統計数理

石川顕一

http://ishiken.free.fr/lecture.html

10/18　組み合わせと確率
10/25　確率変数と確率分布
11/1　代表的な確率分布
11/8（前半）　ランダムウォークと破産問題
11/8（後半）　ブラウン運動と拡散
11/22　ノイズの理論

確率過程
Stochastic process

11/15は演習のみ

参考書

[1] 理工系の数学入門コース7・薩摩順吉著
「確率・統計」岩波書店　2001年

[2] コルモゴロフ、ジュルベンコ、プロホロフ　共著
丸山　哲郎、馬場　良和　共訳
「コルモゴロフの確率論入門」森北出版 2003年

[3] 岩波基礎物理シリーズ8・北原和夫著
「非平衡系の統計力学」岩波書店　1997年

統計数理

石川顕一

11/22　ノイズの理論

- ウィーナー･ヒンチンの定理
- ナイキストの定理

6−1　ウィーナー・ヒンチンの定理

→ 参考書[3] p.103

- 電気回路における雑音(noise)
  - 揺動力(random force)を含むモデルで表される現象の例

↓

- 電気抵抗体の両端に発生する電圧 V(t)
  - 理想的には V(t)=0
  - 現実には、

内部にある伝導電子の熱雑音(thermal noise)

⇩

V(t)はゼロのまわりに揺らぐ(雑音)

雑音に、どのような周波数成分が含まれているかを考える。→　パワースペクトル

6−1　ウィーナー・ヒンチンの定理

- パワースペクトル
  - 雑音V(t)を長い時間Tにわたって観測。

振動数 f の最小単位 $\dfrac{1}{T}$ ⇨ $f_n = \dfrac{n}{T} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$V(t)$はこれらの振動数成分の和に分解できる。

$$V(t) = \sum_n e^{i2\pi f_n t} V_n \qquad V_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i2\pi f_n t} V(t)\,dt$$

フーリエ変換

- 一般に複素数　$V_{-n} = V_n^*$

$V(t)$ ランダム ⇨ V_n ランダム

$|V_n|^2$ の平均を考える。

振幅の絶対値の2乗→各振動成分の強度

6−1 ウィーナー・ヒンチンの定理

- パワースペクトル　　　→ 参考書[3] p.104

$|V_n|^2$ の平均を考える。

振幅の絶対値の2乗→各振動成分の強度

振動数の微少な幅 Δf の中に含まれる振幅の強度

雑音のサンプルについての平均

パワースペクトル(power spectrum)　$S_V(f)\Delta f = 2\sum_{f<f_n<f+\Delta f}\left\langle |V_n|^2 \right\rangle$

$f_n = \dfrac{n}{T}$ ⇒ Δf の幅に含まれる振動数の数は $\Delta f \div \left(\dfrac{1}{T}\right) = T\Delta f$

$$S_V(f)\Delta f = 2\sum_{f<f_n<f+\Delta f}\left\langle |V_n|^2 \right\rangle \Rightarrow S_V(f)\Delta f = 2T\left\langle \left|\hat{V}(f)\right|^2 \right\rangle \Delta f \Rightarrow S_V(f) = 2T\left\langle \left|\hat{V}(f)\right|^2 \right\rangle$$

$$\hat{V}(f) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i2\pi ft} V(t)\,dt$$

6−1　ウィーナー・ヒンチンの定理

- パワースペクトル

$$S_V(f) = 2T\left\langle \left|\hat{V}(f)\right|^2 \right\rangle \qquad \hat{V}(f) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i2\pi ft} V(t)\,dt$$

$$S_V(f) = \frac{2}{T}\int_0^T dt_1 \int_0^T e^{-i2\pi f(t_1-t_2)} \left\langle V(t_1)V^*(t_2) \right\rangle dt_2$$

雑音の時間相関関数

定常状態（平衡状態）

$$\left\langle V(t_1)V^*(t_2) \right\rangle = \phi_V(t_1 - t_2)$$

$$S_V(f) = \frac{2}{T}\int_0^T dt_1 \int_0^T e^{-i2\pi f(t_1-t_2)} \phi_V(t_1-t_2)\,dt_2$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} \left[e^{-i2\pi f(t_1-t_2)} \phi_V(t_1-t_2) + e^{-i2\pi f(t_2-t_1)} \phi_V(t_2-t_1) \right] dt_2$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} e^{-i2\pi f(t_1-t_2)} \phi_V(t_1-t_2)\,dt_2 + \text{c.c.}$$

$$= 2\int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-i2\pi ft} \phi_V(t)\,dt + \text{c.c.} = 4\int_0^T \left(1-\frac{t}{T}\right) \text{Re}\left[e^{-i2\pi ft} \phi_V(t) \right] dt$$

6−1 ウィーナー・ヒンチンの定理

- パワースペクトル

$$S_V(f) = 4\int_0^T \left(1-\frac{t}{T}\right)\mathrm{Re}\left[e^{-i2\pi ft}\phi_V(t)\right]dt \rightarrow 4\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[e^{-i2\pi ft}\phi_V(t)\right]dt$$

$\phi_V(t)$ が減衰関数

ウィーナー・ヒンチン(Wiener−Khintchine)の定理

- パワースペクトルは雑音の時間相関関数の積分(フーリエ変換)で表される

$$S_V(f) = 4\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[e^{-i2\pi ft}\phi_V(t)\right]dt$$

→ 参考書[3] p.105

- 白色雑音(white noise)

$\phi(t) = 2D_V\delta(t)$ 異なる時刻の雑音は全く相関がない

$S_V(f) = 4D_V$ 振動数に依存しない定数 ⇨ 白色雑音

6−2 ナイキストの定理

抵抗値Rの抵抗器の両端に現れる熱雑音のゆらぎのパワースペクトル強度が

$$S_V(f) = 4D_V \qquad \text{（白色雑音）}$$

の時、

$$D_V = Rk_BT$$

→ 参考書[3] p.106

RC回路

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{CR} + \frac{V(t)}{R}$$

オームの法則　　熱雑音による起電力

ブラウン運動

$$\frac{du}{dt} = -\gamma u + \frac{R(t)}{m}$$

$$Q \Leftrightarrow u$$

$$\frac{1}{CR} \Leftrightarrow \gamma$$

6−2　ナイキストの定理

- ナイキストの定理(Nyquist theorem)

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{CR} + \frac{V(t)}{R}$$

$$Q(t) = Q(0)\exp\left(-\frac{t}{CR}\right) + \int_0^t \frac{V(t')}{R}\exp\left(-\frac{t-t'}{CR}\right)dt'$$

$$\left\langle [Q(t)]^2 \right\rangle_{\mathrm{eq}} = \left\langle [Q(0)]^2 \right\rangle_{\mathrm{eq}} \exp\left(-\frac{2t}{CR}\right) + \left\langle \left[\int_0^t \frac{V(t')}{R}\exp\left(-\frac{t-t'}{CR}\right)dt' \right]^2 \right\rangle_{\mathrm{eq}}$$

$$+\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)\int_0^t \frac{\langle Q(0)V(t')\rangle_{\mathrm{eq}}}{R}\exp\left(-\frac{t-t'}{CR}\right)dt'$$

ゼロ

$$\left\langle \left[\int_0^t \frac{V(t')}{R}\exp\left(-\frac{t-t'}{CR}\right)dt' \right]^2 \right\rangle_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{R^2}\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \exp\left(-\frac{t-t_1}{CR}\right)\exp\left(-\frac{t-t_2}{CR}\right)\langle V(t_1)V(t_2)\rangle_{\mathrm{eq}}$$

$$= \frac{2D_V}{R^2}\int_0^t dt_1 \exp\left(-\frac{2(t-t_1)}{CR}\right) = \frac{CD_V}{R}\left[1-\exp\left(-\frac{2t}{CR}\right)\right]$$

$$\phi(t_1 - t_2) = 2D_V\delta(t_1 - t_2)$$

6–2 ナイキストの定理

- ナイキストの定理(Nyquist theorem)　→ 参考書[3] p.107

$$\left\langle [Q(t)]^2 \right\rangle_{\mathrm{eq}} = \left\langle [Q(0)]^2 \right\rangle_{\mathrm{eq}} \exp\left(-\frac{2t}{CR}\right) + \frac{CD_V}{R}\left[1-\exp\left(-\frac{2t}{CR}\right)\right]$$

平衡状態では等しい

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle [Q(t)]^2 \right\rangle_{\mathrm{eq}} = \frac{CD_V}{R}}$$

電荷によってコンデンサーに生じるエネルギー　$E = \dfrac{Q^2}{2C}$

⇒ このゆらぎの実現確率は、ボルツマン分布に従う。

$$P_{\mathrm{eq}}(Q) \propto \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{Q^2}{2k_B TC}\right) \Rightarrow \boxed{\left\langle Q^2 \right\rangle_{\mathrm{eq}} = Ck_B T}$$

$$\frac{CD_V}{R} = Ck_B T \Rightarrow D_V = Rk_B T \Rightarrow \boxed{S_V(f) = 4Rk_B T}$$

ナイキストの定理

熱雑音が巨視的な観測量で決まる。

6−2 ナイキストの定理

- 白色雑音(white noise)　　→ 参考書[3] p.107

$$\phi(t) = 2D_V\delta(t)$$ 異なる時刻の雑音は全く相関がない

$$S_V(f) = 4D_V$$ 振動数に依存しない定数

一種の理想化

- ローレンツ型雑音　　→ 参考書[3] p.107

$$\phi(t) = \langle V^2 \rangle e^{-t/\tau}$$ 揺らぎの時間相関関数に有限の時定数 τ

$$S_V(f) = \langle V^2 \rangle \frac{4\tau}{(2\pi f\tau)^2 + 1}$$ Lorentzian noise