—-量子力学第２　プリント

相対論的電子論

ディラック方程式

相対論の式

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

から

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ p_x \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

を要請する事により微分方程式を作り、それが時間に関して 1 階の微分方程式であるようにする。

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi\ ,\ H = c\vec{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2\ ;\ \vec{\alpha}\ ,\ \beta = \text{一般には行列}$$

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - c\vec{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} - \beta mc^2)\psi = 0$$

左から共役な演算子を作用させて

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + c\vec{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2)(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - c\vec{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} - \beta mc^2)\psi = 0$$

これと最初の式 $E^2 - p^2c^2 - m^2c^4 = 0$ を比べて、次の$\vec{\alpha}, \beta$の条件が求められる。

$$\begin{cases} \alpha_k\alpha_\ell + \alpha_\ell\alpha_k = 2\delta_{k\ell} \\ \alpha_k\beta + \beta\alpha_k = 0 \\ \beta^2 = 1 \end{cases}$$

これらを満たすのは、$\vec{\alpha}, \beta$が 4×4 の行列、 ψが４次元のベクトルである時。（以下で$\vec{\sigma}$は Pauli 行列）

$$\beta = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{1} \end{pmatrix}\ ,\ \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dirac\ equation\ :\ (i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - c\vec{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} - \beta mc^2)\psi = 0\ ,\ \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

確率：　$P = \psi^\dagger\psi = \sum_i |\psi_i|^2$

流れの密度：　$\boldsymbol{j} = \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi$

■自由電子

$\psi_j = u_j e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - iwt}$

$E_\pm = \pm\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$

$$E = E_+ > 0: \qquad u_+^{(1)} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp_z/(E_+ + mc^2) \\ c(p_x + ip_y)/(E_+ + mc^2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v/c \\ v/c \end{pmatrix}$$

$$u_+^{(2)} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c(p_x - ip_y)/(E_+ + mc^2) \\ -cp_z/(E_+ + mc^2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v/c \\ v/c \end{pmatrix}$$

$$E = E_- < 0: \qquad u_-^{(1)} \sim \begin{pmatrix} -cp_z/(-E_- + mc^2) \\ -c(p_x + ip_y)/(-E_- + mc^2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_-^{(2)} \sim \begin{pmatrix} -c(p_x - ip_y)/(-E_- + mc^2) \\ cp_z/(-E_- + mc^2) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■電磁場中の自由電子（パウリ近似）

$$\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi - c\vec{\alpha}\cdot(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}) - \beta mc^2\}\psi = 0$$

$E > 0$ として

$$\begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix} = \frac{c\vec{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})}{E + e\phi + mc^2}\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$E + e\phi + mc^2 \approx 2mc^2$, $\vec{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})\ \vec{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})^2 + e\hbar\vec{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}$ を用いて

$$\{\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})^2 + \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\boldsymbol{H} - e\phi\}\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix}$$

■中心力場

$H = c\vec{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2 + V(r)$

$E' = E - mc^2$

$$[\frac{1}{2m(1 + \frac{E' - V}{2mc^2})}\boldsymbol{p}^2 + V - \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{dV}{dr}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{\ell}\cdot\vec{s}]\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix} = E'\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix}$$

ベクトルの合成:合成角運動量

$$\mathbf{j} = \vec{\ell} + \mathbf{s}$$

$$|\ell s : jm_j >= \sum_{m_\ell m_s} |\ell m_\ell : sm_s > \langle \ell m_\ell : sm_s | jm_j \rangle$$

ヴィグナー係数, クレプシュ. ゴーダン係数

$$\begin{aligned}
\langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle &= \delta(M, M_1 + M_2)\sqrt{2J+1}\triangle(j_1 J_2 J) \\
&\times \sqrt{(J_1+M_1)!(J_1-M_1)!(J_2+M_2)!(J_2-M_2)!(J+M)(J-M)!} \\
&\times \sum_z (-1)^Z [Z!(J_1+J_2-J-Z)!(J_1-M_1-Z)!(J_2+M_2-Z)! \\
&\qquad \times (J-J_2+M_1+Z)!(J-J_1-M_2+Z)!]^{-1}
\end{aligned}$$

$$\triangle(J_1 J_2 J) = \sqrt{\frac{(J_1+J_2-J)!(J+J_1-J_2)!(J+J_2-J_1)!}{(J_1+J_2+J+1)!}}$$