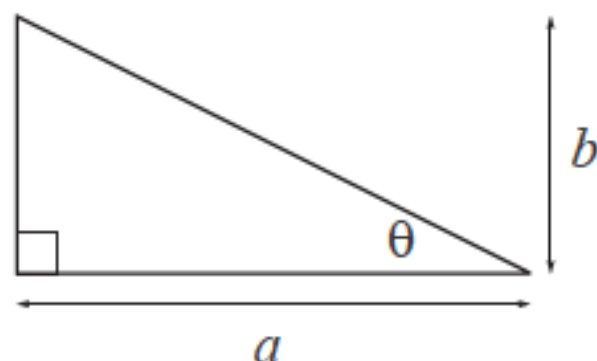
$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{1}{r} \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \sqrt{\frac{1}{n^2} \frac{r^2 \pi^2}{4} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^4 + \frac{h^2}{4\pi^2} \left(\frac{n}{m}\right)^2} \\ &\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r} \cdot \frac{h}{2\pi} & (m = n) \\ 0 & (m = n^2, n^3) \end{cases} \quad (n \text{ 十分大}). \end{aligned}$$

すなわち, ラーデマッヘルの条件は,

- $m = n$ のときは満たされる, しかし,
- $m = n^2, n^3$ のときは満たされない.

方法1の解析

方法1に出てくる三角形はすべて直角三角形.



$$a = 2r \sin \frac{\pi}{n},$$

$$b = \frac{h}{m}.$$

- m は, n とは無関係に, どのようにとっても良かった.
- 例えば, $m = n^2$ とすると, n が十分大きいとき,

$$\tan \theta = \frac{\frac{h}{n^2}}{2r \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{h}{2r\pi} \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow \frac{h}{2r\pi} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

となり, ラーデマッヘルの条件は満たされない.

- 方法1がうまくいくことの説明にはなっていない.

ヤングの条件

ヤング (Young) の条件 (1921)

適当な正の数 β ($60^\circ \leq \beta < 180^\circ$) に対して, 分割に現れる三角形の角度が, すべて, β 以下となるように, 分割を細かくすれば良い.

- 最大角が 180° に近づかないことを要請しているので, 結果的に, 三角形がつぶれないことを要請している.



- したがって, ラーデマッヘルの条件と同じことを言っているようだが, 実は,
- 今度は, 任意の直角三角形が許容される → 方法 1 が正当化される.



歴史は繰り返すか？

- 以前紹介した有限要素法の収束条件は、ラーデマッヘルやヤングの条件と**全く同じ**である。

最小角条件 (M. Zlámal, 1968)

適当な正の数 α に対して、分割に現れる三角形の角度が、すべて、 α **以上**となるように、分割を細かくすれば良い。

最大角条件 (I. Babuška and A. K. Aziz, 1976)

適当な数 β ($60^\circ \leq \beta < 180^\circ$) に対して、分割に現れる三角形の角度が、すべて、 β **以下**となるように、分割を細かくすれば良い。

- すなわち、彼らの条件は、50 年のときを経て、有限要素法の文脈で再発見された、といえる。ただし、有限要素法の研究では、もう少し深いことまで考察している。

歴史は繰り返すか？

- さらに，有限要素法からの“逆輸入”で外接半径条件の下でも，曲面の面積を計算できることもわかる．

外接半径条件 (小林・土屋, 2014)

分割に現れる三角形の外接円の半径が 0 に近づくように，分割を細かくすれば良い．

講義の後で受講生の皆さんが提出してくれたミニッツレポートに書かれていた質問に答えました。
下記の文書をご覧ください。

<http://www.infsup.jp/saito/materials/160616ans.pdf>

- 有限要素法は (空間 2 次元のとき), 計算領域を三角形分割することに基づく方法であり, 様々な物理現象のコンピュータ・シミュレーションで利用される.
- その数学的正当性を検討する際には, “分割を細かくする際の三角形の形状” という新しい問題に直面する.
- 結果として導入される様々な条件は, 全く別の文脈で, すでに得られているものと全く同じであった. (数学では, しばしば, このようなことがある)

これで終わりです
ご清聴ありがとうございました

齊藤 宣一 (さいとう のりかず)
東京大学大学院数理科学研究科
<http://www.infsup.jp/saito/>

参考文献

T. Radó, On the problem of Plateau, Chelsea Publ., 1951.