6/25 講義予定

定積分 ([1] p.82, [2] p.101-104, 127-133, [3] p.153-158)

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数とする．定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を次のように定義する．

$\Delta : a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{i-1} \leq a_i \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n = b$ を閉区間 $[a,b]$ の分割とする．各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，x_i を $a_{i-1} \leq x_i \leq a_i$ をみたすようにとり，和 $S = \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1})$ を考える．分割の直径 $|\Delta| = \max_i(a_i - a_{i-1})$ を 0 に近づけたときの S の極限が存在する．この極限を $\int_a^b f(x)dx$ と定義する．

各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，m_i を $a_{i-1} \leq x \leq a_i$ での $f(x)$ の最小値とし，M_i を最大値とする．$s_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i(a_i - a_{i-1})$, $S_\Delta = \sum_{i=1}^n M_i(a_i - a_{i-1})$ とおくと，$s_\Delta \leq S \leq S_\Delta$ である．$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(a_i - a_{i-1}) \leq \max_i(M_i - m_i)(b-a)$ である．

Δ' を別の分割とする．Δ'' を Δ と Δ' の共通の細分とすると，$s_\Delta \leq s_{\Delta''} \leq S_{\Delta''} \leq S_\Delta$，$s_{\Delta'} \leq s_{\Delta''} \leq S_{\Delta''} \leq S_{\Delta'}$ である．したがって、極限の存在を示すには，$|\Delta| \to 0$ のとき $\max_i(M_i - m_i) \to 0$ を示せばよい．

ここでは、簡単のため $f(x)$ が連続微分可能な場合に示す．M' を $a \leq x \leq b$ での $|f'(x)|$ の最大値とする．このとき，$M_i - m_i \leq M'(a_i - a_{i-1})$ である．よって，$\max_i(M_i - m_i) \leq M'|\Delta| \to 0$ ($|\Delta| \to 0$ のとき) である．

例

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \log 2$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ とし，区間 $[1,2]$ の分割を $1 = \frac{n}{n} \leq \frac{n+1}{n} \leq \cdots \frac{n+i-1}{n} \leq \frac{n+i}{n} \leq \cdots \leq \frac{2n}{n} = 2$ と定め，$x_i = \frac{n+i}{n}$ とおく．このとき，和 $S = \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1})$ は $\sum_{i=1}^n (\frac{n+i}{n})^{-1}\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$ となる．したがって極限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\log x]_1^2 = \log 2$.

微積分の基本定理 ([1] p.85 定理９, [2] p.101, [3] p.165 定理 4.4.)

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x)$$

左辺は $\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx$ と $\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^x f(x)dx$ の共通の値．$x - h \leq y \leq x + h$ での $f(y)$ の最大値を M_h, 最小値を m_h とすると，

$$m_h h \leq \int_x^{x+h} f(x)dx, \int_{x-h}^h f(x)dx \leq M_h h.$$

両辺を h で割り $h \to 0$ とすると $m_h \to f(x), M_h \to f(x)$.