進歩関数(Progress Function)の理論的基礎

東京大学経済学部　高橋伸夫

Muth (1986)のモデルの一部を修正して､技術的代替案の母集団からの無作為探索(random search)を行うことで、より低コストの技術を採用していくという単純なモデルを考え、進歩関数が冪関数になることを示そう。さらにその基本モデルの拡張によって進歩関数のその他の性質も説明できることを Muth (1986)を参考にしながら示すことにしよう。ここでの基本的なモデルは、次の仮定に基づいている。

①製造コストの低減は、技術的(あるいは経営的、行動的)代替案の母集団からの独立な無作為抽出つまり無作為探索によって、より低コストで済む技術的代替案が発見された場合に生起する。

②探索は生産活動によって促される。つまり、技術的代替案の母集団から無作為抽出された標本の大きさ n は累積生産量 y に比例する。このとき、i 番目の技術的代替案の抽出は第 i 期に行われたものとする。すなわち累積生産量 y は期数 i に比例して増大する。

③製造プロセスは一つかそれ以上の製造作業から構成されている。各製造作業において、技術的代替案に関する探索が独立に行われ、より低コストの技術的代替案が発見されたならば、即座に採用され、次の期には効果を現し、コスト低減が達成される。

そこで、労働時間または製造コストxがnとどのような関係にあるのかを考えてみよう。いま、ある作業について、第n-1 期までに累積生産量に比例してn-1 個の技術的代替案が探索されたとしよう。そのうち第i期に探索された技術的代替案による製造コストを確率変数$X_{(i)}$で表す。このとき第n期に可能となる最小製造コストを確率変数X_nで表すことにすると、これは直前の第n-1 期までに探索されたn-1 個の独立同分布の確率変数$X_{(i)}$, i=1,..., n-1 のうちの最小値で表わされることになる。つまり各確率変数$X_{(i)}$, i=1,..., n-1 の分布関数を$F(x)$で表わすと、X_nの分布関数$G_n(x)$は、

$$G_n(x)=\Pr\{X_n \leqq x\}=1-\Pr\{X_n>x\}=1-\Pr\{X_{(1)}>x\ ,\ X_{(2)}>x\ ,\ ...,\ X_{(n-1)}>x\}$$
$$=1-(\Pr\{X>x\})^{n-1}=1-(1-\Pr\{X\leqq x\})^{n-1}=1-(1-F(x))^{n-1}$$

となる。もし確率分布が区間 [0, 1] の一様分布ならば、$F(x) = x$ で

$$G_n(x) = 1-(1-x)^{n-1}$$
$$\mathrm{E}(x) = 1/n = n^{-1}$$

となる。このとき両対数グラフで第 2 期以降の製造コストの期待値をプロットすると、完全に直線上にのることになる。第 1 期については、まだ技術的代替案の探索の結果は現れておらず、コストは最大の状態であると考え、初期状態は分布の上限$X_{(1)}$=1 であると仮定するならば、完全に同じ直線上にのることになる。

このことを実際にシミュレーションで確かめてみよう。いま製品の製造プロセスを初期コストで 100 等分するような 100 の作業に分割したと仮定しよう。各作業では独立に改善作業が行われる。このとき、ある一つの作業を抜き出して、その進歩関数を見てみると、階段状のものになる(図 1)｡しかし､100 の作業を組み合わせた製造プロセス全体で見ると、変化はより滑らかになり､進歩関数は直線に近づくようになる(図 2)｡一様分布の場合だけではなく、理論的には、大標本理論では、$F(x)=cx^k$のタイプの分布関数(k=1 のときは一様分布になる)のとき、進歩関数は冪関数の形になることが知られている。

以上のことから、このモデルによって、進歩関数が冪関数の形になることが説明できたことになる。そしてさらに上述の基本モデルを若干拡張することで、進歩関数の次のような性質も説明することができる。

初期凹性(initial concavity)

既存研究の中には、製造開始の初期の頃に下向きに凹になる傾向をもったデータが見つかることがある。正確には、$x = kn^{-a}$ ではなく、$x = k(n+b)^{-a}$ のようになるといわれている(Garg & Milliman, 1961)。このbの部分は、仮定②で、最初の製品を作る前に、既に類似の製品での経験や事前計画という形で探索が始まっていることを許せば、その事前の探索を表していると説明することができる。

実はMuth (1986)のオリジナルのモデルでは、このように第1期で既に技術的代替案の探索の成果が現れるということを仮定していたので、確率変数X_nはn-1個ではなく、n個の独立同分布の確率変数$X_{(i)}$, i=1,...,nのうちの最小値で表わされることになっていた。もし確率分布が区間 [0, 1] の一様分布ならば、

$$G_n(x) = 1-(1-x)^n$$

$$\mathrm{E}(x) = 1/(n+1) = (n+1)^{-1}$$

ということになる。これは、両対数グラフでは初期凹性のある曲線となる(図3)。このことはシミュレーションでも示すことができる(図4)。nが大きくなれば、大標本理論で、$F(x)=cx^k$のタイプの分布関数(k=1のときは一様分布になる)のとき、進歩関数は冪関数の形になることが知られており、ほぼ直線になる。

図1. 個々の作業レベルでの
進歩関数のシミュレーション

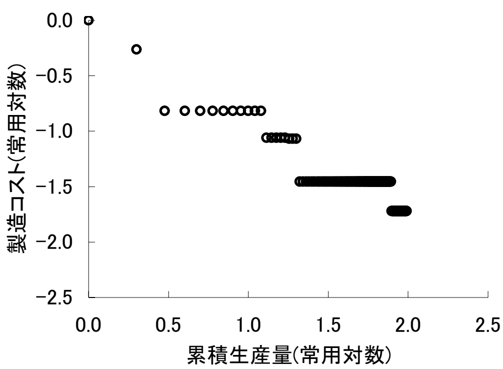

図2. 作業数100の製造プロセスの
進歩関数のシミュレーション

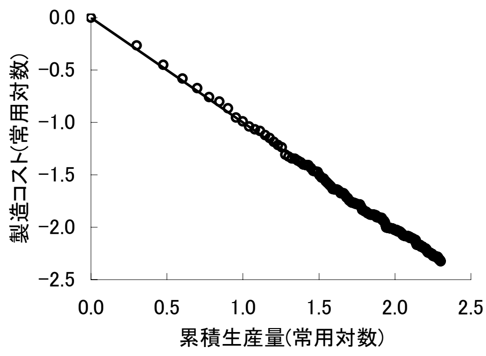

図3. Muthモデルの期待製造コスト

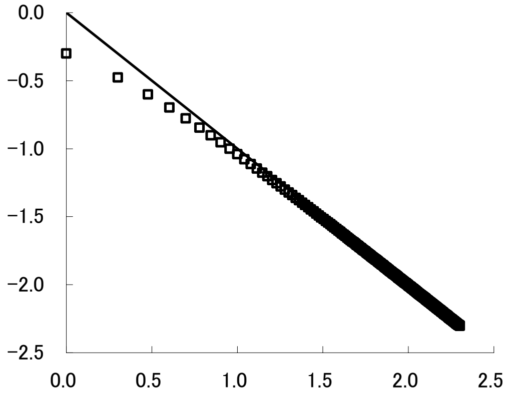

図4. Muthモデル進歩関数のシミュレーション
(作業数100の製造プロセスの場合)