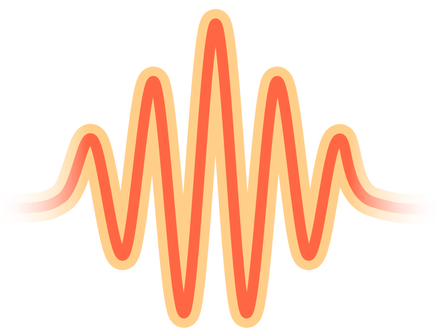
Q-LEAP 人材育成プログラム
量子技術教育のためのオンラインコース・サマースクール開発プログラム

Hamiltonian



光・量子計算
（連続量）

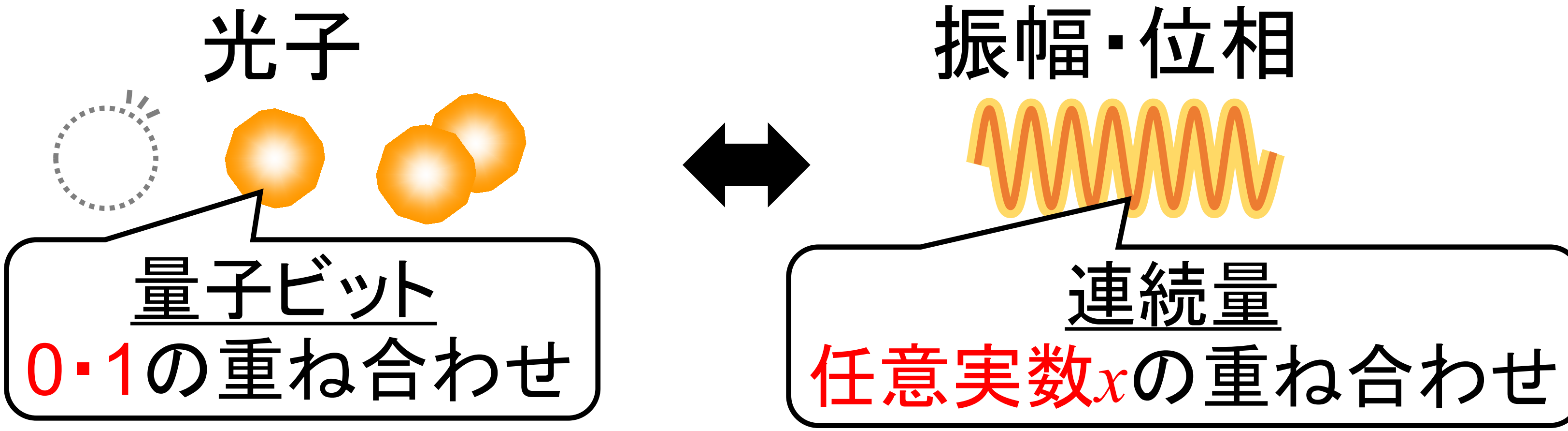
東京大学

武田 俊太郎

$|0\rangle + |1\rangle$

1. 導入

- 光の「連続量」とは？



- なぜ「連続量」を使う？

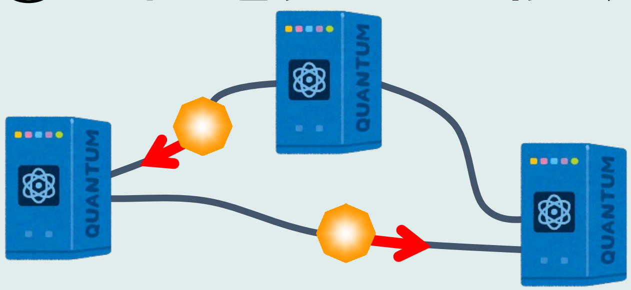
<u>①高い情報処理効率</u>
　量子ビットだと確率的だが、連続量だと確率1の要素あり
<u>②無限次元の大きな自由度</u>
　量子ビットにできない情報処理ができ、有利な場合あり

⇒元々量子ビットが主流だが、近年連続量に注目が集まる

1. 導入

- 光連続量の特徴（量子ビットと同じ）

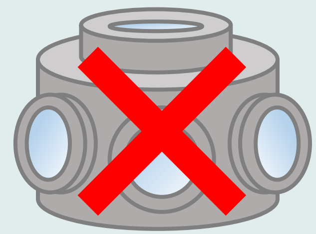
①空間を光速で移動



◎通信に最適

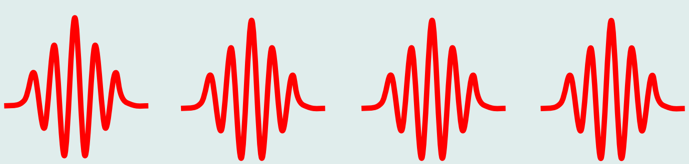
②常温・大気中で量子性を保持

冷凍機


真空
装置


◎特殊環境が不要

③高速な情報処理



◎高クロックのゲート操作

④光の非線形な変換が難しい

△実現が難しいゲートが存在

2. 連続量

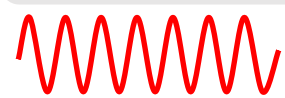
	量子ビット	連続量
物理量	光子数 光子の生成・消滅演算子 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$	直交位相振幅 $\hat{x} = \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)/\sqrt{2}\,,\ \hat{p} = \left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right)/i\sqrt{2}$
基底	$\hat{n}\lvert n\rangle = n\lvert n\rangle$ $\lvert 0\rangle, \lvert 1\rangle, \lvert 2\rangle, \cdots$	$\hat{x}\lvert x\rangle = x\lvert x\rangle$ $\hat{p}\lvert p\rangle = p\lvert p\rangle$ $\left\{\lvert x\rangle \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ or $\left\{\lvert p\rangle \mid p \in \mathbb{R}\right\}$
情報	$\lvert\psi\rangle = c_0\lvert 0\rangle\lvert 1\rangle + c_1\lvert 1\rangle\lvert 0\rangle$	$\lvert\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\lvert x\rangle dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lvert n\rangle$

$\lvert x = 0\rangle$を生成可能

<u>古典電磁波</u>

複素振幅

$$E(z,t) = i\varepsilon\left(\alpha e^{i(kz-\omega t)} - \alpha^* e^{-i(kz-\omega t)}\right)$$


$\longrightarrow z$

量子化

$$\hat{E}(z,t) = i\varepsilon\left(\hat{a} e^{i(kz-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(kz-\omega t)}\right) \qquad \left([\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1\right)$$

$$= -\sqrt{2}\varepsilon\left(\hat{x}\sin(kz-\omega t) + \hat{p}\cos(kz-\omega t)\right) \qquad \left([\hat{x}, \hat{p}] = i\right)$$

$\Rightarrow$ $\hat{x}, \hat{p}$ はsin成分とcos成分の振幅に相当

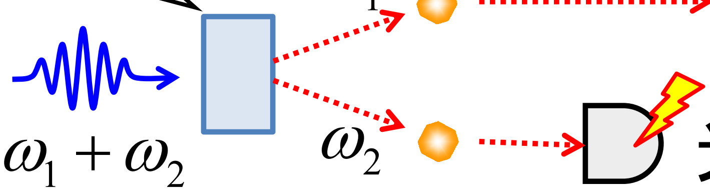
3. 初期化

- 量子ビット：パラメトリック下方変換で光子を生成

2次の非線形光学結晶
（BBO, KTP, etc.）

ポンプ強度→0 (ε→0)

$$|0\rangle_1|0\rangle_2+\boxed{\varepsilon|1\rangle_1|1\rangle_2}+\cancel{\varepsilon^2|2\rangle_1|2\rangle_2+\cdots}$$



ω_1

約ε^2の確率で
光子を生成

弱いポンプ光

$\omega_0=\omega_1+\omega_2$

ω_2

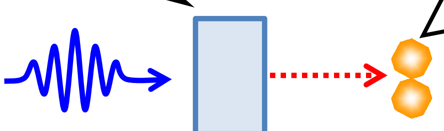
光子検出

- 連続量：パラメトリック下方変換でスクイーズド光を生成

[arXiv:1401.4118]

2次の非線形光学結晶
（BBO, KTP, etc.）

$$\underbrace{|0\rangle-\varepsilon/\sqrt{2}\,|2\rangle+\sqrt{6}\varepsilon^2/4\,|4\rangle+\cdots}_{\text{スクイーズド光}}\xrightarrow{\text{ポンプ強度}\to\infty\ (\varepsilon\to1)}|x=0\rangle$$



強いポンプ光

$\omega_0=2\omega_1$

ω_1

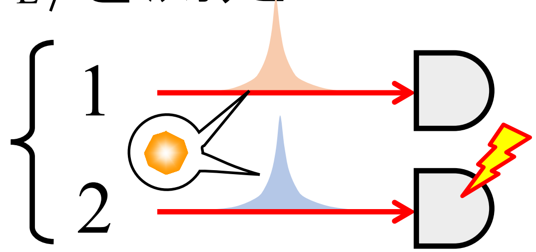
確率1でスクイーズド光
を生成

4. 測定

- 量子ビット：光子検出で $|0_L\rangle$ or $|1_L\rangle$ を測定

経路量子ビット

$$c_0|0_L\rangle + c_1|1_L\rangle = c_0|0\rangle_1|1\rangle_2 + c_1|1\rangle_1|0\rangle_2$$



- 連続量：ホモダイン測定で直交位相振幅 $\hat{x}, \hat{p}$ を測定

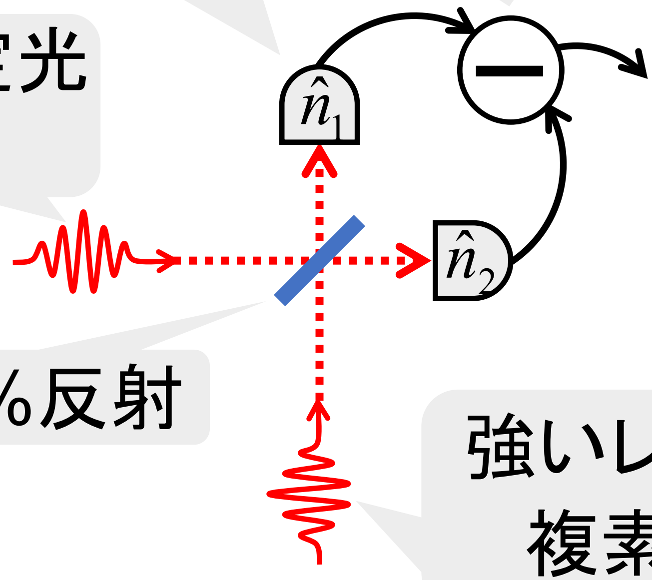
[arXiv:1401.4118]

②光強度測定

③引き算

被測定光 $\hat{x}, \hat{p}$

①50%反射



LO光の振幅倍信号を増幅

$$\hat{n}_2 - \hat{n}_1 = \sqrt{2}|\alpha|(\hat{x}\cos\theta + \hat{p}\sin\theta)$$

LO光の位相θに応じた
直交位相振幅を測定

強いレーザー光（LO光）
複素振幅：$\alpha = e^{i\theta}|\alpha|$

5. 制御方法

- 連続量の量子計算では、光の直交位相振幅 $\hat{x}, \hat{p}$ を制御

⇒Heisenberg描像での記述が便利

<u>Schrödinger描像</u>

$$|\psi\rangle \;-\!\!\!-\!\!\!-\; \boxed{\hat{U}} \;-\!\!\!-\!\!\!-\; \hat{U}|\psi\rangle$$

<u>Heisenberg描像</u>

$$\begin{matrix}\hat{x}\\ \hat{p}\end{matrix} \;-\!\!\!-\!\!\!-\; \boxed{\hat{U}} \;-\!\!\!-\!\!\!-\; \begin{matrix}\hat{U}^\dagger \hat{x} \hat{U}\\ \hat{U}^\dagger \hat{p} \hat{U}\end{matrix}$$

測定

$$\overbrace{\langle\psi|\hat{U}^\dagger}^{\text{状態が変化}}\underbrace{\hat{U}^\dagger\hat{x}\hat{U}}_{\text{演算子が変化}}\overbrace{\hat{U}|\psi\rangle}^{}$$

状態が変化

演算子が変化
（状態は不変）

例 : 位相シフト : $\hat{U} = \exp(-i\varphi\hat{n}) = \exp\left(-i\varphi\left(\hat{x}^2 + \hat{p}^2 - 1\right)/2\right)$

$$\hat{x} \rightarrow \hat{U}^\dagger \hat{x} \hat{U} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{p}\sin\varphi$$

$$\hat{p} \rightarrow \hat{U}^\dagger \hat{p} \hat{U} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{p}\cos\varphi$$

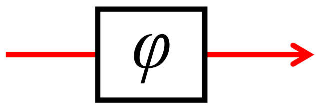
線形

任意の量子計算 = 任意の線形変換（expの中が$\hat{x}, \hat{p}$の2次以下）+ 非線形変換1個（expの中が$\hat{x}, \hat{p}$の3次以上）

5. 制御方法

- ①～④で任意の1モード操作が可能

①位相シフト



$$\hat{U} = \exp(-i\varphi\hat{n})$$

$$\hat{x} \to \hat{x}\cos\varphi + \hat{p}\sin\varphi$$
$$\hat{p} \to -\hat{x}\sin\varphi + \hat{p}\cos\varphi$$

線形

②変位操作

$$\hat{U} = \exp(ip_0\hat{x} - ix_0\hat{p})$$

$$\hat{x} \to \hat{x} + x_0$$
$$\hat{p} \to \hat{p} + p_0$$

線形

③スクイーズ操作

2次の非線形光学効果

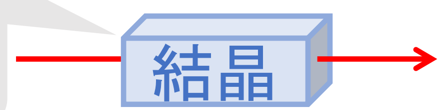
$$\hat{U} = \exp(ir(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})/2)$$

$$\hat{x} \to e^{-r}\hat{x}$$
$$\hat{p} \to e^{+r}\hat{p}$$

線形

④3次位相ゲート

3次の非線形光学効果



$$\hat{U} = \exp(i\gamma\hat{x}^3)$$

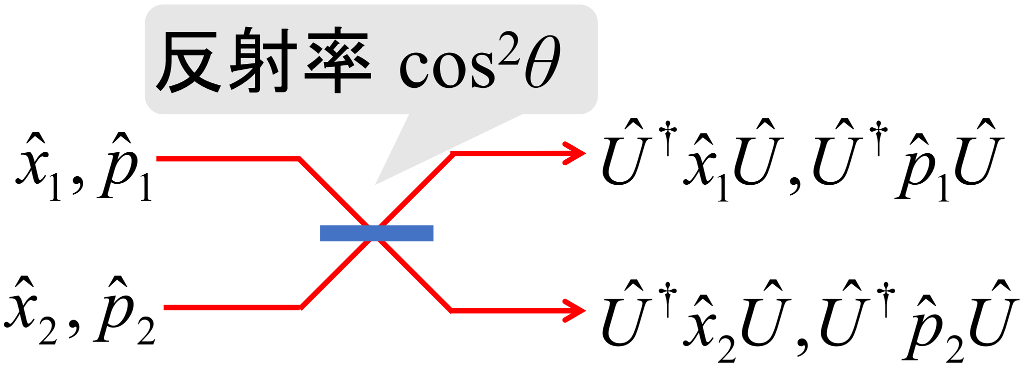
$$\hat{x} \to \hat{x}$$
$$\hat{p} \to \hat{p} + 3\gamma\hat{x}^2$$

非線形

6. 量子モード間相互作用

- 「前の1モード操作①～④」＋「以下の2モード相互作用⑤」＝任意の連続量量子計算が可能 [Rev. Mod. Phys. **77**, 513 (2005)]

⑤ビームスプリッタ相互作用



$$\hat{U} = \exp\left(i\theta\left(\hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1\right)\right)$$

$$\hat{x}_1 \to \hat{x}_1 \cos\theta + \hat{x}_2 \sin\theta$$

$$\hat{p}_1 \to \hat{p}_1 \cos\theta + \hat{p}_2 \sin\theta$$

$$\hat{x}_2 \to -\hat{x}_1 \sin\theta + \hat{x}_2 \cos\theta$$

$$\hat{p}_2 \to -\hat{p}_1 \sin\theta + \hat{p}_2 \cos\theta$$

線形

6. 量子モード間相互作用

- 3次位相ゲートは困難（3次の非線形光学効果は弱い）

3次の非線形光学効果

$\hat{U} = \exp\left(i\gamma\hat{x}^3\right)$

$\hat{x} \to \hat{x}$

$\hat{p} \to \hat{p} + 3\gamma\hat{x}^2$

非線形

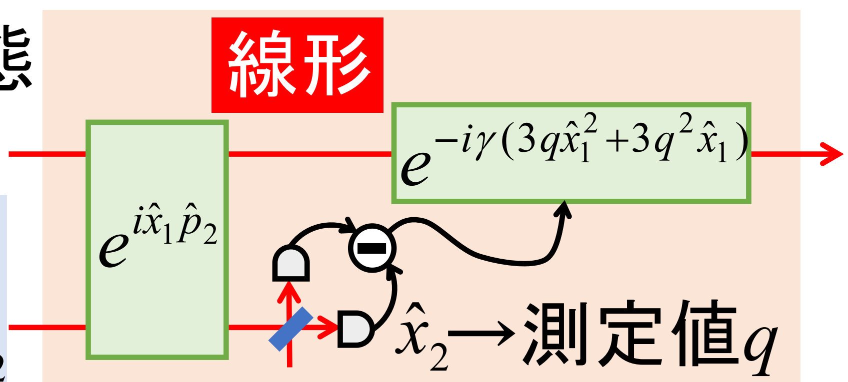
⇒入力状態を補助状態と相互作用させ、測定誘起で3次位相ゲートを行う手法の提案 [Phys. Rev. A **64**, 012310 (2001)]

入力状態

$|\psi\rangle_1$

非線形 補助状態

$\exp\left(i\gamma\hat{x}_2^3\right)|p=0\rangle_2$



出力状態

$\exp\left(i\gamma\hat{x}_1^3\right)|\psi\rangle_1$

非線形

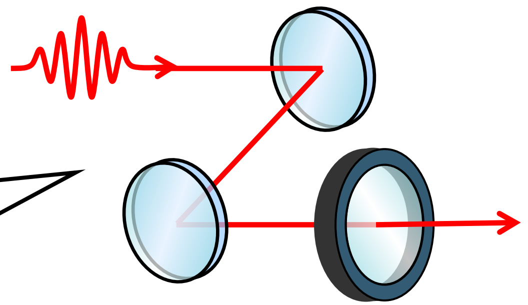
確率的手法で生成し、量子メモリに保存しておけばOK

⇒非線形ゲートが難しいという光の欠点を克服できる可能性

7. 制御時間（量子ビットと同じ）

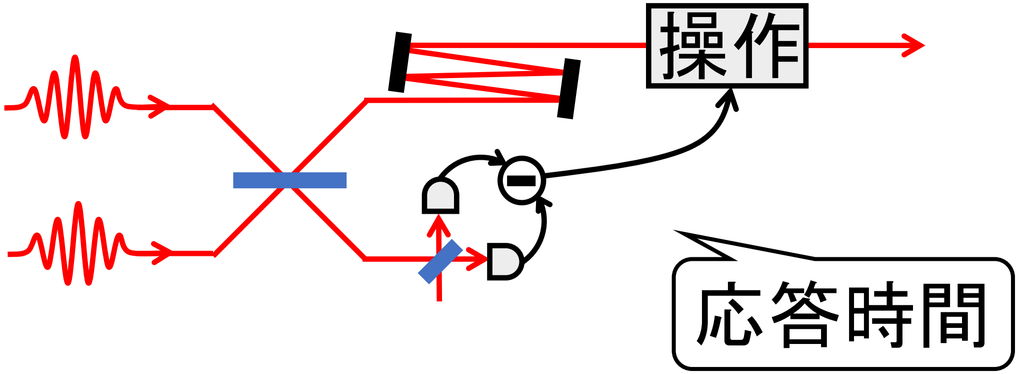
- 連続量の制御に要する時間
＝1ゲート当たりの光回路の長さ

空間光学系だと数cm～数十cm
⇒制御時間≲1ns
（導波路チップだとより短い）



- ホモダイン測定の結果に応じた光の操作が必要な場合
⇒電気回路の応答時間で数十ns以上要する場合もある

[Nature **500**, 315 (2013)]



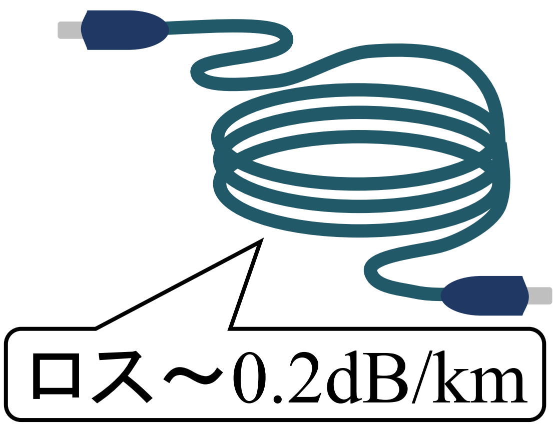
8. コヒーレンス時間（量子ビットと同じ）

- 光子のエネルギーは大きく、環境の熱雑音は無視できる

プランク定数h × 周波数ν（波長800nmで2.5×10^{-19}J） ≫ ボルツマン定数k_B × 温度T（温度20°Cで4×10^{-21}J）

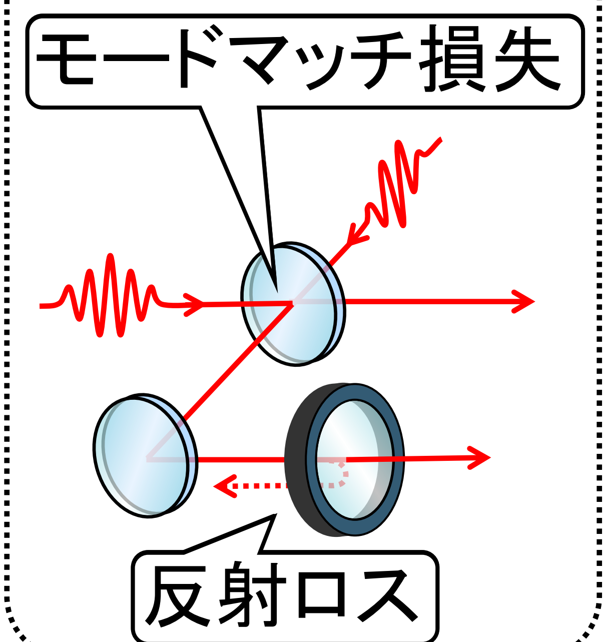
- 光の最大のデコヒーレンス要因は光のロス

光ファイバ中

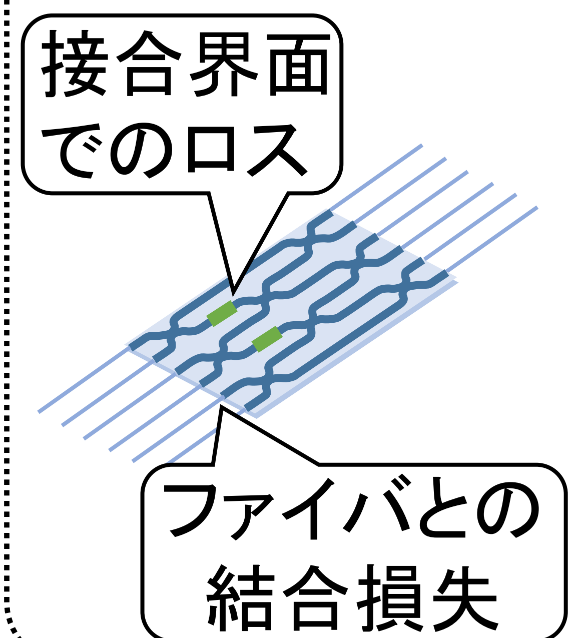


コヒーレンス時間
～100μs

空間光学系



導波路チップ

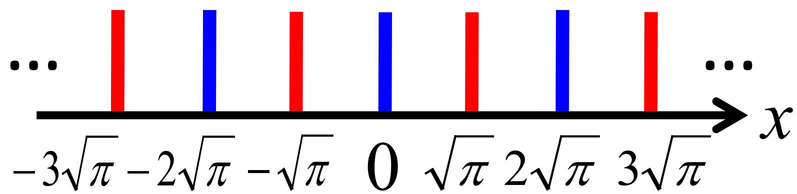


9. 拡張性

- 連続量をそのまま利用した量子アルゴリズムもあるが、「連続量空間の中に誤り訂正可能な量子ビットをコード」するアプローチが有力（ただし実現手法は発展途上）

例：GKP code

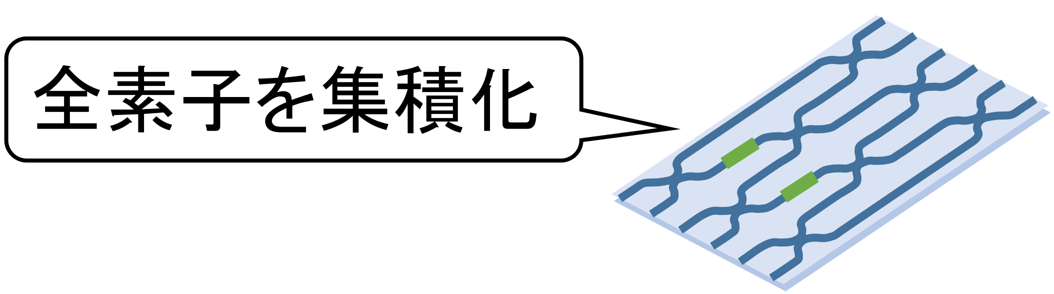
Phys. Rev. A **64**, 012310 (2001)



$$\left|0_{\mathrm{L}}\right\rangle \propto \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left|x = 2s\sqrt{\pi}\right\rangle$$

$$\left|1_{\mathrm{L}}\right\rangle \propto \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left|x = (2s+1)\sqrt{\pi}\right\rangle$$

- 光回路の集積化による拡張性（量子ビットと同じ）
  導波路チップ上に量子光源・光回路・検出器を集積化可能
  （ただし計算規模㊅だと回路規模㊅なので工夫が必要）



10. 応用およびその課題

- 幅広い量子技術への応用 [Nature Photonics **3**, 687 (2009)]

量子暗号

量子計算

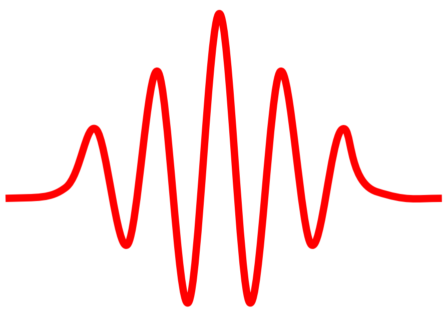
量子計測

- 共通する課題
  - 光のロスをいかに乗り切るか？
  - 特定の光の量子状態以外は確率1で生成できない
- 量子計算の課題
  - 3次位相ゲートがまだ確率1で実現できていない

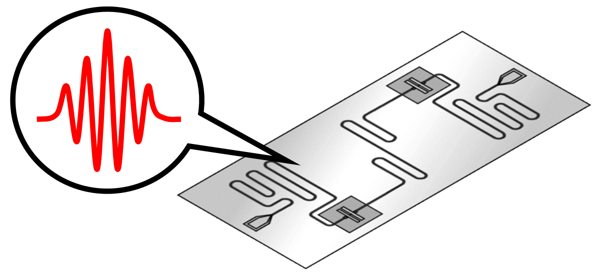
11. 他の分野とのつながり

- 連続量を扱うことのできる物理系 [Nature Physics **11**, 713 (2015)]

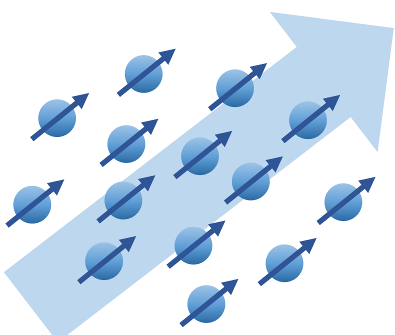
光



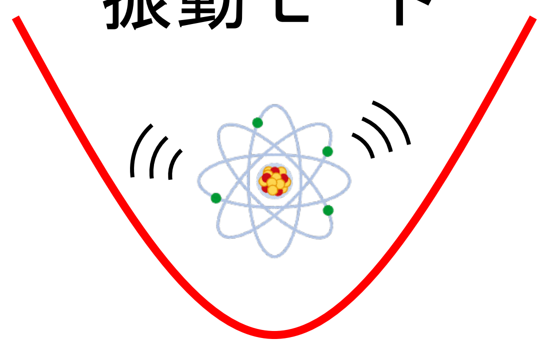
超伝導回路中のマイクロ波モード



原子の集団スピン



捕捉されたイオンの振動モード



12. より深く勉強したい方向けの文献

- 連続量量子情報処理の主に理論面を解説したレビュー
  S. L. Braunstein & P. van Loock, “Quantum information with continuous variables,” Rev. Mod. Phys. **77**, 513 (2005)

- 光の連続量量子情報処理技術の進展の記述を含む解説
  S. Takeda & A. Furusawa, “Optical Hybrid Quantum Information Processing,” arXiv:1404.2349 (2014)

- 光量子情報処理の教科書（連続量について詳しい）
  「新版 量子光学と量子情報科学」
  古澤明、武田俊太郎（サイエンス社、2020年）

- 光量子コンピュータの説明を含む一般向け書籍
  「量子コンピュータが本当にわかる！」
  武田俊太郎（技術評論社、2020年）