クレジット:
UTokyo Online Education 東京大学朝日講座 2017 三浦俊彦

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

BY NC ND

可能世界と主観確率

2017年10月11日　人文社会系研究科
美学芸術学研究室　　三浦俊彦

（配布プリント→）http://green.ap.teacup.com/miurat/html/20171011.pdf

§１　「可能」「偶然」とその数値化

§２　２封筒問題の論証プロセス検証

§３　問題点の摘出

■事前確率

■事象の記述

■多重量化

■自由意思

§４　自我の多重性　絶えざる別離

Two envelopes problem

～主観的に自分はいかなる可能世界にいるのか～

John Keats

Ode on a Grecian Urn (1819)

Heard melodies are sweet, but those unheard
Are sweeter; therefore, ye soft pipes, play on;
Not to the sensual ear, but, more endear'd,
Pipe to the spirit ditties of no tone:

(lines 11–14)

世阿弥

『風姿花伝』

秘すれば花なり、秘せずば花なるべからず

二封筒問題　Two Envelope Problem

パラドクスの構成

（真なる諸前提に妥当な推論を施して
不合理な結論を導く）

①　二つの未開封封筒の一方には
他方の2倍の金額が入っている。

②　一方を選ぶ。
その封筒Aの中の金を獲得できる。

③　封筒Aを放棄して、
始めに取らなかった方の封筒Bに交換し、
その中の金を獲得することもできる。
交換すべきか否か。

④　Aの中の金額をxとすれば、Bの中の金額は
2xまたはx／2、それぞれ確率1／2。

⑤　よって、期待値はAがx、Bが5x／4で、
交換すると期待値25%アップで、得。

⑥　それは誤り。
対称性の原理から、　未開封で不可識別の封筒の
どちらを取っても期待値は同じはず。

⑦　(A、B)＝(x、2x)or(x、x／2)としてはならない。
プレイヤーの選択によって
総額が今さら変化するはずはないから。

⑧　総額は胴元が2封筒内に金を入れた時点で
決まっているので、総額は一定額(たとえば3X)。
ただし総額不明なので、Xは変数。

⑨　つまり(A、B)＝(X、2X)or(2X、X)とすべし。
それぞれ確率1／2だから、
期待値は　Aが3X／2、　Bが3X／2。　交換は損得なし。

⑩　未開封バージョンは以上で決着。
では、手もとのAを開封しよう。Aは1万円だった。

⑪　これは、⑨の（A、B）＝（X、2X）or（2X、X）で
X＝1万 or 2X＝1万 だった　という意味である。

⑫　すなわち、（A、B）＝（1万、2万）or（1万、5千）。
それぞれ確率1／2

⑬　Bに交換したときの期待値は、12500円。
交換が得である。

⑭　⑩で「1万円」としたのは単なる例だから、
Aを開封したときに、1万円以外のどんな金額であっても、
同じ理屈が成り立つ。

⑮　つまりどんな金額の場合も、Bに交換したとき
期待値25％アップ、という計算結果は同じ。
Aを開封して金額を見ることは、
2つの封筒の中身を変化させはしないので。

⑯　Aの金額にかかわらず、
Bに交換したとき期待値25%アップとなる。

⑰　「Aの金額にかかわらずBに交換することが、
期待値25%アップ」
であるならば、Aの金額を見るかどうかは
期待値変化率に影響しない。

⑱　⑯と⑰より、Aの金額を見ないままでも、
期待値変化率に影響しない。
交換で期待値25%ということで変わらず。

⑲　よって、未開封のままでも、
交換することで期待値が25%アップし、得。

⑳　⑲は⑤と同じである。
ところが、⑲は真で、⑤は偽であったはず。

21　これは矛盾である。
どこかに誤りがあったに違いない。どこだろう?

有力な解法その1

⑫が誤りである。(A、B)＝(1万、2万)or(1万、5千)
であるが、それぞれの確率を1／2とすることはできない。
ベイズの定理で丁寧に計算してみよう。

Q……私はAに1万円を見出した

R……胴元は{1万、2万}を選んだ

S……胴元は{5千、1万}を選んだ

$$P(R \mid Q)$$
$$= P(Q \mid R)P(R) / (P(Q \mid R)P(R) + P(Q \mid S)P(S))$$
$$= P(R) / (P(R) + P(S)) \qquad a / (a+b)$$

$$P(S \mid Q) = P(S) / (P(R) + P(S)) \qquad b / (a+b)$$

有力な解法その1

このニつが1／2であるのは、Ｐ（Ｒ）＝Ｐ（Ｓ）の場合だけ。
つまり、ＲとＳの事前確率が等しくなければならない。
事前確率は、事前に（未開封の段階で）決められねばならない。

しかし、未開封の段階で、{１万、２万}と{５千、１万}の確率など
わかるわけがない。他に多くの候補があったのだし、
胴元の自由意思は推測しようがないので。

唯一、Ｐ（Ｒ）＝Ｐ（Ｓ）とするのが合理的であるのは、
一様分布をとる場合である。

実際、無知の場合には原則として
「無差別の原理」（理由不十分の原理）により、
ありうるすべての事象の確率を等確率と置ける。

しかし2封筒問題では、一様分布は不可能である。
金額ペアは無限にあるので、
Ｐ（Ｒ）＝Ｐ（Ｓ）の値を含むすべての値を同一のaと置くと、
その総和が無限大となってしまい、確率の公理に反する。

よって、Ｐ（Ｒ）＝Ｐ（Ｓ）とする合理的理由がない。

したがって、Ｐ（Ｒ｜Ｑ）＝Ｐ（Ｓ｜Ｑ）＝１／２としてはならない。

？1●　「事前確率は、事前に（未開封の段階で）決められねばならない」は正しいか。

？2●　事象を（1万、2万）or（1万、5千）でなく、（高額、低額）or（低額、高額）とすべきではないか。全開封金額を通じた（高額、低額）の確率の期待値は、1/2。

？3●　Qという情報が与えられたことによって、P（高額、低額）＝1/2 から「不明」に変化する、というのは、ベイズ推定の運用に反しているのではないか。いったん「不明」を許容すると、以後のベイズ改訂ができなくなってしまう。

？4●　同じことは、任意の x≠y について言える。選んだ方を x として、P（x＞y） は明らかに1／2なのに、x の値 t を知った瞬間、P（t＞y） は不明になってしまう。t がどんな値であれ。ならば t を知る前から P（x＞y） は1／2ではなく「不明」ではないのか。 → パラドクスの復活？

有力な解法その2

⑱が誤りである。⑯と⑰前件とは、意味が異なる。
⑯は真で、⑰前件は偽だから。

⑯「Aの金額にかかわらず、Bに交換したとき期待値25%アップ」から、
⑰「Aの金額にかかわらずBに交換することが、期待値25%アップ」
は導き出せない。
Aを特定するかどうかは大きな違いである。

⑯「Aの金額にかかわらず、Bに交換したとき期待値25%アップ」
（開封して交換したとき期待値25%アップ）
を正確に言い換えると、
「いかなる金額xについてもそれぞれ戦略yがあり、
yによって期待値が1.25xとなる」　$\forall x(\exists y Fxy)$

Fxy は「 yによりxが1.25倍になる」の意

⑰「Aの金額にかかわらずBに交換することは、そうしないよりも
期待値25%アップ」（未開封のまま交換したとき期待値25%アップ）
を正確に言い換えると、
「いかなる金額xについても期待値が1.25xとなるような、
特定の戦略yがある」　$\exists y(\forall x Fxy)$

有力な解法その2

∃y(∀xFxy) から ∀x(∃yFxy) は導けるが、
∀x(∃yFxy) から ∃y(∀xFxy) は導けない。
未開封交換で期待値25%アップなら開封交換でも25%アップ
は可だが、逆は不可。

∃y(∀xFxy) → ∀x(∃yFxy)
は成り立ち、逆は成り立たない具体例

◎ すべての人が誰かを愛する からといって
すべての人が愛するような誰かがいる とは限らない
◎ どの自然数についても、より大きな自然数がある からといって
どの自然数より大きな自然数がある とは限らない

１万円を見て交換する、という戦略は、
２万円を見て交換する、という戦略とは異なる。
どの金額についても期待値25%アップ戦略がそれぞれ存在する
からといって
どの金額についても期待値25%アップとなるような特定の戦略
は存在しない

有力な解法その2

１万円を見て交換する、という戦略は、
２万円を見て交換する、という戦略とは異なる。
どの金額についても期待値25%アップ戦略がそれぞれ存在する
からといって
どの金額についても期待値25%アップとなるような特定の戦略
は存在しない

金額ごとに、「その金額を交換する」という
期待値25%アップ戦略があるだけのことであり、
全交換で期待値25%アップをもたらす戦略
があるわけではない。

？１●　X円を見て交換する、という戦略の「X」は、
開封して見る前に決定しておかねば無意味ではないか。
金額後決め戦略は、実質的に、全交換戦略になりはしないか。

？２●　ただ一度の試行で、二人のプレイヤーが別々の封筒
を取った場合も、
「交換すると二人とも期待値25%アップ」となるが、
それは矛盾ではないのか。

可能世界　possible world

任意の命題（正確には、原子命題）のどれに対しても、真か偽のいずれか一方だけを割り当てる関数

命題（真か偽でありうる事柄）の各々について、真偽が確定しているような整合的システム

可能世界 ＝ 隅々まで確定した存在全体。

ある事柄Aについて真偽が定まらないシステムは、可能世界ではない。

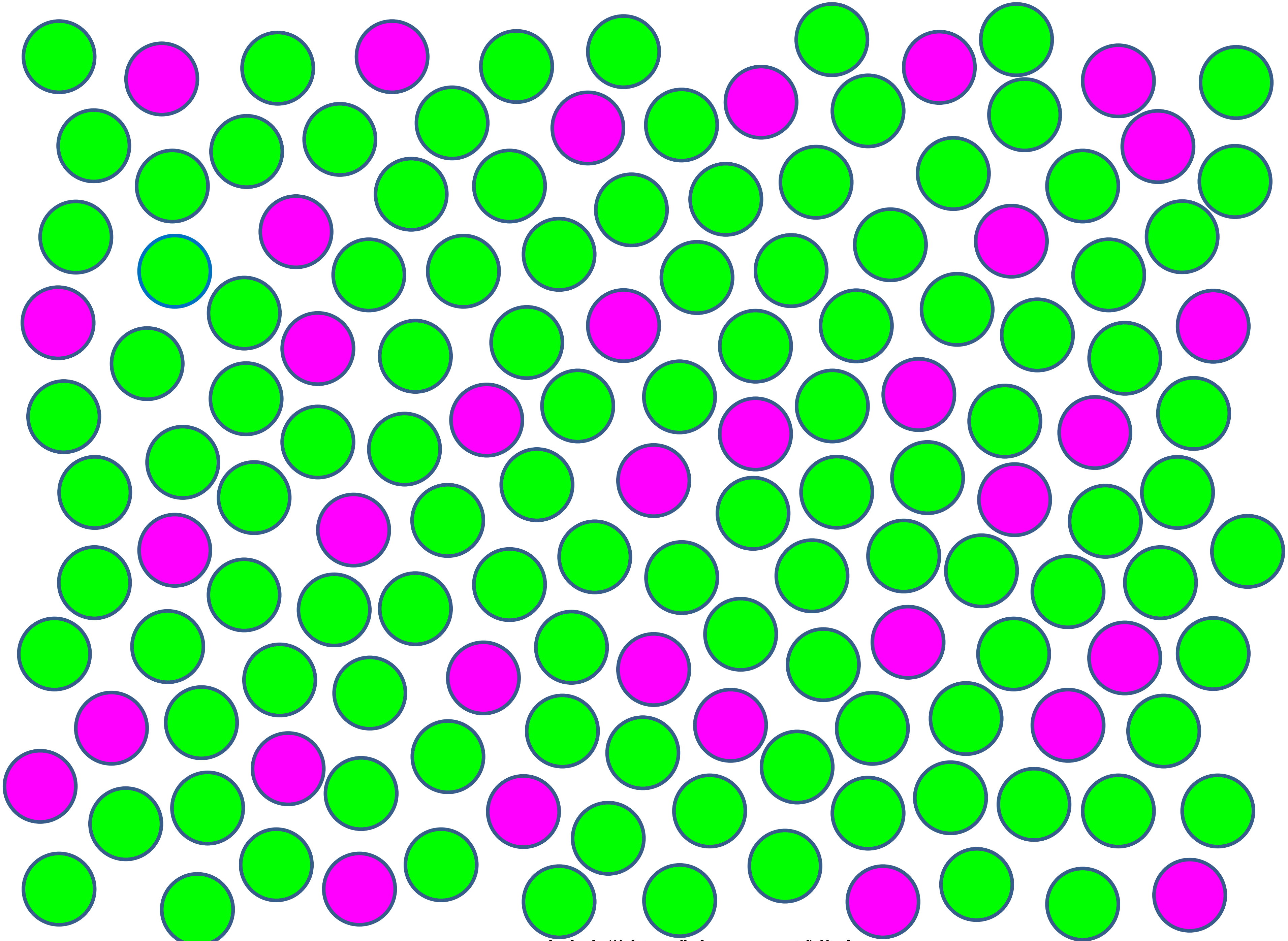
そのシステムは、Aが真である可能世界 と Aが偽である可能世界 をともに含んだ〔可能世界の集合〕

現実世界は、この私がいる唯一の可能世界 クリプキ, 1980, ルイス, 1972, 86

ただし現実を、無数の可能世界の集合と考えた方が確率的世界観と相性がよい。←真偽の定まらない命題については世界の重ね合わせになっている　　cf.多世界解釈

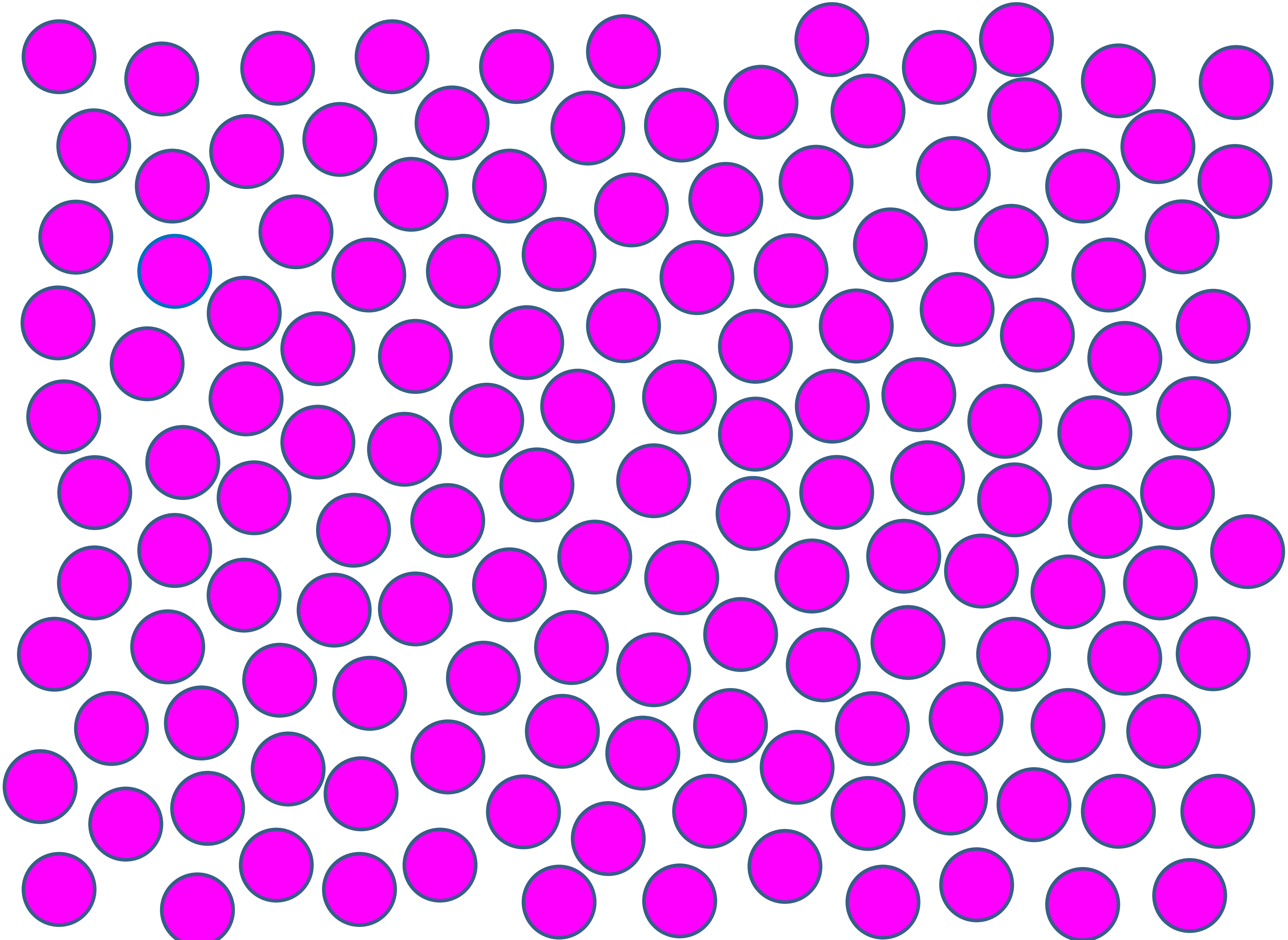
可能世界 = 命題の真偽の組み合わせ

	命題1	命題2	命題3	命題4	命題5	命題6	命題7	命題8	·······
世界 a	○	○	○	×	×	×	○	○	·······
世界 b	○	○	×	×	×	○	○	○	·······
世界 c	○	×	○	○	×	○	○	×	·······
世界 d	○	×	×	×	×	○	○	×	·······
世界 e	×	○	○	○	×	×	○	○	·······
世界 f	×	○	×	○	×	○	○	×	·······
現実世界	×	×	○	×	×	×	○	○	·······
世界 h	×	×	×	○	×	○	○	×	·······
世界 i	○	○	○	○	×	×	○	×	·······
世界 j	×	×	○	○	×	○	○	○	·······
世界 k	×	○	×	○	×	×	○	×	·······



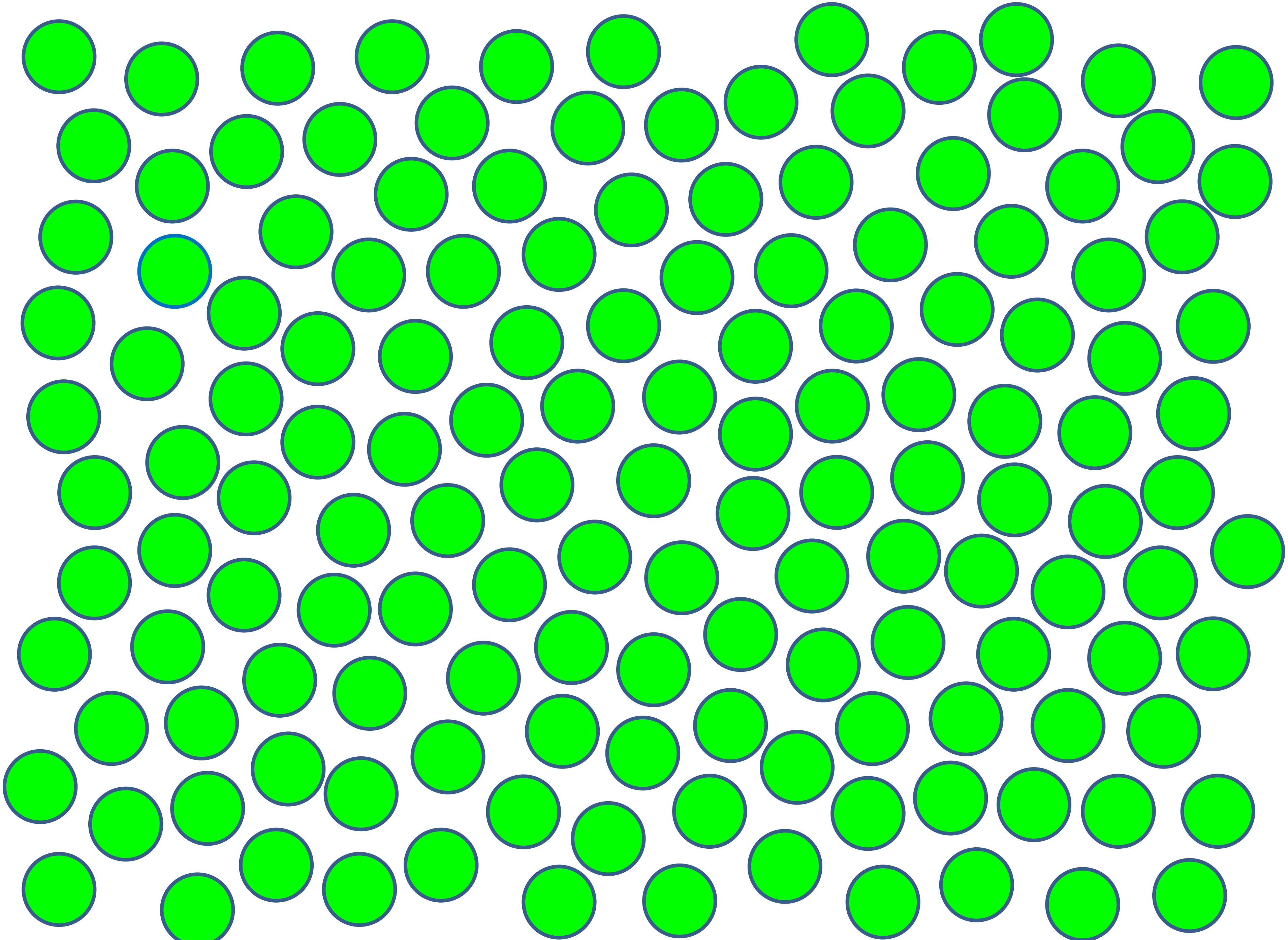
必然性 = すべての可能世界で真

	命題1	命題2	命題3	命題4	命題5	命題6	命題7	命題8	・・・・・・・
世界 a	○	○	○	×	×	×	○	○	・・・・・・・
世界 b	○	○	×	×	×	○	○	○	・・・・・・・
世界 c	○	×	○	○	×	○	○	×	・・・・・・・
世界 d	○	×	×	×	×	○	○	×	・・・・・・・
世界 e	×	○	○	○	×	×	○	○	・・・・・・・
世界 f	×	○	×	○	×	○	○	×	・・・・・・・
現実世界	×	×	○	×	×	×	○	○	・・・・・・・
世界 h	×	×	×	○	×	○	○	×	・・・・・・・
世界 i	○	○	○	○	×	×	○	×	・・・・・・・
世界 j	×	×	○	○	×	○	○	○	・・・・・・・
世界 k	×	○	×	○	×	×	○	×	・・・・・・・



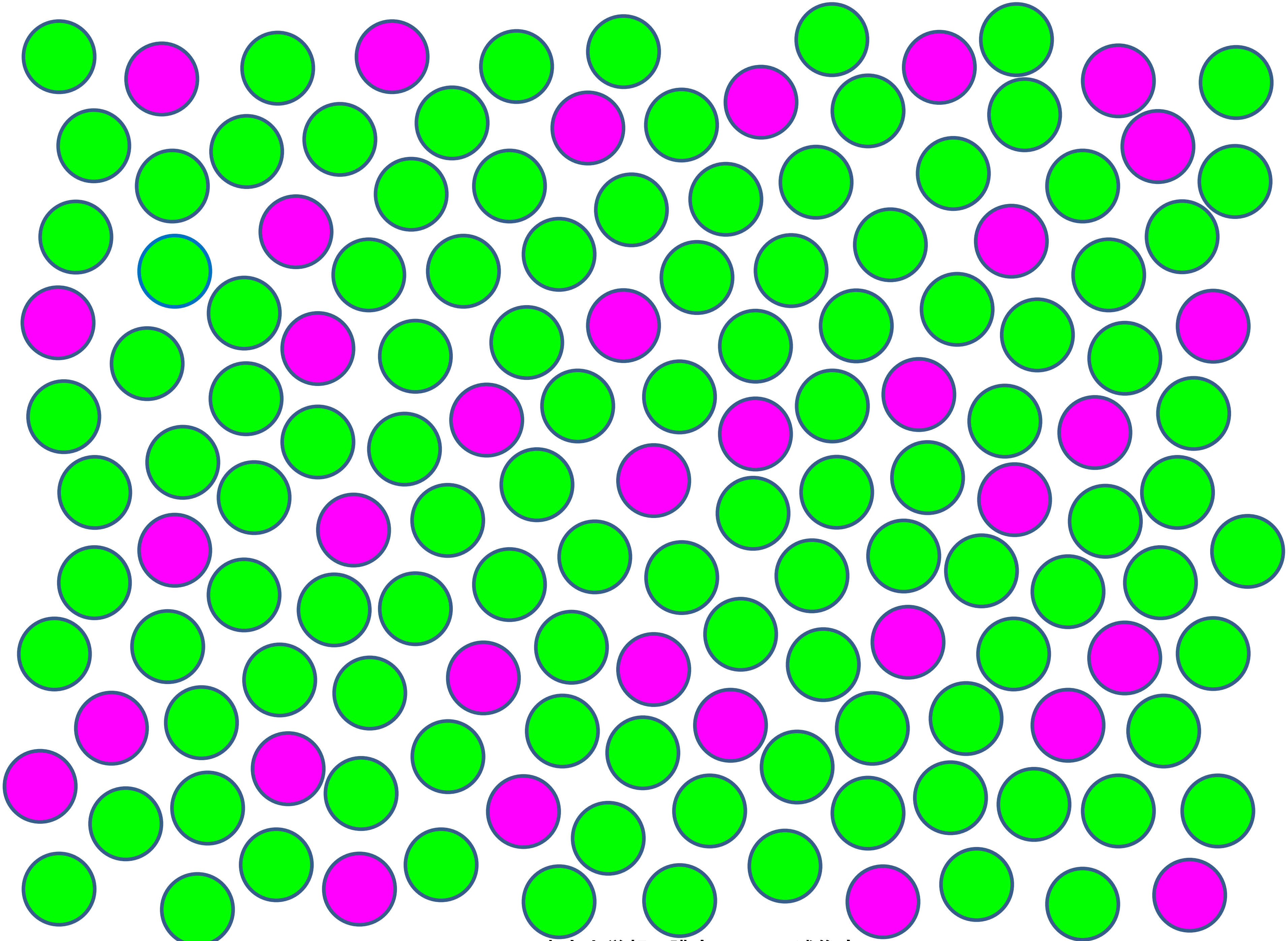
不可能性＝すべての可能世界で偽

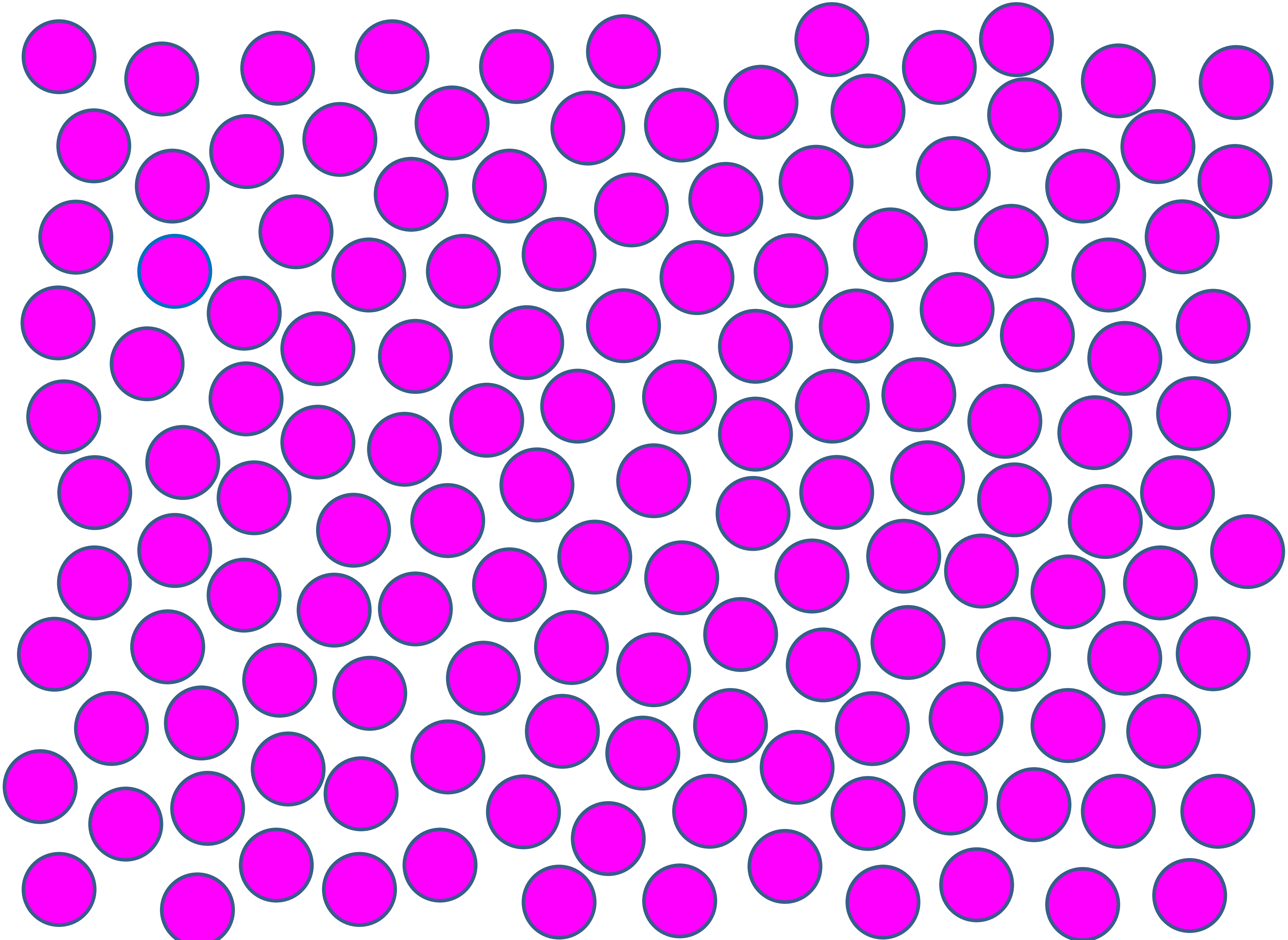
	命題1	命題2	命題3	命題4	命題5	命題6	命題7	命題8	·······
世界 a	○	○	○	×	×	×	○	○	·······
世界 b	○	○	×	×	×	○	○	○	·······
世界 c	○	×	○	○	×	○	○	×	·······
世界 d	○	×	×	×	×	○	○	×	·······
世界 e	×	○	○	○	×	×	○	○	·······
世界 f	×	○	×	○	×	○	○	×	·······
現実世界	×	×	○	×	×	×	○	○	·······
世界 h	×	×	×	○	×	○	○	×	·······
世界 i	○	○	○	○	×	×	○	×	·······
世界 j	×	×	○	○	×	○	○	○	·······
世界 k	×	○	×	○	×	×	○	×	·······



可能性＝ 少なくとも一つの可能世界で真

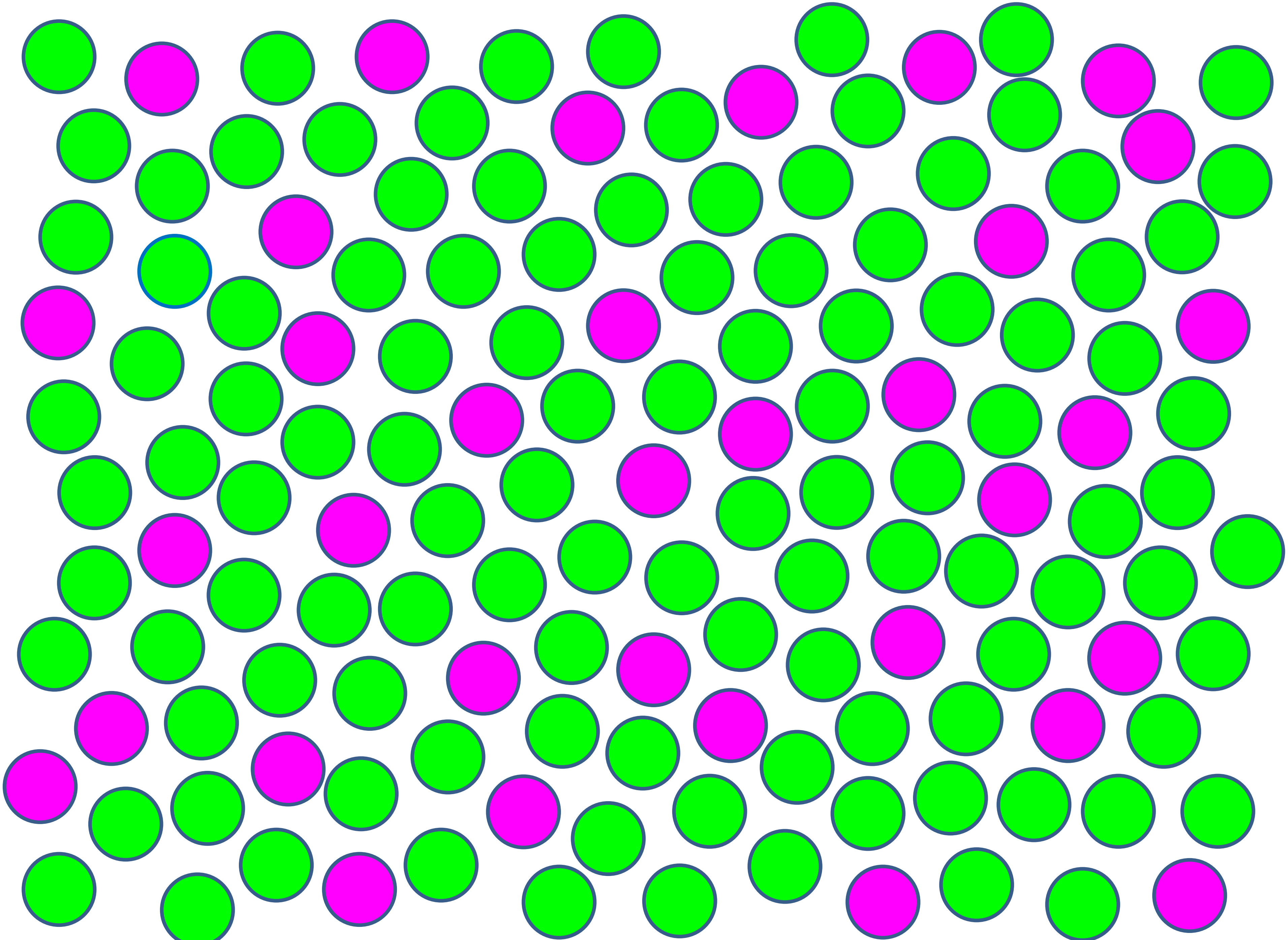
	命題1	命題2	命題3	命題4	命題5	命題6	命題7	命題8	·······
世界 a	○	○	○	×	×	×	○	○	·······
世界 b	○	○	×	×	×	○	○	○	·······
世界 c	○	×	○	○	×	○	○	×	·······
世界 d	○	×	×	×	×	○	○	×	·······
世界 e	×	○	○	○	×	×	○	○	·······
世界 f	×	○	×	○	×	○	○	×	·······
現実世界	×	×	○	×	×	×	○	○	·······
世界 h	×	×	×	○	×	○	○	×	·······
世界 i	○	○	○	○	×	×	○	×	·······
世界 j	×	×	○	○	×	○	○	○	·······
世界 k	×	○	×	○	×	×	○	×	·······

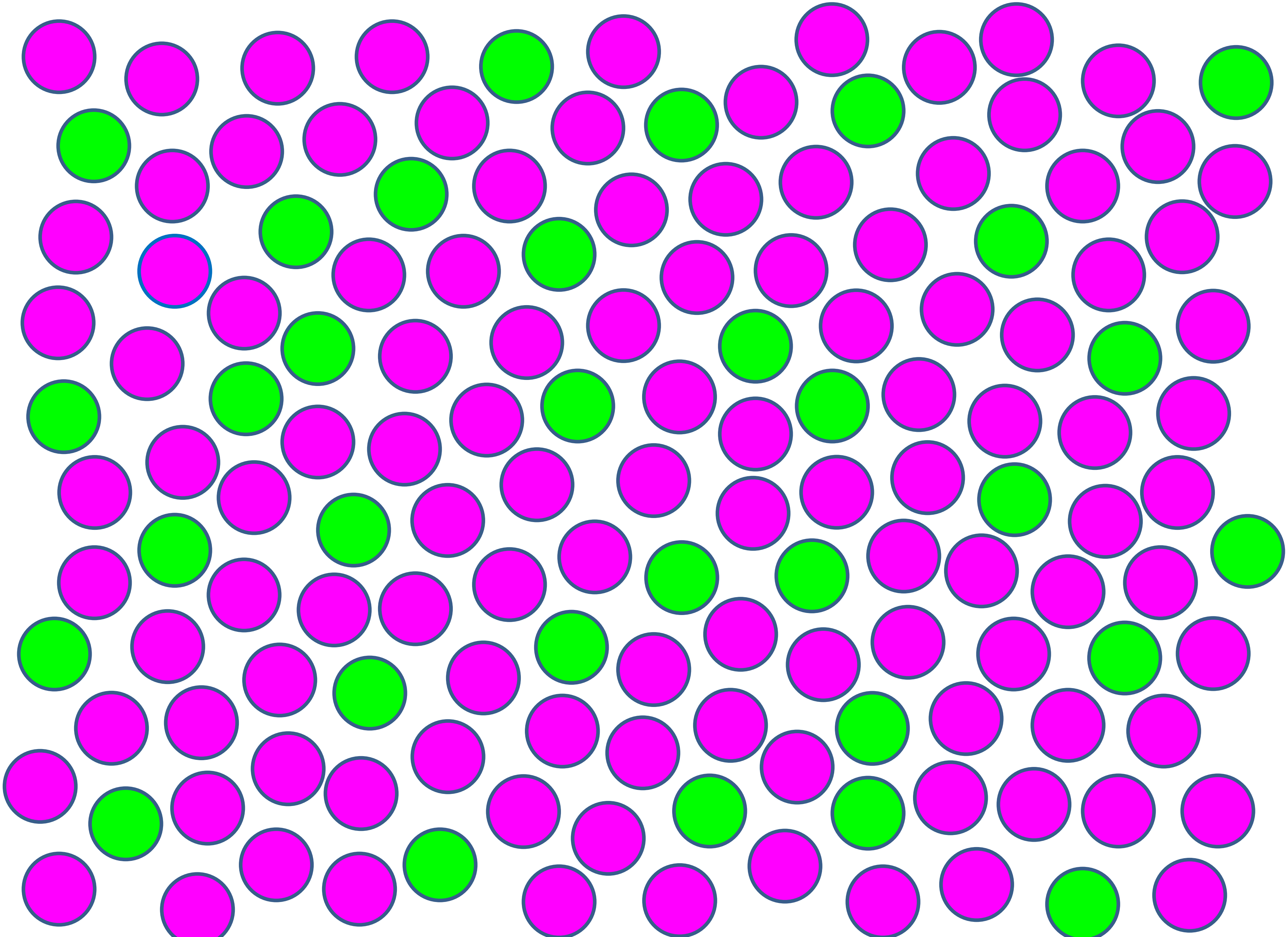




偶然性 ＝ 必然でも不可能でもない

	命題1	命題2	命題3	命題4	命題5	命題6	命題7	命題8	・・・・・・・
世界 a	○	○	○	×	×	×	○	○	・・・・・・・
世界 b	○	○	×	×	×	○	○	○	・・・・・・・
世界 c	○	×	○	○	×	○	○	×	・・・・・・・
世界 d	○	×	×	×	×	○	○	×	・・・・・・・
世界 e	×	○	○	○	×	×	○	○	・・・・・・・
世界 f	×	○	×	○	×	○	○	×	・・・・・・・
現実世界	×	×	○	×	×	×	○	○	・・・・・・・
世界 h	×	×	×	○	×	○	○	×	・・・・・・・
世界 i	○	○	○	○	×	×	○	×	・・・・・・・
世界 j	×	×	○	○	×	○	○	○	・・・・・・・
世界 k	×	○	×	○	×	×	○	×	・・・・・・・





2封筒問題の問題点

■対称性の原理　←絶対順守
■無差別の原理　←無知の場合に適用、ただし要注意
■無限個の根元事象（無限大の期待値？）　←基本的に無視

David J. Chalmers, 2002 “The St. Petersburg Two-Envelope Paradox”

■事前確率分布の設定　←可能な場合のみ
■ベイズ的確率（主観確率）　←「信念の度合」に従って割当て
■自由意思とコペルニクス原理　←基本的に後者優先
■多重様相（「必然であることが偶然である」）
■「任意のany」と「すべてのall」の区別
■確率の期待値　←確率不明の場合に適用
■「合理的理由がない」から「禁止」を導けるか？
■開封による確率空間の変化　←可能世界の集合でモデル化

二封筒問題　誤った解決Part1

D……開封したら1万円だった

A……ペアは{1万、2万}である

B……ペアは{5千、1万}である

$P(A)=a$　　$P(B)=b$　　$P(D)=a/2+b/2$

$P(D|A)=P(D|B)=1/2$

$P(A|D)=P(A\&D)/P(D)$

$=P(D|A)P(A)/(P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B))$

$=(a/2)/(a/2+b/2)=a/(a+b)$

■ a、b は不明ゆえ、$P(A|D)$は不明

二封筒問題　誤った解決Part2

D……開封したら1万円だった

A……ペアは{1万、2万}　　B……ペアは{5千、1万}

■ 開封前から、期待値の存在しない設定（一様分布のもとで期待値が無限大に発散）ゆえ、交換による期待値の増減はどうにでも解釈できる　つまり開封・未開封問わず、交換の期待値は不定

Chalmers, D.J. 1994. “The two-envelope paradox: A complete analysis? “

■ 比が判明している場合の期待値は相加平均でなく相乗平均を取るべきである　√（5千×2万）＝1万

田中一之　2013『チューリングと超パズル』東京大学出版会

■ 値の分布の密度が金額に反比例するため、
P（A）＝1／3　P（B）＝2／3　　よって交換の期待値は
2万／3＋2×5千／3＝1万

富永裕久　2004『図解雑学 パラドクス 』ナツメ社

もうひとつの「２封筒問題」

あなたは最新の心理テストを受けた後、次のゲームに挑戦する権利を得る。
２つの封筒A、Bのうち**Aには10万円、Bには0円か100万円**が入っている。
あなたはA、B両方を取ることもでき、Bだけ取ることもできる。
取った金はもらえる。ただしBの中身は次のように設定されている。
・心理テストの結果、**「A、B両方を取る性格だ」と診断された場合、Bの中身は0円**。
・心理テストの結果、**「Bだけ取る性格だ」と診断された場合、Bの中身は100万円**。
この心理テストは、的中率が99パーセント。
すなわち、選択と獲得金額の間に、次のような対応表が成立する。

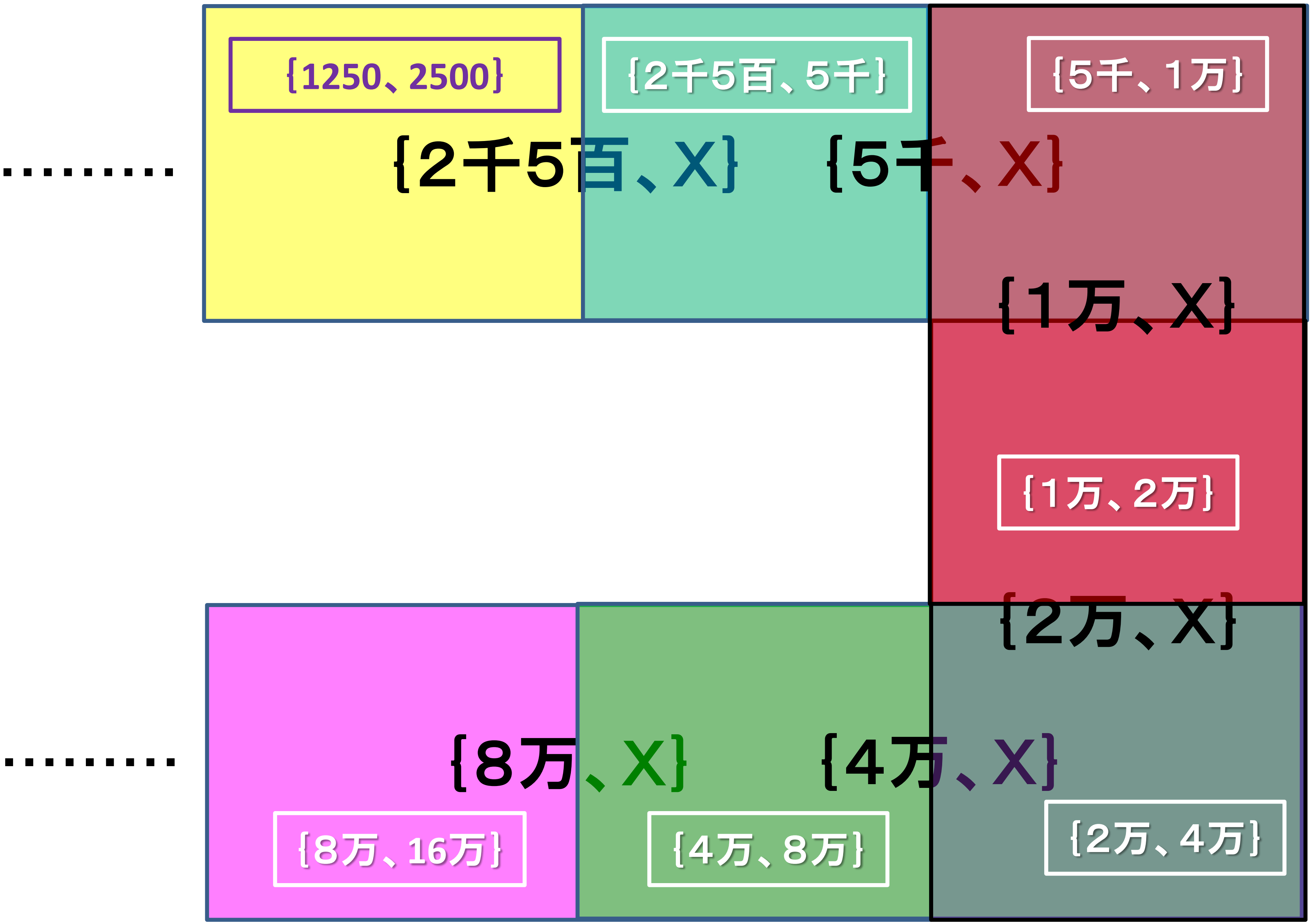
	参加者1000人中990人	参加者1000人中10人	（期待値）
A＆B	**10万円＋0円**	**10万円＋100万円**	**11万円**
B	**100万円**	**0円**	**99万円**

謙虚な？コペルニクス原理

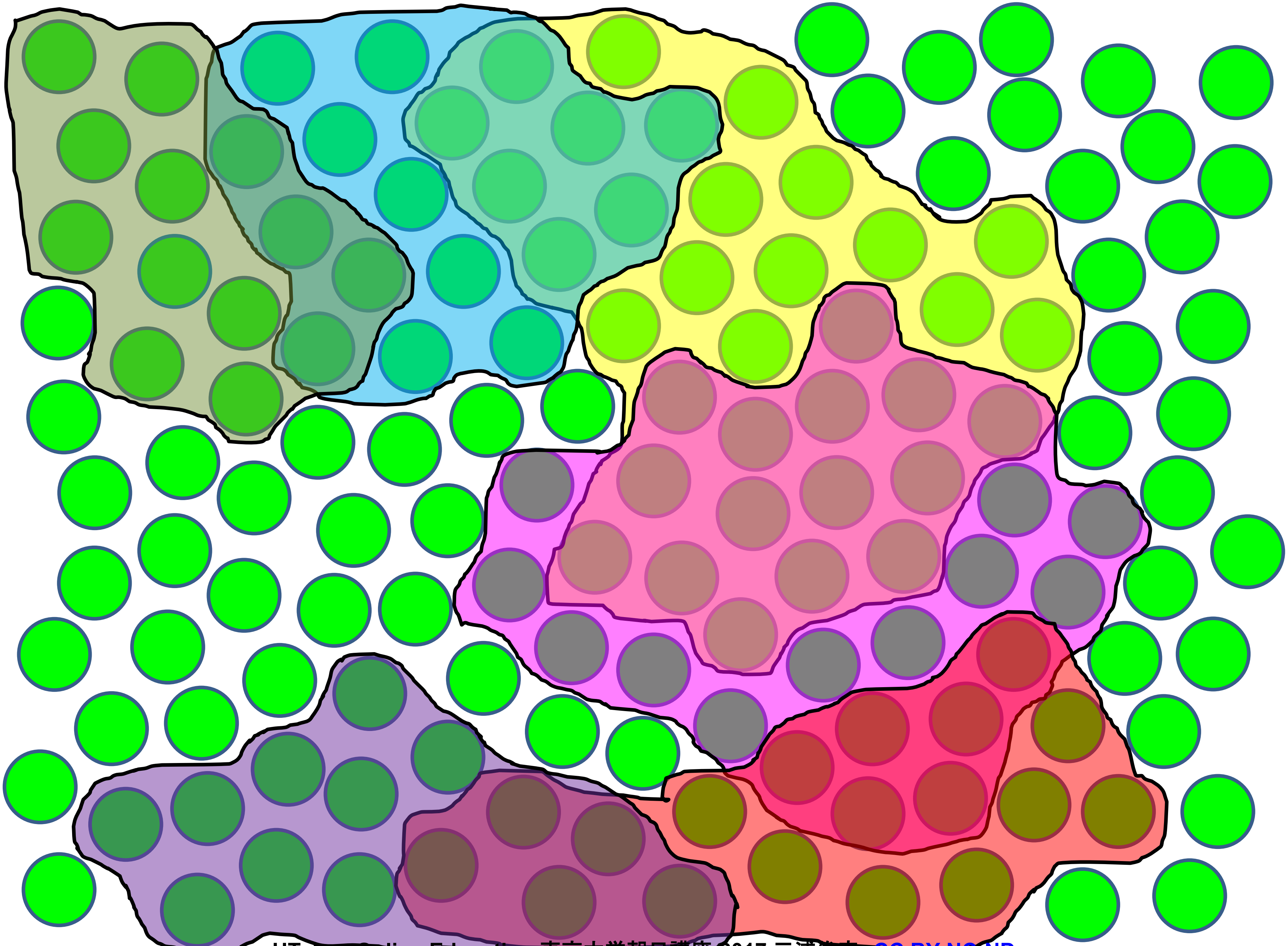
あなたはこの心理テストを受けた参加者のうちランダムな（平凡な）ーサンプルであると考え、**期待値に**従え・・・・・・→Bだけを取るべし（***期待効用原理***）

誇り高い？自由意思原理

あなたは独自の存在であるから、Bの既定の値（0円or100万円）のいずれにおいても得である選択があれば**主体的に**それを選べ・・・・・・→A＆Bを取るべし（***優越原理***）



{1250、2500}
{2千5百、5千}
{5千、1万}
{2千5百、X}
{5千、X}
{1万、X}
{1万、2万}
{2万、X}
{8万、X}
{4万、X}
{8万、16万}
{4万、8万}
{2万、4万}



プレイヤー1とプレイヤー2がペアで勝負をし、プレイヤー3が観察している場合、客観的に何が起きているのか？

プレイヤー1

① 封筒を選ぶ前・・・・・・
金額ペアについて全世界の集合W(3X)が**重なり合う**

② Aを選んだ後・・・・・・
A＞B世界の集合S(2X、X)と、A＜B世界の集合R(X、2X)が**重なり合う**

③ 開封、1万円を見た後
Sの中からS(1万、5千)、Rの中からR(1万、2万)が残り**重なり合い続ける**

その他の諸世界にいる分身と永遠に離別する

④Bと交換して2万円を見た後・・・・・・Sが消え、R(1万、2万)が残る。

S(1万、5千)にいる分身と永遠に離別する

プレイヤー3

① 封筒を選ぶ前・・・・・・
金額ペアについて全世界の集合W(3X)が**重なり合う**

② A、Bが選ばれた後
A＞B世界の集合S(2X、X)と、A＜B世界の集合R(X、2X)が**重なり合う**

③二人が開封して金額を見た後・・・・・・Sが消え、Rの中からR(1万、2万)だけが残る。

R以外のすべての諸世界にいる分身と永遠に離別する

プレイヤー2

① 封筒を選ぶ前・・・・・・
金額ペアについて全世界の集合W(3X)が**重なり合う**

② Bを選んだ後・・・・・・
B＜A世界の集合S(2X、X)と、B＞A世界の集合R(X、2X)が**重なり合う**

③ 開封、2万円を見た後
Sの中からS(4万、2万)、Rの中からR(1万、2万)が残り**重なり合い続ける**

その他の諸世界にいる分身と永遠に離別する

④Aと交換して1万円を見た後・・・・・・Sが消え、R(1万、2万)が残る。

S(4万、2万)にいる分身と永遠に離別する

推奨文献（＊付きは批判的に読むべきもの）

＊　Chalmers, D.J. 1994. “The two-envelope paradox: A complete analysis?” consc.net/papers/envelope.html

● David J. Chalmers, 2002 “The St. Petersburg Two-Envelope Paradox” *Analysis* 62

● ドナルド・ギリース 2000『確率の哲学理論』（日本経済評論社　2004）

● 小島寛之 2015 『完全独習 ベイズ統計学入門』（ダイヤモンド社）

● Kripke, Saul 1959. ″A Completeness Theorem in Modal Logic″, Journal of Symbolic Logic 24(1):1–14.

● ソール・A. クリプキ 1980『名指しと必然性』（産業図書 1985）

● デイヴィッド・ルイス 1972『反事実的条件法』（勁草書房 2007）

● デイヴィッド・ルイス 1986『世界の複数性について』（名古屋大学出版会 2016）

● Lewis, David. 1978 “Truth in Fiction.” *Philosophical Papers, Vol. I* （Oxford U.P. 1983） pp.261–280

● 三浦俊彦　2014 『思考実験リアルゲーム』（二見書房）

● 三浦俊彦　2017a 『改訂版 可能世界の哲学』（二見文庫）

● 三浦俊彦　2017b「神視界の人間的彩色　ベイズの定理」『現代思想2017年3月臨時増刊号　総特集＝知のトップランナー50人の美しいセオリー』pp.196-9

＊　田中一之　2013『チューリングと超パズル: 解ける問題と解けない問題』（東京大学出版会）

● マックス・テグマーク　2014 『数学的な宇宙』（講談社　2016）

＊　富永裕久　2004『図解雑学 パラドクス 』（ナツメ社）

グループワークテーマ

二封筒問題の推論のどの
ステップに誤りがあるのかを、
理由とともに述べよ