4/16 講義予定

webpage: http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~t-saito/ce.html

演習： 牛腸先生 火曜 4 限 574

前回の復習と補足 ([1] p.6-7, p.182 定理 3, [2] p.12-13, 22-23, [3] p.43-44.)

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ は収束し、その和は $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ と等しい。s_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$ を部分和とすると $|e - s_m| \leq 1/2^{m-1}$.

実数の連続性のいいかえ:([1] p.6 定理 3, [2] p.12 定理 1.1, [3] p.37 定理 1.20.)

上に有界な単調増加数列は収束する。

絶対収束：([1] p.188-189, [2] p.152 定理 5.5, [3] p.42 定理 1.21.) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する。このとき $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという。

優級数の方法：([1] p.184 定理 5, [3] p.42 定理 1.22.) $|a_n| \leq b_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するなら、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。

例。([1] p.192 問 10, [3] p.43 例 1.3.) 任意の実数 x に対し級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は絶対収束する。

$M \geq 2|x|$ をみたす自然数をとる。$n \geq M$ なら $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{|x|^M}{M!}\frac{1}{2^{M-n}}$.

実は $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ がなりたつ。

これを使うと、自然数 $n \geq 0$ に対し $\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!} \to \infty$ $(x \to \infty$ のとき$)$ が直ちにわかる。

(cf. [1] p.42-43)

$$\begin{aligned}
|e - s_m| &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{(m+1)!}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(m+2)^n} \\
&\leq \frac{1}{(m+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{m+2}} = \frac{1}{(m+1)!}\frac{m+2}{m+1}.
\end{aligned}$$

逆三角関数:([1] p.12-15,p.28-29, [2] p.35-37, p.58-59, [3] p.87, p.115, p.167-170.)