6/18 講義予定

交代級数の収束. ([1] p.188 定理 8, [2] p.24 定理 1.4, [3] p.45 定理 1.23.)

$a_n > 0, \lim_{n\to 0} a_n = 0$ かつ単調減少ならば，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束.

$$|a - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k| \leq |a_{n+1}|.$$

他の関数の巾級数展開。

([1] p.44 例 20(5), p.194 例題 3, [2] p.73, [3] p.239 例 5.11.)

$$\begin{aligned} & (1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n \\ = \; & 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4 + \cdots . \\ & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}, \\ = \; & 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots . \end{aligned}$$

([1] p.195 問 11(3), [2] p.75, [3] p.239 例 5.14.)

$$\begin{aligned} \mathrm{Arcsin}x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^{2n}\right)dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n\cdot(2n+1)}x^{2n+1} \\ &= x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots . \end{aligned}$$

微分方程式：([1] p.197, [2] p.134.)

$f(x)$ と $f'(x)$（やさらに高次の導関数）を含む方程式.

微分方程式を解く：方程式をみたす関数 $f(x)$ を求める.

例　$f'(x) = f(x)$. 解は $f(x) = Ce^x$(C は定数）.

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0$$

より、$\dfrac{f(x)}{e^x}$ は定数.

一般には、方程式だけで $f(x)$ は一意的には定まらない。

初期条件：いくつかの値 $f(a), f'(a)$ 等を指定する．

例　方程式 $f'(x) = f(x)$，初期条件 $f(0) = 1$．解は $f(x) = e^x$．

$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の別証明．$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は $f'(x) = f(x)$、$f(0) = 1$ をみたす。

$(1+x)^a$ は $-1 < x < 1$ で定義され，初期条件 $f(0) = 1$ をみたす、微分方程式 $(1+x)f'(x) = af(x)$ のただ1つの解.

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^a}\right)' = \frac{(1+x)^a f'(x) - a(1+x)^{a-1}f(x)}{(1+x)^{2a}} = \frac{(1+x)f'(x) - af(x)}{(1+x)^{a+1}} = 0$$

より、$\dfrac{f(x)}{(1+x)^a}$ は定数.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ の収束半径は $|\binom{a}{n+1}/\binom{a}{n}| = |\frac{a-n}{n+1}| \to 1$ だから 1．したがって $-1 < x < 1$ で関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ が定義される．これは初期条件 $f(0) = 1$ をみたし、

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} n x^{n-1}.$$

$n\binom{a}{n} = a\binom{a-1}{n-1}$, $\binom{a-1}{n-1} + \binom{a-1}{n} = \binom{a}{n}$ だから，

$$(1+x)f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a\binom{a-1}{n-1} + a\binom{a-1}{n})x^n = a\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = af(x).$$

よって、

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$