東京大学 工学部 計数工学科/物理工学科
応用音響学：予備 – フーリエ解析の復習

嵯峨山 茂樹 <sagayama@hil.t.u-tokyo.ac.jp>
東京大学 工学部 計数工学科 http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/

- フーリエ解析
- フーリエ変換の定義: いくつかの流儀
- フーリエ変換の性質、畳み込み定理

フーリエ級数からフーリエ積分へ

区間$(-1/T, 1/T)$での$f(t)$のフーリエ級数展開 (復習)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega t}, \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

- 任意の関数$f(t)$を有限区間$(-\frac{1}{T} \geq t \geq -\frac{1}{T})$で級数表現。
  (Tを周期とする周期関数$f(t)$を全区間$(-\infty < t < \infty)$で級数表現。)

→ フーリエ係数列$\{c_k\}$ (複素係数) あるいは正弦係数と余弦係数

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\Omega t}dt$$

$f(t)$の再帰的な表現 (上の2式を互いに代入)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)e^{-jk\Omega\tau}d\tau\right] e^{jk\Omega t}$$

積分区間Tを無限大にするとどうなるか? → Fourierの積分定理
(関数$f(t)$はそのままで、フーリエ展開の区間を無限に広げて行く。)

$\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$を$\Delta\omega$と書き換えて、$\Delta\omega \to 0$

Fourierの積分定理

Fourier の積分定理

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau d\omega$$

(直観的導出)

フーリエ展開において、係数c_kを求める式を代入すると、$f(t)$は$f(t)$自身によって

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)e^{-jk\Delta\omega\tau}d\tau\right]e^{jk\Delta\omega t}, \qquad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)e^{jk\Delta\omega(t-\tau)}d\tau\right]\Delta\omega \end{aligned}$$

と書けるから、$T \to \infty$の極限を取ると、($k\Delta\omega \to \omega,\ \Delta\omega \to d\omega$)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau d\omega$$

QED

フーリエ変換

「Fourierの積分定理」から

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}d\tau d\omega$$

これを $F(\omega)$ と書く

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right\} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}F(\omega)d\omega$$

但し、 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

任意の関数 $f(t)$ を全区間 $(-\infty < t < \infty)$ で積分表現。

フーリエ変換とフーリエ逆変換

時間の関数(信号) $f(t)$

↓

Fourier 変換

$$F(\omega) = \mathcal{F}[\ f(t)\ ] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

↓

周波数の関数(スペクトル) $F(\omega)$

↓

Fourier 逆変換

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\ F(\omega)\ ] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

(角) 周波数 ω **において、**$d\omega$ **の幅に** $F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ **分の成分 (周波数成分) を持つ。**

↓

時間の関数(信号) $f(t)$

フーリエ変換対とラプラス変換対

- **Fourier 変換対 (相互変換可能、同一情報の表と裏)**

$$f(t) \qquad \leftrightarrow \qquad F(\omega)$$

時間 (t) 領域　　周波数 (ω) 領域

- **Cf. Laplace 変換対 (相互変換可能、同一情報の表と裏)**

$$f(t) \qquad \leftrightarrow \qquad F(s)$$

時間 (t) 領域　　演算子 (s) 領域

- **疑問: Laplace変換で $s = j\omega$ と置いたものと、Fourier変換はどう違う?**
  回答: 周波数応答は、$t < 0$ では $h(t) = 0$ であるような系についてのみ。

Fourier 変換の定義のいくつかの流儀 (1/2)

■ フーリエ変換の係数が1の方式。

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt, \quad x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

これはフーリエ級数の定義区間長 T を $T\to\infty$ とすることにより、自然な拡張で定義する点でわかりやすい。(本講義では教科書通りにこの方式を用いる)

■ 逆フーリエ変換の係数が1の方式。

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt, \quad x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$\frac{1}{2\pi}$ の係数を反対に置いている。これは、信号は各周波数成分 $X(\omega)$ の総和 (積分) になっているという直観によく合う定義である。特に $X(\omega)$ がパワースペクトルの場合 $x(0)$(自己相関関数の $\tau=0$ の値) は総パワーになる。

Fourier 変換の定義のいくつかの流儀 (2/2)

■ 対称な係数を用いる方式。

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

完全に対称になるので、美しさを求める数学で用いられる。ただし、物理的な意味が明確でなく、工学ではあまり用いない。

■ 周波数 f を用いる方式。

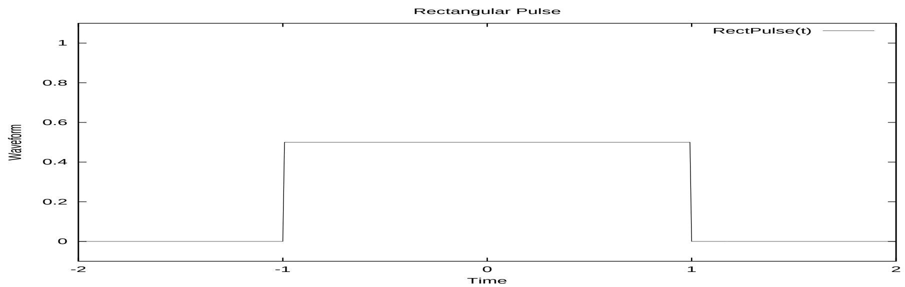
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

角周波数 ω でなくいわゆる周波数を用いる。Hz 単位でスペクトル領域で考えるにはこの方が便利。通信理論や通信方式の実際で用いられる。

sinc関数: 矩形パルスのフーリエ変換

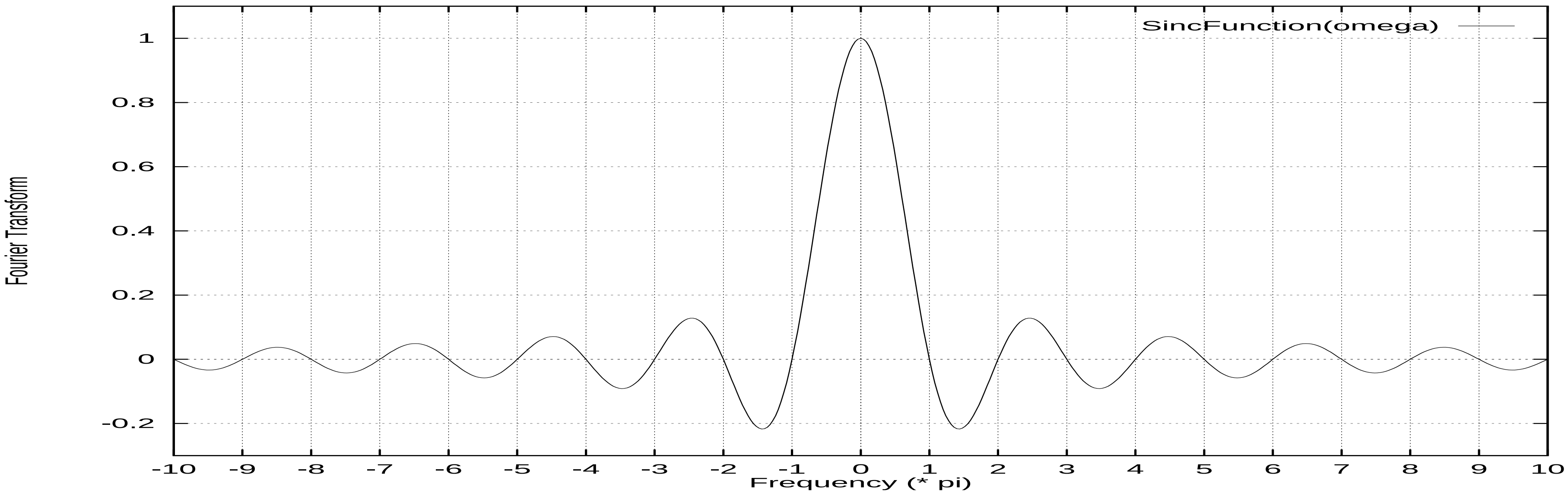
矩形パルス波形

$$f(t) = \begin{cases} 1/2, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$



のフーリエ変換はsinc関数

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} [j e^{-j\omega t}]_{-1}^{1} = \frac{\sin \omega}{\omega} = \mathrm{sinc}\ \omega$$



フーリエ変換の存在条件

フーリエ変換

$$\mathcal{F}[\ f(t)\ ] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt < \infty$$

が存在するための条件。$|e^{-j\omega t}| = 1$だから、

- 関数 $f(t)$ が $-\infty < t < \infty$ において区分的に滑らか。
- 関数 $f(t)$ が絶対可積分。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$$

- 不連続点の値

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \mathcal{F}^{-1}\{\ F(\omega)\ \}$$

フーリエ変換の性質 (1/2)

$F(\omega) = \mathcal{F}[\ f(t)\ ], F_1(\omega) = \mathcal{F}[\ f_1(t)\ ], F_2(\omega) = \mathcal{F}[\ f_2(t)\ ]$、
a, a_1, a_2 を定数とすると、

■ **線形性 (linearity)**

$$\mathcal{F}[\ a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\ ] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

■ **縮尺 (scaling)**

$$\mathcal{F}[\ f(at)\ ] = \frac{1}{|\ a\ |} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

■ **時間反転 (time inversion)**

$$\mathcal{F}[\ f(-t)\ ] = F(-\omega)$$

■ **時間シフト (time shift)**

$$\mathcal{F}[\ f(t-t_0)\ ] = F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

(応用例: 円心法(2003年度卒論) = 特許出願済み)

■ **周波数シフト (frequency shift)**

$$\mathcal{F}\left[\ f(t) e^{j\Omega t}\ \right] = F(\omega - \Omega)$$

フーリエ変換の性質 (2/2)

■ 対称性 (symmetry)

$$\mathcal{F}[\ F(t)\ ] = 2\pi f(-\omega)$$

■ 時間微分 (differentiation)

$$\mathcal{F}[\ f'(t)\ ] = j\omega F(\omega) = j\omega \mathcal{F}[\ f(t)\ ]$$

■ 時間積分 (integration)

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = F(0) = 0$ ならば、

$$\mathcal{F}\left[\ \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\ \right] = \frac{1}{j\omega}F(\omega) = \frac{1}{j\omega}\mathcal{F}[\ f(t)\ ]$$

■ 周波数微分 (differentiation)

$$\mathcal{F}\left[\ (-jt)^k f(t)\ \right] = \frac{d^k}{d\omega^k}F(\omega)$$

畳み込み定理

- **畳み込み定理 (convolution theorem)**

$$\mathcal{F}[\ f_1(t) * f_2(t)\ ] = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

- **畳み込み(合成積, convolution)とは ...**
  - **定義**

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

  - **可換則 (commutative law)**

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

  - **結合則 (associative law)**

$$(f_1(t) * f_2(t)) * f_3(t) = f_1(t) * (f_2(t) * f_3(t))$$

  - **δ関数**

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$f(t) * \delta(t-\tau) = f(t-\tau)$$

周波数畳み込み定理

■ 周波数畳み込み定理

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\} = 2\pi f_1(t) f_2(t)$$

または

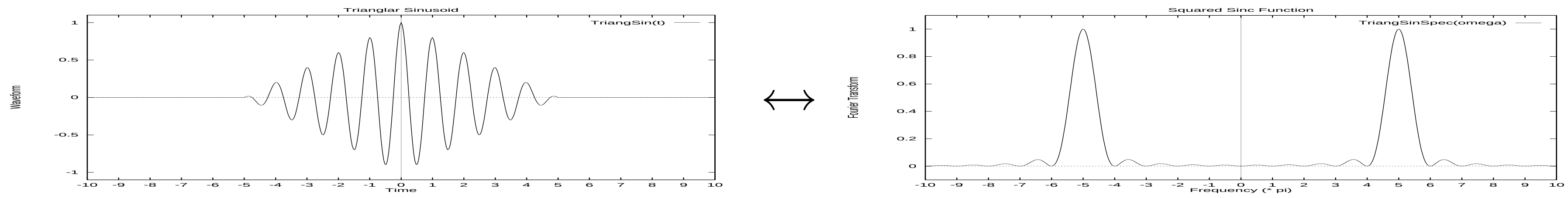
$$\mathcal{F}[\ f_1(t) f_2(t)\ ] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

■ (応用例: Lag Window 法 = NTT 特許 → 音声符号化国際標準へ)

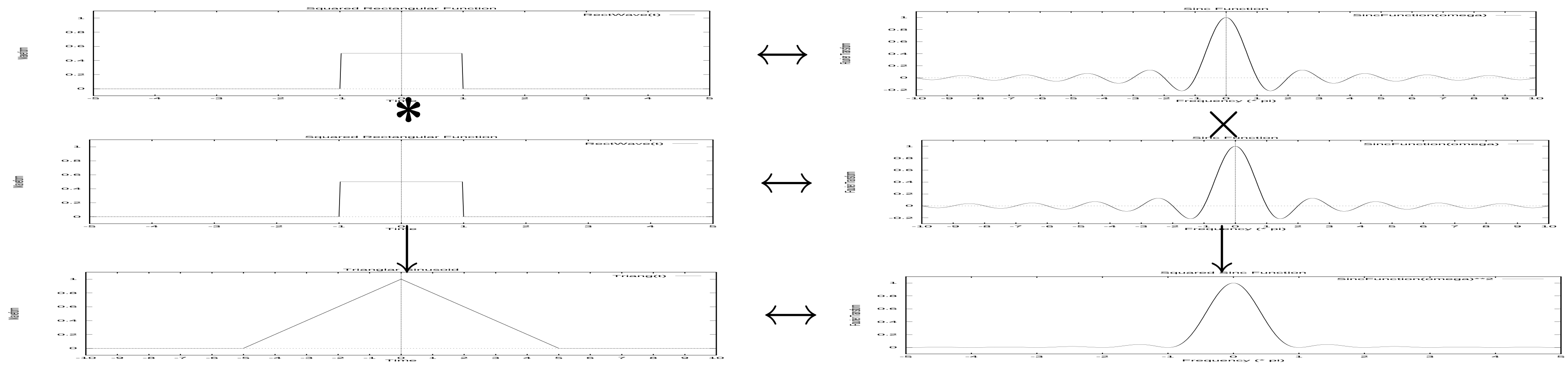
- $F_1(\omega)$ ： **音声スペクトル →** $f_1(t)$ ： **音声自己相関関数**
- $F_2(\omega)$ ： **平滑化窓関数 →** $f_2(t)$ ： **ラグ窓関数**
- $F_1(\omega) * F_2(\omega)$ ： **平滑化音声スペクトル→** $2\pi f_1(t) f_2(t)$ ： **自己相関関数にラグ窓を掛ける**
- **ピッチ微細構造の影響を受けない LPC 分析をしたい→ 平滑化音声スペクトルを LPC 分析する→ 自己相関関数にラグ窓を掛けた後、LPC 分析などを行う (特許)**

畳み込み・乗算の応用

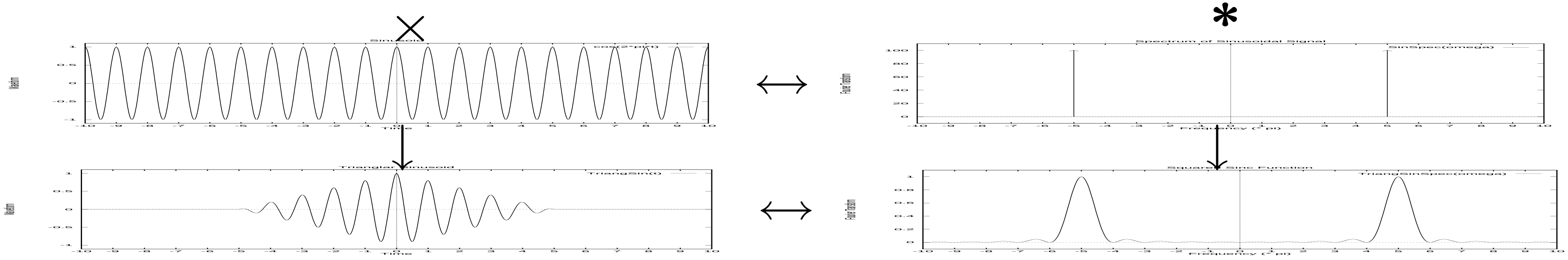
■ 例題: 三角包絡正弦波のフーリエスペクトルは?



■ 窓関数 (畳み込み)

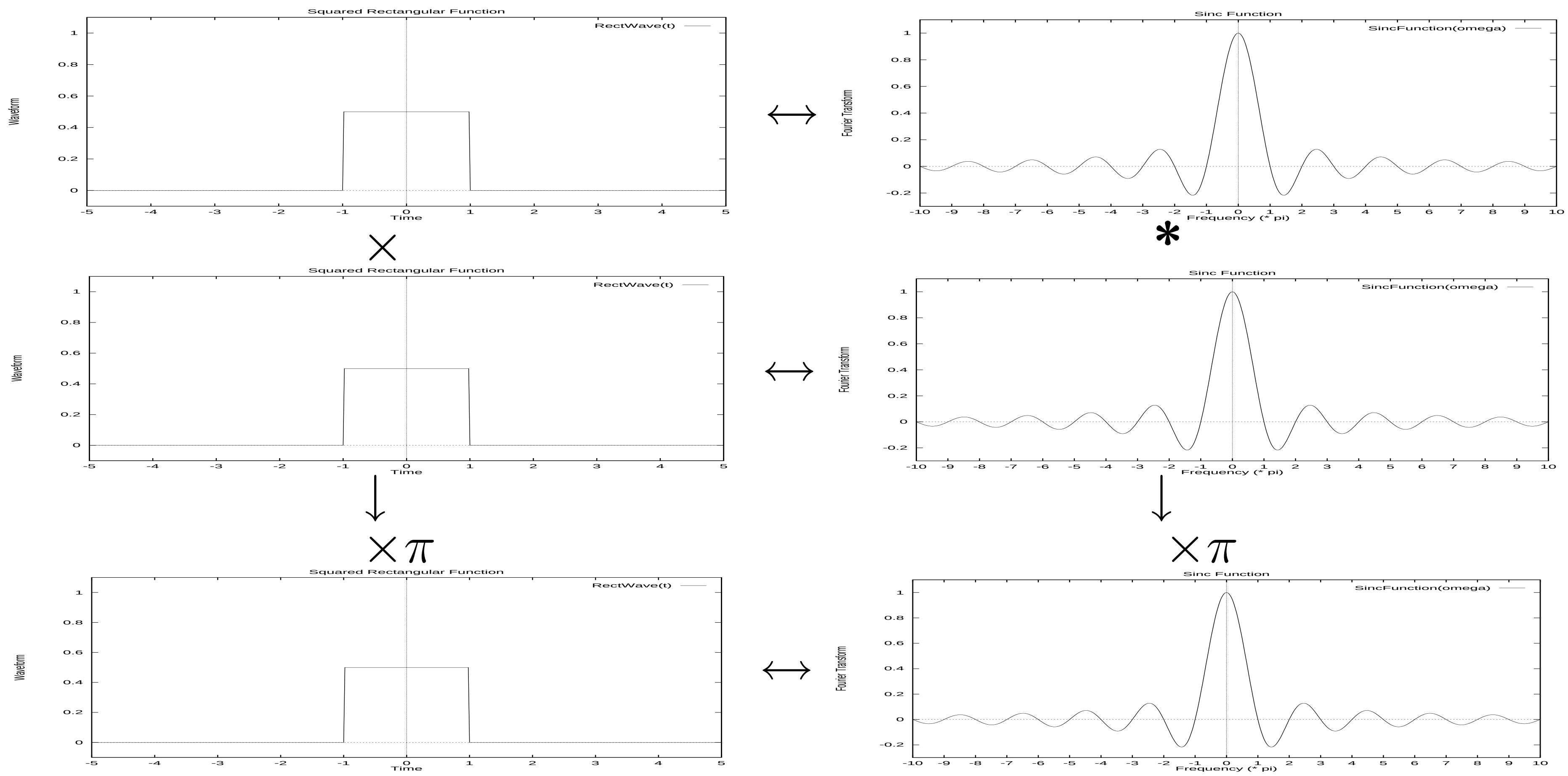


■ 変調 (乗算)



畳み込み・乗算の応用 (2)

例題: sinc 関数同士の畳み込みは?



$$\mathrm{sinc}\,\omega * \mathrm{sinc}\,\omega = 2\pi\mathcal{F}\left[\ \mathrm{rect}_1(t)/2 \cdot \mathrm{rect}_1(t)/2\ \right] = \pi\mathcal{F}\left[\ \mathrm{rect}_1(t)/2\ \right] = \mathrm{sinc}\,\omega$$

Parseval の定理

- **Fourier 変換における Parseval の定理**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

(導出)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)e^{-j\omega t}dt\right]_{\omega=0} = \left[\mathcal{F}[\ f(t)f^*(t)\ ]\right]_{\omega=0}$$

- $f(t)$ **のエネルギーは、周波数区間** $\omega \sim \omega + d\omega$ **の間に、** $\frac{1}{2\pi}|F(\omega)|^2 d\omega$ **の割合で分布する。**
- $|F(\omega)|^2$ **をエネルギースペクトルと呼ぶ。**

Dirac のデルタ関数 (単位インパルス関数)

- **定義:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \phi(0)$$

あるいは、

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & (t \neq 0) \\ \infty, & (t = 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)dt = 1, \qquad (\epsilon > 0)$$

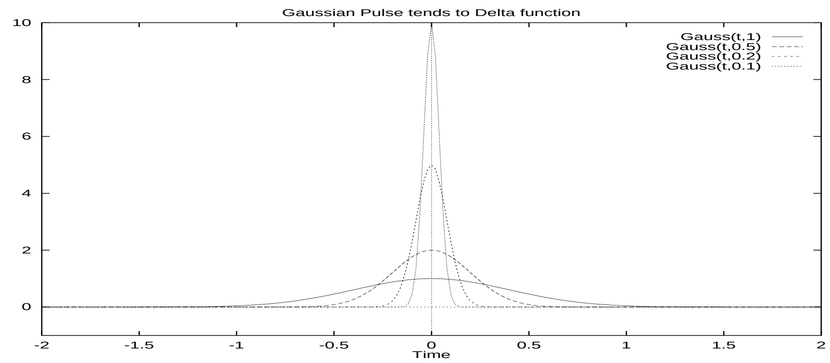
- **通常の意味の「関数」ではない。($\delta(0) = \infty$)**
- **主にテスト関数$\phi(t)$との内積で用いられる。(汎関数の定義域、超関数)**
  - **テスト関数: 無限回微分可能、tの有限区間外では$\phi(0) = 0$**
- **実際の物理現象の説明に便利。**
- **不連続な関数の微分に適用可能。**

例: Heaviside 単位ステップ関数の微分は、 $\dfrac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$

デルタ関数に収束するさまざまな数列 1/2

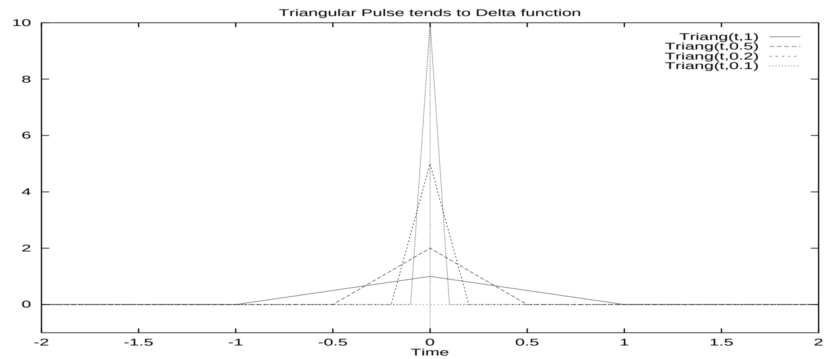
- **いろいろな数列の極限がデルタ関数。→ いろいろ応用できる。面積1のまま、幅を0に。**
- **Gaussian パルスの極限**

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{\pi t^2}{\tau^2}}$$



- **三角パルスの極限**

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right), & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}$$



デルタ関数を含むフーリエ変換 (1/3)

- **デルタ関数のフーリエ変換**

$$\mathcal{F}[\ \delta(t)\ ] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t)dt = 1$$

- **定数 A (つまり直流) のフーリエ変換**
矩形パルス関数: $R_\tau(t) = 1 \quad (\tau < 1/2)$ **or** $0 \quad (\tau > 1/2)$ **を用いて、**

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\ A\ ] &= \lim_{\tau\to\infty} \mathcal{F}[\ A \cdot R_\tau(t)\ ] = \lim_{\tau\to\infty} A\tau \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ &= 2\pi A \lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau/2}{\pi} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 2\pi A\delta(\omega)\end{aligned}$$

- **signum 関数:** $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$ **のフーリエ変換**

$$\mathcal{F}[\ \mathrm{sgn}(t)\ ] = \frac{2}{j\omega}$$

(導出)　Heaviside の単位ステップ関数を用いて、

$$\mathrm{sgn}(t) = 2 \cdot u(t) - 1 = \lim_{a\to 0}\left[e^{-at}(1)(t) - e^{at}(1)(-t)\right]$$

と書けるから、

$$\mathcal{F}[\ \mathrm{sgn}(t)\ ] = \lim_{a\to 0}\left[\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt - \int_{-\infty}^{0} e^{-at}e^{-j\omega t}dt\right] = \lim_{a\to 0}\left[\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}\right] = \frac{2}{j\omega}$$

デルタ関数を含むフーリエ変換 (2/3)

■ **Heaviside 関数(単位ステップ関数) $u(t)$ のフーリエ変換**

$$u(t) = \frac{1}{2}\{1 + \mathrm{sgn}(t)\} = \frac{1}{2}\{\mathcal{F}[\ 1\ ] + \mathcal{F}[\ \mathrm{sgn}(t)\ ]\}$$

により、

$$\mathcal{F}[\ u(1)\ ] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$\cos(\Omega t), \sin(\Omega t)$ **のフーリエ変換**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\ \cos(\Omega t)\ ] &= \pi[\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] \\ \mathcal{F}[\ \sin(\Omega t)\ ] &= -j\pi[\delta(\omega - \Omega) - \delta(\omega + \Omega)] \end{aligned}$$

(導出)

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}[\ \cos(\Omega t)\ ] = \lim_{\tau\to\infty}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\frac{e^{-j(\omega-\Omega)t} + e^{-j(\omega+\Omega)t}}{2}dt \\ &= \lim_{\tau\to\infty}\left[\frac{e^{-j(\omega-\Omega)t}}{-2j(\omega-\Omega)} + \frac{e^{-j(\omega+\Omega)t}}{-2j(\omega+\Omega)}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \lim_{\tau\to\infty}\left\{\frac{\sin(\omega-\Omega)\tau/2}{(\omega-\Omega)} + \frac{\sin(\omega+\Omega)\tau/2}{(\omega+\Omega)}\right\} \\ &= \lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2}\left\{\frac{\sin(\omega-\Omega)\tau/2}{(\omega-\Omega)\tau/2} + \frac{\sin(\omega+\Omega)\tau/2}{(\omega+\Omega)\tau/2}\right\} = \lim_{\tau\to\infty}\left\{\frac{\tau}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega-\Omega)\tau}{2}\right) + \frac{\tau}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega+\Omega)\tau}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

デルタ関数を含むフーリエ変換 (3/3)

- **$e^{j\Omega t} \quad (-\infty < t < \infty)$ のフーリエ変換**

$$\mathcal{F}\left[\ e^{j\Omega t}\ \right] = 2\pi\delta(\omega - \Omega)$$

(導出)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F}[\ \cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t)\ ] \\ &= \pi\left[\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)\right] \end{aligned}$$

- **周期関数 $f(t)$ のフーリエ変換**
  周期関数はフーリエ級数 (係数を F_k とする) で表現できるから、

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\Omega t}$$

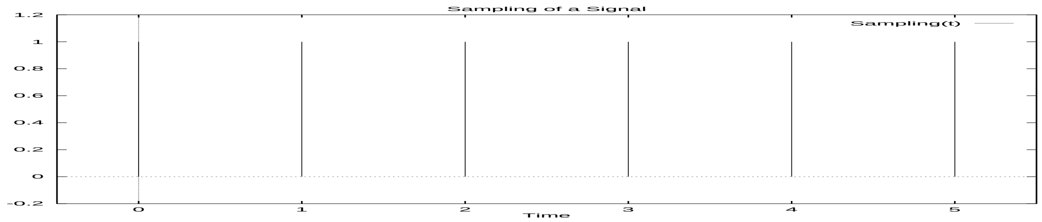
と書くと、

$$\mathcal{F}[\ f(t)\ ] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \mathcal{F}\left[\ e^{jk\Omega t}\ \right] = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \delta(\omega - k\Omega)$$

インパルス列のフーリエ変換

■ **単位インパルス関数(デルタ関数) $\delta(t)$ を周期 T で並べた関数:**

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

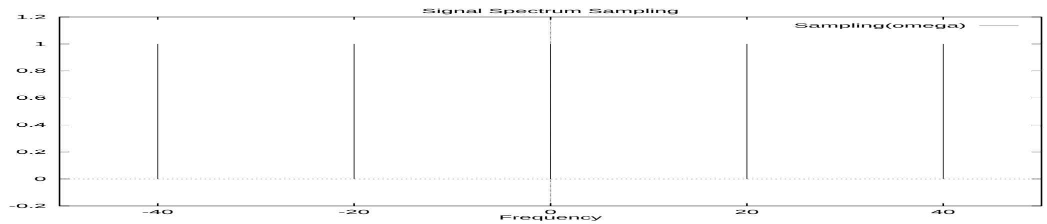


ここで $\Omega = 2\pi/T$ とすると、フーリエ級数は、

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega t}, \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jk\Omega t} dt = \frac{1}{T}$$

だから、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\ \delta_T(t)\ ] &= \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\Omega t} \right\} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(\omega - k\Omega)t} dt \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\ \mathbf{1}\ ](\omega - k\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\Omega) \\
&= \Omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Omega) \\
&= \Omega\delta_\Omega(\omega)
\end{aligned}$$



◆ **インパルス列のフーリエ変換はインパルス列**

重要なフーリエ変換 (定常信号、時間対称信号)

t(時間) 領域表現	ω(周波数) 領域表現	意味
$\delta(t)$	1	**Diracのデルタ関数**
1	$2\pi\delta(\omega)$	**直流**
$\|t\|$	$\dfrac{-2}{\omega^2}$	
$\cos \Omega t$	$\pi[\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega)]$	**余弦波**
$\sin \Omega t$	$-j\pi[\delta(\omega-\Omega)-\delta(\omega+\Omega)]$	**正弦波**
$\dfrac{W}{2\pi}\mathrm{sinc}\dfrac{W}{2}t$	$\begin{cases} 1, & \|\omega\| < W/2 \\ 0, & \|\omega\| > W/2 \end{cases}$	**sinc関数**

重要なフーリエ変換 ($t > 0$のみの信号)

t(時間) 領域表現	ω(周波数) 領域表現	意味
$\begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < \tau/2 \\ 0, & \lvert t\rvert > \tau/2 \end{cases}$	$\tau \mathrm{sinc} \frac{\tau}{2}\omega$	**矩形パルス**
$\begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{\tau}, & \lvert t\rvert < \tau \\ 0, & \lvert t\rvert > \tau \end{cases}$	$\tau \mathrm{sinc}^2 \frac{\tau}{2}\omega$	**三角パルス** **(= 矩形パルス同士の畳み込み)**
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	**両側指数減衰**
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$	**ガウス関数**
$\delta_T(t)$	$\Omega\delta_\Omega(\omega) \qquad (\Omega = \frac{2\pi}{T})$	**周期的インパルス列**

重要なフーリエ変換 ($t > 0$のみの信号)

t(時間) 領域表現	ω(周波数) 領域表現	意味
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	Heaviside の単位ステップ関数
$u(t) \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{a + j\omega}$	一次系のインパルス応答
$u(t) \cdot te^{-at}$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	臨界制動二次系のインパルス応答 (= 同一の一次系インパルス応答同士の畳み込み)
$u(t) \cdot \cos \Omega t$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] + \frac{j\omega}{\Omega^2 - \omega^2}$	余弦波右半分 (= $u(t)$ と余弦波の積 = ω 領域では畳み込み)
$u(t) \cdot \sin \Omega t$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \Omega) - \delta(\omega + \Omega)] + \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}$	正弦波右半分 (= $u(t)$ と正弦波の積 = ω 領域では畳み込み)
$u(t) \cdot e^{-at} \sin \Omega t$	$\frac{\Omega}{(a + j\omega)^2 + \Omega^2}$	減衰正弦波 (= 一次系インパルス応答と正弦波の積 = ω 領域では畳み込み)

フーリエ変換における Parseval の定理

Parseval の定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

t 領域の総エネルギー　　ω 領域の総エネルギー

導出

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \left. \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) e^{-j\omega t} dt \right|_{\omega=0} \\
&= \mathcal{F}[\ f(t) f^*(t)\ ]|_{\omega=0} \\
&= \left. \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F^*(\omega) \right|_{\omega=0} \quad \text{(周波数畳み込み)} \\
&= \left. \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} F(\sigma) F(\omega - \sigma) d\sigma \right|_{\omega=0} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} F(\sigma) F(-\sigma) d\sigma \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} F(\sigma) F^*(\sigma) d\sigma = \text{右辺} \qquad \text{QED}
\end{aligned}
$$

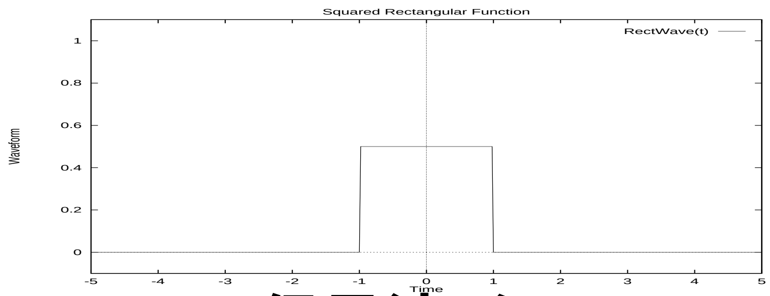
フーリエ変換における Parseval の定理の意味

- **信号間の距離: t 領域でも ω 領域でも同じ**

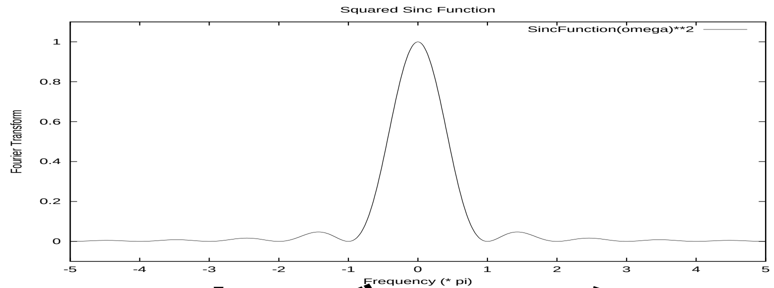
$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt}_{t\text{領域の二乗距離}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega) - G(\omega)|^2 d\omega}_{\omega\text{領域の二乗距離}}$$

- **エネルギースペクトル: $|F(\omega)|^2$ (時間当たりならばパワースペクトル)**

$f(t)$ **のエネルギーは** $\omega \sim \omega + d\omega$ **の間に、** $\frac{|F(\omega)|^2 d\omega}{2\pi}$ **の割合で分布**



信号波形



エネルギースペクトル

自己相関関数と相互相関関数

- 相互相関関数(cross-correlation function) $\phi_{xy}(\tau)$

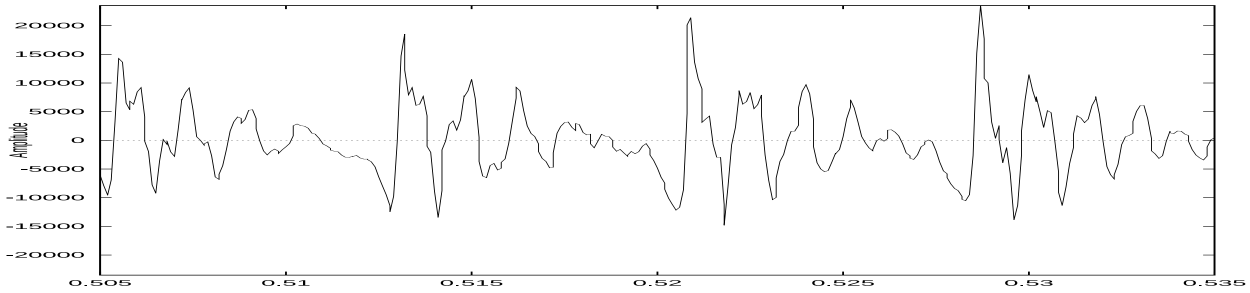
$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)dt$$

  - 信号$y(t)$をτだけずらして、信号$x(t)$との内積を取ったもの。
  - $x(t)$と$y(t)$の内積(=類似度)をτの関数として定義
  - すべてのτについて$\phi(\tau)=0$ならば、$x(t)$と$y(t)$は無相関
  - 畳み込みとしての解釈: $\phi_{xy}(\tau) = [x(t) * y(-t)](\tau)$
  - 相互相関関数の性質: $\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau)$
- 自己相関関数 (austocorrelation function) $\phi_{xx}(\tau)$
  - $x(t) = y(t)$の場合の相互相関関数
  - τの偶関数: $\phi_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(-\tau)$
  - 例: 白色雑音の自己相関関数は$\delta(\tau)$
- 畳み込み: $y(t) = x(t) * h(t)$ならば、

$$\phi_{xx}(\tau) * h(\tau) = \phi_{xy}(\tau), \qquad \phi_{xy}(\tau) * h(\tau) = \phi_{yy}(\tau)$$

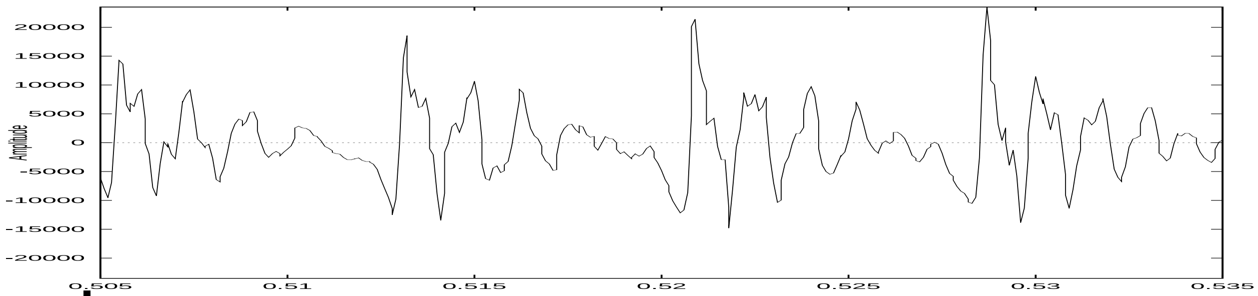
自己相関関数の例

- **音声信号 $f(t)$ /koshiraeru/ 中の母音 /a/ (0.52sec 付近) 短時間自己相関関数**



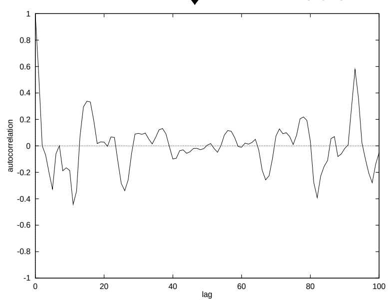
信号 $x(t)$

$\times$



$x(t-\tau)$

↓ $\int \cdot dt$



自己相関関数 $\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$

Wiener-Khintchine の定理

- **Wiener-Khintchine (ウィーナー・ヒンチン)の定理:
自己相関関数とパワースペクトルはフーリエ変換対をなす。**

パワースペクトル　自己相関関数

$$\Phi_{xx}(\omega) = \mathcal{F}[\ \phi_{xx}(\tau)\ ]$$

(導出)　エネルギースペクトルの場合

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\ |F(\omega)|^2\ ] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{F^*(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right\}e^{j\omega t}d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(\tau)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(-\omega)e^{-j\omega(\tau-t)}d\omega\right\}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(\tau)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega')e^{j\omega'(\tau-t)}d\omega'\right\}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)f(\tau-t)d\tau\end{aligned}$$

一般の不規則信号の場合は、数学的に高度。省略。

- **調和解析と一般調和解析の話**
  - **調和解析
周期信号・有限長信号のフーリエ解析、スペクトル解析**
  - **一般調和解析(N. Wiener)
定常不規則(ランダム)信号のスペクトル解析、予測理論**

クロススペクトル、短時間スペクトル

■ **パワースペクトル (power spectrum):**

$$\Phi_{xx}(\omega) = \mathcal{F}\left[\ \phi_{xx}(\tau)\ \right]$$

クロススペクトル (cross spectrum):

$$\Phi_{xy}(\omega) = \mathcal{F}\left[\ \phi_{xy}(\tau)\ \right]$$

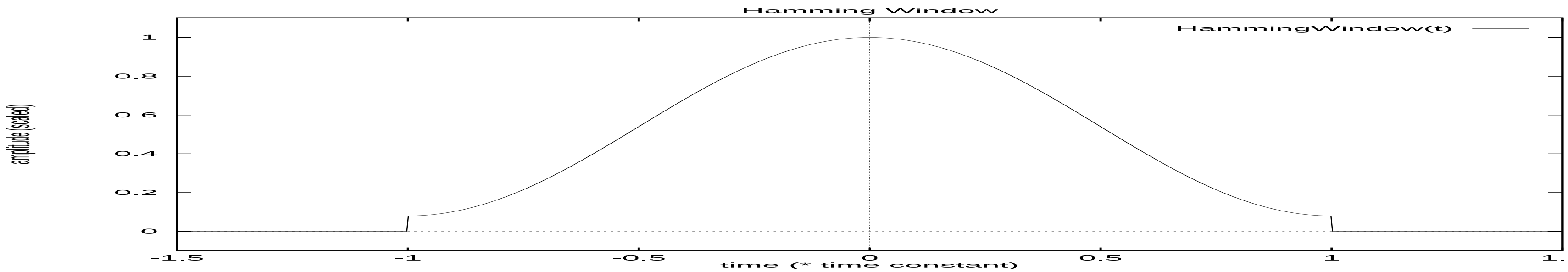
■ **短時間相関関数、短時間パワースペクトル**

$$\tilde{x}(t) = w(t)x(t), \quad \textbf{窓関数:}\ w(t) = \begin{cases} > 0, & |t - t_0| < T/2 \\ = 0, & \textbf{otherwise} \end{cases}$$

$$\tilde{\phi}_{xx}(\tau) = \phi_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tau) \quad \textbf{短時間相関関数}$$

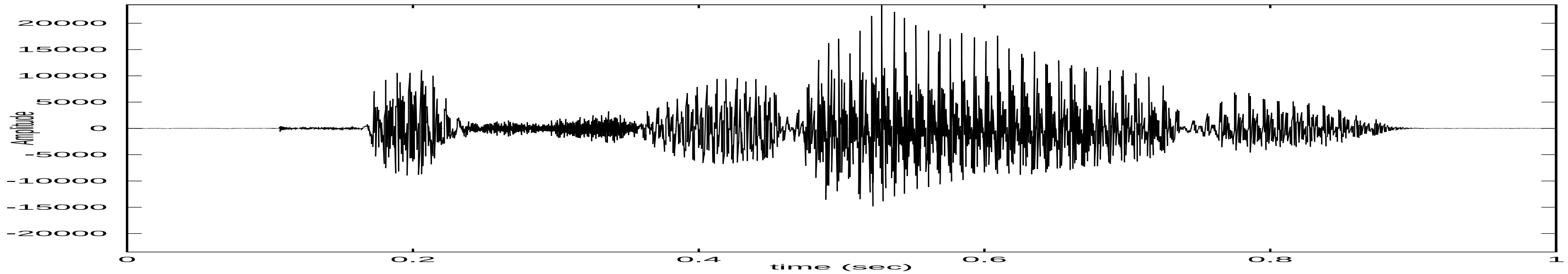
$$\tilde{\Phi}_{xx}(\omega) = \mathcal{F}\left[\ \tilde{\phi}_{xx}(\tau)\ \right] \quad \textbf{短時間パワースペクトル}$$

■ **窓関数の例: Hamming 窓**

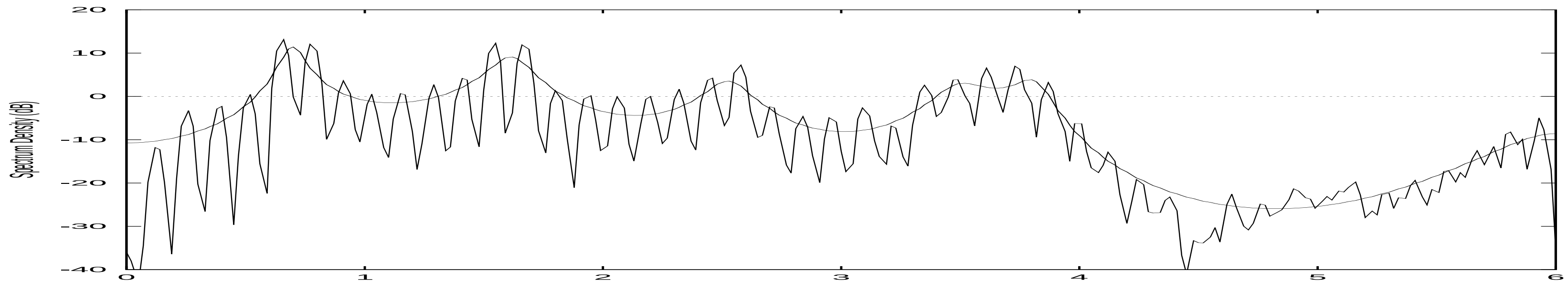


音声信号のスペクトルの例

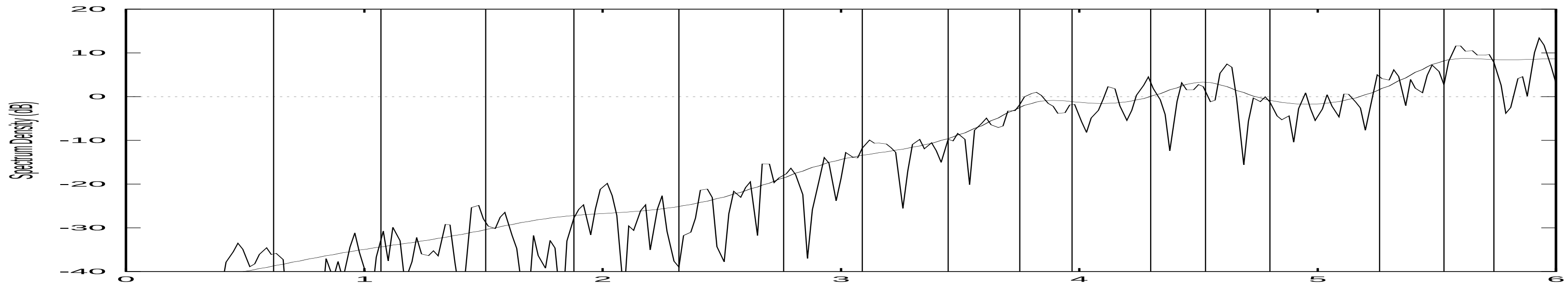
■ 音声信号 $x(t)$ /koshiraeru/ の波形



■ 母音/a/のスペクトル形状 (at 0.52sec)

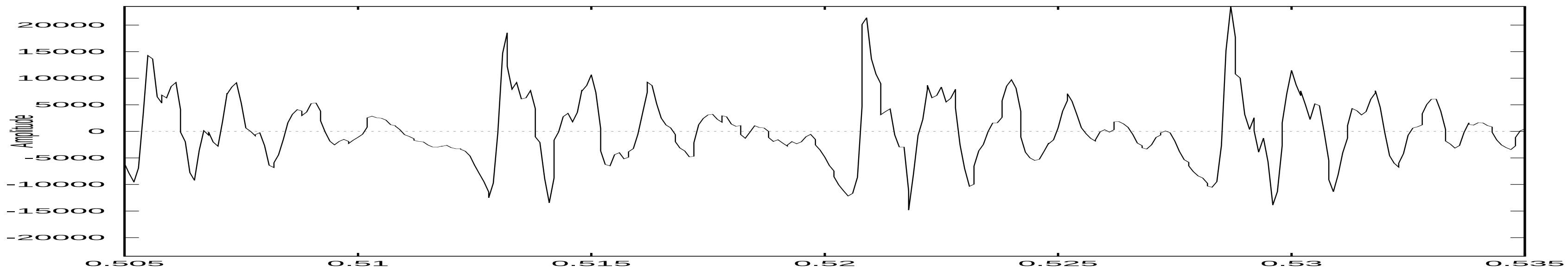


■ 子音/sh/のスペクトル形状 (at 0.30sec)

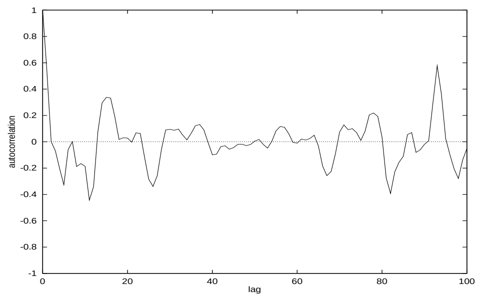


音声信号のスペクトルと自己相関関数の例

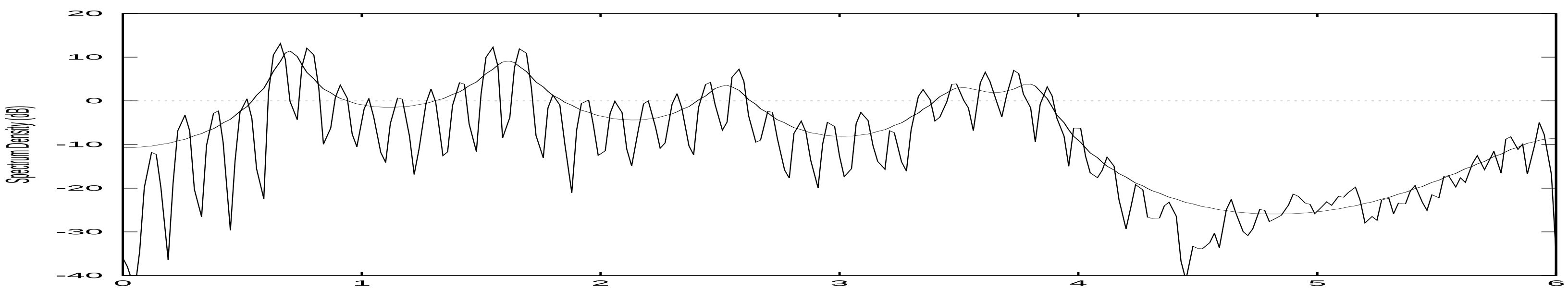
- 音声信号 $f(t)$ /koshiraeru/ 中の母音 /a/ (0.52sec 付近)



- 自己相関関数 (低次のみ表示)



スペクトル



四種のフーリエ変換対

	t(時間) 領域表現	ω(周波数) 領域表現
(type 1) 無限連続 $\leftrightarrow$ 無限連続	**無限長連続信号** $x(t), \quad -\infty < t < \infty$ $$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\ e^{j\omega t} dt$$	**無限帯域連続スペクトル** $X(\omega), \ -\infty < \omega < \infty$ $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-j\omega t} d\omega$$
(type 2) 有限連続 $\leftrightarrow$ 無限離散	**有限長連続信号** $x(t), \ -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\ e^{jk\frac{2\pi t}{T}}$$ **(周期的連続信号)**	**無限帯域離散スペクトル** $\{X_k\}, \ k = -\infty, \cdots, \infty$ $$X_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\ e^{-jk\frac{2\pi t}{T}} dt$$ **(整数倍周波数線スペクトル)**
(type 3) 無限離散 $\leftrightarrow$ 有限連続	**無限長離散信号** $\{x_t\}, \quad t = -\infty, \cdots, \infty$ $$x_t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\ e^{j\omega t} d\omega$$ **(時系列、サンプル値系列)**	**有限帯域連続スペクトル** $X(\omega), \ -\pi < \omega < \pi$ $$X(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t\ e^{-j\omega t}$$ **(帯域スペクトル)**
(type 4) 有限離散 $\leftrightarrow$ 有限離散	**有限長離散信号** $\{x_t\}, \quad t = 0, \cdots, N-1$ $$x_t = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k\ e^{j\frac{2\pi k}{N}t}$$ **(有限長時系列、周期時系列)**	**有限帯域離散スペクトル** $\{X_k\}, \ k = 0, \cdots, N-1$ $$X_k = \sum_{t=0}^{N-1} x_t\ e^{-j\frac{2\pi k}{N}t}$$ **(離散フーリエ変換)**

四種のフーリエ変換対

- 4種のタイプ
  - Type 1: フーリエ積分、
  - type 2: フーリエ級数、
  - type 3: 時系列のフーリエ変換、
  - type 4: 離散フーリエ変換
- 線形性: すべての場合に成立。
- 畳み込み定理 (時間、周波数): 場合により畳み込みの意味が異なる。
  - 無限畳み込み — 無限長の関数 (系列) は、定義通りの畳み込み。
  - 巡回畳み込み — 有限長の関数 (系列) は、周期関数 (系列) と考えて無限畳み込みする。
- Parseval の定理
- Wiener-Khintchine の定理: 場合により自己相関関数の意味が異なる。
- サンプリング定理 (連続系と離散系をつなぐ)

四種のフーリエ変換対間の関係 (1/2)

	t(時間) 領域表現	ω(周波数) 領域表現
(type 1) 無限連続 $\leftrightarrow$ 無限連続	**無限長連続信号** $x(t)=\xi(t),\ \ -\infty<t<\infty$ $$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\ e^{j\omega t}dt$$	**無限帯域連続スペクトル** $X(\omega)=\Xi(\omega),\ \ -\infty<\omega<\infty$ $$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\ e^{-j\omega t}d\omega$$
(type 2) 有限連続 $\leftrightarrow$ 無限離散	**周期的連続信号** $\begin{cases} x(t)=\xi(t), & \lvert t\rvert<T/2 \\ x(t\pm T)=x(t) \end{cases}$ $\Downarrow$ **有限長連続信号** $x(t),\ \ -\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}$ $$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k\ e^{jk\frac{2\pi t}{T}}$$	**無限帯域スペクトルを等間隔サンプリング** $X(\omega)=\Xi(\omega)\ \delta_{\Omega}(\omega)$ $\Downarrow$ **無限帯域離散スペクトル** $\{X_k\},\ \ k=-\infty,\cdots,\infty$ $$X_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\ e^{-jk\frac{2\pi t}{T}}dt$$

四種のフーリエ変換対間の関係 (2/2)

	t(時間) 領域表現	ω(周波数) 領域表現
(type 3) **無限離散** $\leftrightarrow$ **有限連続**	**無限長信号を等間隔サンプリング** $x(t) = \xi(t)\ \delta_T(t)$ $\Downarrow$ **無限長離散信号** $\{x_t\}, \quad t = -\infty, \cdots, \infty$ $$x_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\ e^{j\omega t} d\omega$$	**周期的スペクトル** $\begin{cases} X(\omega) = \Xi(\omega), \lvert\omega\rvert < \Omega/2 \\ X(\omega) = X(\omega \pm \Omega) \end{cases}$ $\Downarrow$ **有限帯域連続スペクトル** $X(\omega), \quad -\pi < \omega < \pi$ $$X(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t\ e^{-j\omega t}$$
(type 4) **有限離散** $\leftrightarrow$ **有限離散**	**周期的信号をサンプリング** $\begin{cases} \zeta(t) = \xi(t), \lvert t\rvert < NT/2 \\ \zeta(t) = \zeta(t \pm NT) \\ x(t) = \zeta(t)\delta_T(t) \end{cases}$ $\Downarrow$ **有限長離散信号** $\{x_t\}, \quad t = 0, \cdots, N-1$ $$x_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k\ e^{j\frac{2\pi k}{N}t}$$	**周期的スペクトルのサンプリング** $\begin{cases} Z(\omega) = \Xi(\omega), \lvert\omega\rvert < N\Omega/2 \\ Z(\omega) = Z(\omega \pm N\Omega) \\ X(\omega) = Z(\omega)\delta_\Omega(\omega) \end{cases}$ $\Downarrow$ **有限帯域離散スペクトル** $\{X_k\}, \quad k = 0, \cdots, N-1$ $$X_k = \sum_{t=0}^{N-1} x_t\ e^{-j\frac{2\pi k}{N}t}$$