5/21 講義予定

e^x の巾級数展開 ([1] p.42 例 18, p.44 例 20, [2] p.85, [3] p.145 例 3.9)

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{e^t \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

右辺の絶対値は $\leq \frac{e^{|x|} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}$ で、$n \to \infty$ のとき $\to 0$. よって、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

これを e^x の巾級数展開という。同様にして、巾級数展開

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

が得られる。

等比級数の和の公式より、$|x| < 1$ のとき

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

がなりたつ。これを項別積分して

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

導きたい。

一般に数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ に対し、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を巾級数とよぶ。

巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束。([1] p.190-192, [2] II p.131-133, [3] p.231-232)

定理。実数の集合 $S \subset T$ を

$$S = \{x \in \mathbf{R} | \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{は収束する} \}, \quad T = \{x \in \mathbf{R} | a_n x^n \to 0 \ (n \to \infty \text{ のとき})\}$$

と定める。

1. T について、次のどれかがなりたつ。

(1) $T = [r, -r]$ となるような実数 $r \geq 0$ がある.

(1') $T = (r, -r)$ となるような実数 $r \geq 0$ がある.

(2) $T = \mathbf{R}$.

2. S について次が成り立つ。

(1) $T = [r, -r]$ または $(r, -r)$ ならば、$(r, -r) \subset S \subset [r, r]$ がなりたつ。

(2) $T = \mathbf{R}$ のときは $S = \mathbf{R}$.

定義　(1) のとき r を巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径と呼ぶ。(2) のときは $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は ∞ であるという。

例。巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の収束半径は ∞ である。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の収束半径は 1 である。

[証明] 1. $T = -T$ である。$0 \le x < t$ かつ $t \in T$ ならば $x \in T$ である。このことより T が有界なら $r = \sup T$ とおくと (1) または (1') がなりたつことがしたがう。T が有界でなければ (2) がなりたつ。

2. 明らかに $S \subset T$ である。$t \in T$ とする。自然数 N を十分大きくとると、すべての $n \ge N$ に対し $|a_n t^n| \le 1$ となっている。$|x| < t$ とすると、すべての $n \ge N$ に対し $|a_n x^n| \le \left(\dfrac{|x|}{t}\right)^n$ だから、優級数の方法により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する。したがって、$(-t, t) \subset S$ が得られる。

よって (1) のときは $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-r + \frac{1}{n}, r - \frac{1}{n}) = (-r, r) \subset S \subset [-r, r]$ が得られる。(2) のときは $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n) = \mathbf{R} \subset S \subset \mathbf{R}$ が得られる。

収束半径の計算 ([1] p.192, [2] II p.133,)

$\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ (あるいは $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = l$) が存在すれば、$r = \dfrac{1}{l}, (l \ne 0)$, $r = \infty, (l = 0)$。

[証明] $|x| < 1/l$ とすると、$\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| < 1$. よって $a_n x^n \to 0 (n \to \infty)$, $x > 1/l$ なら、$\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| > 1$ だから、$|a_n x^n| \to \infty (n \to \infty)$,