4/9 講義予定
シラバス

1. 実数、極限、級数、連続、
2. 微分、Taylor 展開、巾級数、
3. 積分、定積分、有理関数、広義積分

後期　多変数

1. 越　監修、高橋・加藤　共著　微分積分概論　サイエンス社　（必要最小限）
2. 金子著　数理系のための基礎と応用　微分積分 I、II　サイエンス社　（）
3. 小平著　解析入門　I、II　（本格派）

講義内容（(1) p.6-7, 179, 182 定理 3.　(2)p. 12-13, 22-23。(3) p.43-44）

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818\ldots.$$

なぜ収束するのか。どうやって値を求めるのか。

$$e' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(= e).$$

数列 $a_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

を級数とよぶ。部分和 $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ の数列が収束するとき、その極限 $\lim_{m\to\infty} s_m$ を級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の和とよび、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ で表す。

例: 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ は $|a| < 1$ のとき収束し、その和は $\dfrac{1}{1-a}$.

収束条件

実数の連続性: 各項が正であるような級数が収束するためには、その部分和の数列が上に有界であることが必要十分。

級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ はこの条件を満たす。実際

$$\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{1}$$

よって $s_m \le 3$.

実数の連続性（いいかえ）: 上に有界な単調増加数列は収束する。

実数—近似値をいくらでも精密にもとめることができる。不等式 (1) より、

$$|e' - s_m| \le \frac{1}{2^{m-1}}.$$

問題：$e' = 2.7182818\ldots.$ を示すためには m をいくつにとればよいか。その m に対する s_m を計算して、上の式を確かめよ。

$e' = e$ の証明.

$$
\begin{aligned}
|e' - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m| &\leq |e' - s_m| + \left|s_m - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right| \\
&\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)\right).
\end{aligned}
$$