第 V 部
光と物質の相互作用

11　電磁場の古典論

この節では光に関する量子現象を理解する事を目的として Maxwell 方程式に従う電磁場の古典論を議論する。

11.1　Maxwell の方程式

真空中に電荷 e_i の粒子が座標 $\vec{r}_i$ にある場合 $(i = 1, \cdots, N)$ の Maxwell から初めよう。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{t}} &= 0 \\
\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{j} \\
\mathrm{div}\,\vec{D} &= \rho \\
\mathrm{div}\,\vec{B} &= 0
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} \\
\vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B}
\end{aligned}
$$

と真空中の誘電率および透磁率を用いてかける。更に電荷密度および電流密度は粒子の座標を用いて

$$
\begin{aligned}
\rho(\vec{r}) &= \sum_{i=1}^{N} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \\
\vec{j}(\vec{r}) &= \sum_{i=1}^{N} e_i \dot{\vec{r}}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)
\end{aligned}
$$

となる。なお、これらは次の電荷の保存則をみたす。[207]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\vec{j}=0$$

この系のもう一つの基本方程式として $\vec{r}_i$ にある粒子に対して以下のローレンンツ力にしたがう運動方程式を仮定する。ただし m_i を粒子の質量とする。

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i=e_i\vec{E}(\vec{r}_i)+e_i\dot{\vec{r}}_i\times\vec{B}(\vec{r}_i)$$

ここで粒子の運動エネルギー T の時間変化を考えると[208]

$$\dot{T}=\int dV\vec{E}\cdot\vec{j}$$

---

[207]

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t}&=\sum_i e_i\frac{\partial}{\partial t}\delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))\\&=\sum_i e_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{\nabla}_{r_i}\delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))\\&=\sum_i e_i\dot{\vec{r}}_i\cdot(-1)\vec{\nabla}_r\delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))\end{aligned}$$

また

$$\mathrm{div}\,\vec{j}=\sum_i e_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{\nabla}_r\delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))$$

[208]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sum_i\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2&=\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i=\sum_i e_i\dot{\vec{r}}_i\cdot(\vec{E}_i+\dot{\vec{r}}_i\times\vec{B}_i)\\&=\sum_i e_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{E}_i=\int dV\vec{E}\cdot\vec{j}\\&\quad E_i=E(\vec{r}_i),\quad B_i=B(\vec{r}_i)\end{aligned}$$

となる。ここで V は $\vec{r_i}$ を含む任意の領域である。一方 Maxwell の方程式から[209]

$$
\begin{aligned}
\vec{P} &= \vec{E}\times\vec{H} \\
E_{em} &= \int dV \mathcal{E}_{em} \\
\mathcal{E}_{em} &= \frac{1}{2}(\epsilon_0\vec{E}^2+\mu_0\vec{H}^2)
\end{aligned}
$$

として

$$
\frac{d}{dt}\big(T+E_{em}\big)+\int_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{P}=0
$$

これより、 P は電磁場の運動量、E_{em} は電磁場のエネルギーであることがわかる。(P はポインティングベクトルといわれる。)

---

[209]Maxwell の方程式より

$$
\begin{aligned}
\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E}+\mu_0\vec{H}\cdot\dot{\vec{H}} &= 0 \\
\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H}-\epsilon_0\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} &= \vec{E}\cdot\vec{j}
\end{aligned}
$$

差をとって

$$
-\mathrm{div}\,(\vec{E}\times\vec{H})-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\epsilon_0\vec{E}^2+\mu_0\vec{H}^2)=\vec{E}\cdot\vec{j}
$$

$$
\mathrm{div}\,\vec{P}+\frac{d\mathcal{H}_{em}}{dt}+\vec{E}\cdot\vec{j}=0
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\vec{A}\times\vec{B}) &= \partial_i\epsilon_{ijk}A_jB_k \\
&= \epsilon_{ijk}(\partial_iA_j)B_k+\epsilon_{ijk}A_j(\partial_i)B_k \\
&= \epsilon_{kij}(\partial_iA_j)B_k-\epsilon_{jik}A_j(\partial_i)B_k \\
&= \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}
\end{aligned}
$$

11.2　ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャル

まず $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ より[210] [211] [212]

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

---

[210] 任意のベクトル場 $\vec{X}$ は

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \vec{X}_T + \vec{X}_L \\ \mathrm{div}\,\vec{X}_T &= 0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{X}_L &= 0 \end{aligned}$$

とかける。ここで $\vec{X}_L$、 $\vec{X}_T$ はそれぞれ縦成分 (longitude)、横成分 (transverse) という。空間の全領域でこのベクトル場が定義できるとき、

$$\begin{aligned} \vec{X}_T &= \mathrm{rot}\,\vec{A} \\ \vec{X}_L &= \mathrm{grad}\,\phi \end{aligned}$$

とポテンシャルで表現できる。

[211] これらは任意のベクトル場を

$$\vec{X}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} X_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

とフーリエ展開したとき、

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,X &= \sum_{\vec{k}} i\vec{k}\cdot\vec{X}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \mathrm{rot}\,X &= \sum_{\vec{k}} i\vec{k}\times\vec{X}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{aligned}$$

となることより、

$$\vec{e}_{\vec{k}\sigma=0} = \frac{\vec{k}}{k},\quad \vec{e}_{\vec{k}\sigma=1},\quad \vec{e}_{\vec{k}\sigma=2}$$

を右手系の規格直交系として

$$\begin{aligned} \vec{X}_L &= \sum_{\vec{k}} (\vec{X}_{\vec{k}}\cdot\vec{e}_{\vec{k},0})\vec{e}_{\vec{k},0} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{\vec{k}} \frac{(\vec{X}_{\vec{k}}\cdot\vec{k})\vec{k}}{k^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ (\vec{X}_L)_\alpha &= \sum_{\vec{k}} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} X_\beta e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \vec{X}_T &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=1,2} (\vec{X}_{\vec{k}}\cdot\vec{e}_{\vec{k}\sigma})\vec{e}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{\vec{k}} \left(\vec{X}_{\vec{k}} - \frac{(\vec{X}_{\vec{k}}\cdot\vec{k})\vec{k}}{k^2}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ (\vec{X}_T)_\alpha &= \sum_{\vec{k}} (\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}) X_\beta e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{\vec{k}} (\sum_{\sigma=1,2} (\vec{e}_{\vec{k}\sigma})_\alpha (\vec{e}_{\vec{k}\sigma})_\beta) X_\beta e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{aligned}$$

なお完全系の条件より

$$\sum_{\sigma} (\vec{e}_{\vec{k}\sigma})_\alpha (\vec{e}_{\vec{k}\sigma})_\beta = \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + \sum_{\sigma=1,2} (\vec{e}_{\vec{k}\sigma})_\alpha (\vec{e}_{\vec{k}\sigma})_\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

よって

$$\sum_{\sigma=1,2} (\vec{e}_{\vec{k}\sigma})_\alpha (\vec{e}_{\vec{k}\sigma})_\beta = \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}$$

よって

$$\mathrm{rot}\left(\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

となる。これは次の議論からしたがう。任意のベクトル $\vec{v}$ に関して

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (\vec{v}\cdot\vec{e}_\sigma)\vec{e}_\sigma\\ v_\alpha &= v_\beta(\vec{e}_\sigma)_\beta(\vec{e}_\sigma)_\alpha\end{aligned}$$

より

$$(\vec{e}_\sigma)_\beta(\vec{e}_\sigma)_\alpha=\delta_{\alpha\beta}$$

関数展開における類似の公式は

$$\sum_j \psi_j^*(x)\psi_j(x')=\delta(x-x')$$

[212]微分形式とベクトル解析の公式の関係をまとめてみよう。

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= f\\ d\Omega_0 &= \partial_i f\ dx_i \quad :\mathrm{grad}\, f\\ d^2\Omega_0 &= \partial_j\partial_i f\ dx_j\wedge dx_i=0 \quad :\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f=0\\ \Omega_1 &= A_i dx_i \quad :\vec{A}\\ d\Omega_1 &= \partial_j A_i\ dx_j\wedge dx_i \quad :\mathrm{rot}\,\vec{A}\\ d^2\Omega_1 &= \partial_k\partial_j A_i\ dx_k\wedge dx_j\wedge dx_i=0 \quad :\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}=0\\ \Omega_2 &= A_i * dx_i=\epsilon_{ijk}A_i dx_j\wedge dx_k \quad :\vec{A}\\ d\Omega_2 &= \partial_\ell A_i dx_\ell * dx_i=\partial_i A_i\ dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 \quad :\mathrm{div}\,\vec{A}\\ d^2\Omega_2 &= 0\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}*1 &= dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\\ *dx_1 &= dx_2\wedge dx_3,\ *dx_2=dx_3\wedge dx_1,\ *dx_3=dx_1\wedge dx_2,\\ *(dx_1\wedge dx_2) &= dx_3,\ \ *(dx_2\wedge dx_3)=dx_1,\ \ *(dx_3\wedge dx_1)=dx_2,\\ *(dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3) &= 1\end{aligned}$$

として

$$\begin{aligned}A &= A_i dx_i\\ *dA &= \mathrm{rot}\, A=(\mathrm{rot}\, A)_i dx_i\\ *d*A &= \mathrm{div}\, A\\ d\phi &= \mathrm{grad}\,\phi=\nabla\phi\\ *d*d\phi &= \Delta\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} &= *d*(*dA)=d(dA)=0\\ \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f &= *d(df)=0\end{aligned}$$

これから

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$$

とベクトルポテンシャル $\vec{A}$、スカラーポテンシャル ϕ を用いて、物理量は書きなおせる。

ここで $\chi(\vec{r}, t)$ を任意の時空間の関数としてつぎのゲージ変換

$$\begin{aligned} \vec{A} &\to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ \phi &\to \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned}$$

をおこなっても対応する物理量 $\vec{E}, \vec{B}$ は不変であることに注意する。

$$\vec{E}' = \vec{E}, \quad \vec{B}' = \vec{B}$$

つまり、ポテンシャルによる記述には自由度が残っていることに注意しよう。以下 Maxwell の方程式をこのポテンシャルで書き直そう。

まず $\mathrm{rot}\,\vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j}$ より[213]

$$\begin{aligned} -\Box\vec{A} &\equiv \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} = -\vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}) + \mu_0\vec{j} \\ c^2 &= \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \end{aligned}$$

また $\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$ より

$$-\Delta\phi = \mathrm{div}\,\dot{\vec{A}} + \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

ここで特定のクーロンゲージ

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$$

をとると Maxwell 方程式は次の 2 つの関係式となる。

$$\begin{aligned} -\Box\vec{A} &= \;= \mu_0\vec{J} \\ -\Delta\phi &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho \end{aligned}$$

積分公式については

$$\begin{aligned} \int_V d\Omega_2 &= \int_{\partial V}\Omega_2 &:& \int_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,dV = \int_{\partial V}\vec{A}\cdot d\vec{S} \\ \int_S d\Omega_1 &= \int_{\partial S}\Omega_1 &:& \int_S \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{\partial S}\vec{A}\cdot d\vec{r} \\ \int_L d\Omega_0 &= \int_{\partial L}\Omega_0 &:& \int_L \mathrm{grad}\,f\cdot d\vec{r} = f(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_{ini}}^{\vec{r}=\vec{r}_{fin}} \end{aligned}$$

[213] $\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} - \epsilon_0(-\ddot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\dot{\phi}) = \vec{j}$ よって $\vec{\nabla}\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2}\left(\ddot{\vec{A}} + \nabla\dot{\phi}\right) = \mu_0\vec{j}$

ここで

$$\vec{J} = \vec{j} - \epsilon_0 \vec{\nabla}\dot{\phi}$$

このスカラーポテンシャルに関する方程式はすぐ積分できて[214]

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{e_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

よって

$$\vec{J} = \sum_i \left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\frac{e_i}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_i|} + e_i\,\dot{\vec{r}}_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\right)$$

なお[215]

$$\mathrm{div}\,\vec{J} = 0$$

ここで系が一辺体積 の なかにあるとして周期的境界条件のもとで A をフーリエ変換しよう。[216]

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \vec{k} &= \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z), \quad n_i = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ より $\vec{k}\cdot\vec{A}_{\vec{k}} = 0$ よってベクトルポテンシャルを次の形に書こう。[217]

$$\hat{k}\cdot\vec{e}_{k\sigma=1} = 0, \hat{k}\cdot\vec{e}_{k\sigma=2} = 0, \quad \vec{e}_{k1}\cdot\vec{e}_{k2} = 0$$

として、

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}}\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma=1,2}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}q_{\vec{k}\sigma}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

214

$$-\Delta f(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$$

の解は

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r}$$

215

$$\mathrm{div}\,\vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\epsilon_0\Delta\phi + \mathrm{div}\,\vec{j} = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$$

216

$$A_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\int dV \vec{A}(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

217

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\sum_{\sigma=1,2}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}q_{\vec{k}\sigma}(t)$$

また A が実であることより、$\vec{e}_{-\vec{k}\sigma}=\vec{e}_{\vec{k}\sigma}$ ととると、$\vec{A}_{-\vec{k}}=\vec{A}^*_{\vec{k}}$ よって

$$q^*_{\vec{k}\sigma}(t) \;=\; q_{-\vec{k}\sigma}(t)$$

と書ける。同様に

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\phi_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\vec{j}_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

と書き $\Box\vec{A}=\mu_0\vec{J}$ について議論しよう。まず縦成分 ($\vec{k}$ 方向の成分) に関しては $\mathrm{div}\,\vec{A}=0$ より

$$\epsilon_0 ik^2\dot{\phi}_{\vec{k}} \;-\; \vec{k}\cdot\vec{j}_{\vec{k}}=0$$

しかし一方ポアソン方程式を時間微分し連続の方程式をつかって

$$\epsilon_0\Delta\dot{\phi}=-\dot{\rho}=\nabla_r\cdot\vec{j}$$

これからフーリエ成分については $-k^2\dot{\phi}_k=i\vec{k}\cdot\vec{j}_{\vec{k}}$ よって縦成分の関係式は自動的に満たされている。次に横成分に関しては[218]

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{\vec{k}\sigma}+\omega^2_{\vec{k}}q_{\vec{k}\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}\cdot\int dV\vec{j}(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}}\sum_i e_i\,(\vec{e}_{\vec{k}\sigma}\cdot\dot{\vec{r}}_i)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}\qquad(\omega=ck)\end{aligned}$$

これが ベクトルポテンシャルの満たすべき方程式で Maxwell の方程式と同値な方程式である。これは偏光 $\vec{e}_{\vec{k}\sigma}$ ごとの強制振動の方程式である。

[218]

$$\begin{aligned}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}\cdot\Big(-\Box\vec{A}(\vec{r})\Big) &= \vec{e}_{\vec{k}\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}}\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma=1,2}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}\big(\frac{1}{c^2}\ddot{q}_{\vec{k}\sigma}+k^2q_{\vec{k}\sigma}\big)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}}\sum_{\vec{k}}\big(\frac{1}{c^2}\ddot{q}_{\vec{k}\sigma}+k^2q_{\vec{k}\sigma}\big)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\\ \vec{e}_{\vec{k}\sigma}\cdot\mu_0\vec{J}(\vec{r}) &= \vec{e}_{\vec{k}\sigma}\cdot\vec{j}(\vec{r})=\mu_0\frac{1}{\sqrt{V}}\,\vec{e}_{\vec{k}\sigma}\cdot\sum_{\vec{k}}\vec{j}_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{c^2}\ddot{q}_{\vec{k}\sigma}+k^2q_{\vec{k}\sigma} \;=\; \mu_0\sqrt{\epsilon_0}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}\vec{j}_{\vec{k}}=\frac{\mu_0\sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{V}}\int dV\vec{e}_{\vec{k}\sigma}\vec{j}(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

11.3　古典場の方程式

まず電磁場のエネルギーを考え 2 つの部分に分けよう。[219] [220]

$$
\begin{aligned}
E_{em} &= \frac{1}{2}\int dV\left(\epsilon_0(\dot{\vec{A}}+\vec{\nabla}\phi)^2+\frac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\,\vec{A})^2\right)\\
&= E_{rad}+E_{coulomb}\\
E_{rad} &= \frac{1}{2}\int dV\left(\epsilon_0\dot{\vec{A}}^2+\frac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\,\vec{A})^2\right)\\
E_{coulomb} &= \epsilon_0\frac{1}{2}\int dV\left(2\dot{\vec{A}}\vec{\nabla}\phi+\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi\right)\\
&= -\epsilon_0\frac{1}{2}\int dV\left(2\phi\,\mathrm{div}\,\dot{\vec{A}}+\phi\Delta\phi\right)\\
&= \frac{1}{2}\int dV\ \rho\phi\\
&= \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{e_ie_j}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\\
&= \sum_{i<j}\frac{e_ie_j}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}+(\text{自己相互作用の発散項})
\end{aligned}
$$

ここで $E_{coulomb}$ はクーロン相互作用であり (自己相互作用の発散項はここでは考えないこととする) E_{rad} は輻射場のエネルギーである。

ここで

$$p_{\vec{k}\sigma}(t)=\dot{q}_{-\vec{k}\sigma}(t)$$

とすると

$$
\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}}\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma=1,2}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}q_{\vec{k}\sigma}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\\
\dot{\vec{A}}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}}\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma=1,2}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}p_{\vec{k}\sigma}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}
\end{aligned}
$$

---

[219]

$$\int dV\,\mathrm{div}\,(f\vec{\nabla}g)=\int dV\vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g+\int dV f\Delta g=\int_{\partial V}d\vec{S}\cdot f\vec{\nabla}g$$

より、境界項が周期的境界条件できえるため

$$\int dV\vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g=-\int dV f\Delta g=-\int dV(\Delta f)g$$

[220]

$$\int \mathrm{div}\,(\phi\dot{\vec{A}})=\int_{\partial V}d\vec{S}\cdot\phi\dot{\vec{A}}=0$$

から

$$\int dV\phi\mathrm{div}\,\dot{\vec{A}}=-\int dV\dot{\vec{A}}\cdot\vec{\nabla}\phi$$

これを E_{rad} に代入して[221]

$$E_{rad} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma=1,2}\left(p_{\vec{k}\sigma}p_{-\vec{k}\sigma} + c^2k^2 q_{\vec{k}\sigma}q_{-\vec{k}\sigma}\right)$$

よって運動エネルギー $T = \frac{1}{2}\sum_i \ddot{\vec{r}}^2$ を加えて古典的エネルギーとしては

$$H = T + E_{rad} + E_{coulomb}$$

となる。そこで正準変数としては 輻射場の $q_{\vec{k}\sigma}, p_{\vec{k}\sigma}$, 粒子系の $\vec{r}_i$, その共役運動量として

$$\vec{P}_i = m_i\dot{\vec{r}}_i + e_i\vec{A}(\vec{r}_i) = m_i\dot{\vec{r}}_i + e_i\vec{A}_i$$

をとりハミルトニアンとして以下のものをとると

$$\begin{aligned}
H &= H_{part} + H_{rad} + H_{coulomb} \\
H_{part} &= \sum_i \frac{1}{2m_i}(\vec{P}_i - e_i\vec{A}(\vec{r}_i))^2 \\
&= \sum_i \frac{1}{2m_i}\left(\vec{P}_i - e_i\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}}\sum_{\vec{k}\sigma}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}q_{\vec{k}\sigma}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}\right)^2 \\
H_{rad} &= +\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma=1,2}\left(p_{\vec{k}\sigma}p_{-\vec{k}\sigma} + c^2k^2q_{\vec{k}\sigma}q_{-\vec{k}\sigma}\right) \\
H_{coulomb} &= \sum_{i<j}\frac{e_ie_j}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}
\end{aligned}$$

以下の正準方程式から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q_{\vec{k}\sigma}} &= -\dot{p}_{\vec{k}\sigma} \\
\frac{\partial H}{\partial p_{\vec{k}\sigma}} &= \dot{q}_{\vec{k}\sigma} \\
\frac{\partial H}{\partial r^\alpha_{\vec{k}\sigma}} &= -\dot{P}^\alpha_{\vec{k}\sigma} \\
\frac{\partial H}{\partial P^\alpha_{\vec{k}\sigma}} &= \dot{r}^\alpha_{\vec{k}\sigma}
\end{aligned}$$

[221]磁場のエネルギーに関しては

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\vec{A}\times\mathrm{rot}\,\vec{A}) &= \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}, \quad (\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}) \\
&= \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,A + \vec{A}\cdot\Delta\vec{A}
\end{aligned}$$

より表面項が消えることおよび $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ を使って

$$\int dV\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A} = -\int dV\vec{A}\cdot\Delta\vec{A}$$

粒子の運動方程式[222]

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = e_i(\vec{E}(\vec{r}_i) + \dot{\vec{r}}_i \times B(\vec{r}_i))$$

と Maxwell の方程式

[222]粒子系に対しては

$$\begin{aligned}
\dot{r}_i^\alpha &= \frac{\partial H}{\partial P_i^\alpha} \\
&= \frac{1}{m_i}(P_i^\alpha - e_i A^\alpha(\vec{r}_i)) \\
-\dot{P}_i^\alpha &= \frac{\partial H}{\partial r_i^\alpha} \\
&= \frac{1}{m_i}(\vec{P}_i - e_i\vec{A}(\vec{r}_i)) \cdot (-e_i)\partial_\alpha \vec{A}(\vec{r}_i) + e_i\partial_\alpha\phi(\vec{r}_i) \\
&= -e_i\dot{r}_i^\beta \partial_\alpha A^\beta(\vec{r}_i) + e_i\partial_\alpha\phi(\vec{r}_i)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} H_{coulomb} &= \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{a<b}\frac{1}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} \\
&= \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j(\neq i)}\frac{1}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} \\
&= \partial_\alpha e_i\phi(\vec{r}_i) = \partial_\alpha e_i\phi_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}_i &= \vec{A}(\vec{r}_i) \\
\frac{d}{dt}\vec{A}_i &= \left.\frac{d\vec{A}(\vec{r})}{dt}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_i} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}_i}\vec{A}_i
\end{aligned}$$

に注意する。よって

$$\begin{aligned}
m_i\ddot{r}_i^\alpha &= \dot{P}_i^\alpha - e_i\dot{A}_i^\alpha(\vec{r}_i) - e_i\,\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{\nabla}_i A_i^\alpha(\vec{r}_i) \\
&= e_i\dot{r}_i^\beta\partial_\alpha A^\beta(\vec{r}_i) - e_i\partial_\alpha\phi(\vec{r}_i) \\
&\quad -e_i\dot{A}_i^\alpha(\vec{r}_i) - e_i\dot{r}_i^\beta\partial_\beta A_i^\alpha(\vec{r}_i) \\
&= e_i\big(-\partial_\alpha\phi(\vec{r}_i) - \dot{A}_i^\alpha(\vec{r}_i) + \dot{r}_i^\beta\partial_\alpha A^\beta(\vec{r}_i) - \dot{r}_i^\beta\partial_\beta A_i^\alpha(\vec{r}_i)\big)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
(\dot{\vec{r}} \times \mathrm{rot}\,\vec{A})_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\dot{r}^\beta\epsilon_{\gamma\eta\xi}\partial_\eta A^\xi \\
&= (\delta_{\alpha\eta}\delta_{\beta\xi} - \delta_{\alpha\xi}\delta_{\beta\eta})\dot{r}^\beta\partial_\eta A^x i \\
&= \dot{r}^\beta\partial_\alpha A^\beta - \dot{r}^\beta\partial_\beta A^\alpha
\end{aligned}$$

より

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = e_i(\vec{E}(\vec{r}_i) + \dot{\vec{r}}_i \times B(\vec{r}_i))$$

[223]

$$\ddot{q}_{-\vec{k}\sigma} + c^2k^2 q_{-\vec{k}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_i e_i(\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{e}_{\vec{k}\sigma}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}$$

がでる。

なおゲージ不変な粒子の速度は

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m_i}\big(P_i - e_i\vec{A}(\vec{r}_i)\big)$$

となることに注意しよう。

最後に場の量を正準変数で書いておこう。

$$\begin{aligned}
\vec{E} =& -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\phi \\
=& -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{\vec{k}\sigma} \vec{e}_{\vec{k}\sigma} p_{\vec{k}\sigma} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{\nabla}\phi \\
\vec{B} =& \mathrm{rot}\,\vec{A} \\
=& \frac{i}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{\vec{k}\sigma} \vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}\sigma} q_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} b
\end{aligned}$$

11.4　場の運動量

また電磁場の運動量 $\vec{G}_{em}$ はポインティングベクトルから次のように計算される。

[223] 輻射場については

$$\begin{aligned}
-\dot{p}_{\vec{k}\sigma} &= \frac{\partial H}{\partial q_{\vec{k}\sigma}} \\
&= c^2k^2 q_{-\vec{k}\sigma} + \sum_i \frac{1}{m_i}\left(\vec{P}_i - e_i \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{\vec{k}\sigma} \vec{e}_{\vec{k}\sigma} q_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}\right) \cdot \big(-e_i \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \vec{e}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}\big) \\
&= c^2k^2 q_{-\vec{k}\sigma} + \sum_i \frac{1}{m_i}(\vec{P}_i - e_i\vec{A}_i) \cdot \big(-e_i \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \vec{e}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}\big) \\
&= c^2k^2 q_{-\vec{k}\sigma} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_i e_i(\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{e}_{\vec{k}\sigma}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \\
\dot{q}_{\vec{k}\sigma} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\vec{k}\sigma}} = p_{-\vec{k}\sigma} \\
\ddot{q}_{-\vec{k}\sigma} &= \dot{p}_{-\vec{k}\sigma} \\
&= -c^2k^2 q_{-\vec{k}\sigma} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_i e_i(\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{e}_{\vec{k}\sigma}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{G} &= \frac{1}{c^2}\int dV\,\vec{P} = \frac{1}{c^2}\int dV\,\vec{E}\times\vec{H} \\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\big(\dot{\vec{A}}+\vec{\nabla}\phi\big)\times\mathrm{rot}\,\vec{A} \\
&= \vec{G}^0_{em}+\vec{G}'_{em} \\
\vec{G}^0_{em} &= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\,\dot{\vec{A}}\times\mathrm{rot}\,\vec{A} \\
\vec{G}'_{em} &= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\,\vec{\nabla}\phi\times\mathrm{rot}\,\vec{A}
\end{aligned}
$$

まず、純輻射場の運動量 $\vec{G}^0_{em}$ は正準変数で次のように書ける。[224]

$$
\vec{G}^0_{em} = -i\sum_{\vec{k}\sigma}\vec{k}\,p_{\vec{k}\sigma}q_{\vec{k}\sigma}
$$

さらに粒子の存在からくる項を次のように変形しよう (部分積分ならびに周期的境界条件から境界項がきえることとクローンゲージの条件に注意)

$$
\begin{aligned}
\vec{G}'_{em} &= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\,\vec{\nabla}\times(\phi\,\mathrm{rot}\,\vec{A})-\phi\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} \\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\,\phi\,\Delta\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\,(\Delta\phi)\,\vec{A} \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\int dV\,\rho\vec{A} = \sum_j e_j\vec{A}_j
\end{aligned}
$$

よって全運動量 $\vec{G}_T$ を粒子系の運動量と輻射場の運動量の和として

$$
\begin{aligned}
\vec{G}_T &= \sum_j m_j\dot{\vec{r}}_j+\vec{G}_{em} \\
&= \sum_j \vec{P}_j+\vec{G}^0_{em}
\end{aligned}
$$

224

$$
\begin{aligned}
\vec{G}^0_{em} &= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\,\dot{\vec{A}}\times\mathrm{rot}\,\vec{A} \\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}p_{\vec{k}\sigma}\times(i\vec{k}\times\sum_{\sigma'}\vec{e}_{\vec{k}\sigma'}q_{\vec{k}\sigma'}) \\
&= -i\sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma\sigma'}p_{\vec{k}\sigma}q_{\vec{k}\sigma'}\,\vec{e}_{\vec{k}\sigma}\times(\vec{k}\times\vec{e}_{\vec{k}\sigma'}) \\
&= -i\sum_{\vec{k}\sigma}\vec{k}\,p_{\vec{k}\sigma}q_{\vec{k}\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\vec{e}\times(\vec{k}\times\vec{e}) = \vec{k},\quad (|\vec{e}|=1)
$$

となる。

11.5　場の角運動量

次に電磁場の角運動量 $\vec{J}_{em}$ を計算しておこう。

$$
\begin{aligned}
\vec{J}_{em} &= \frac{1}{c^2}\int dV \vec{r}\times\vec{P} = \frac{1}{c^2}\int dV \vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{H}) \\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV \vec{r}\times\left(\dot{\vec{A}}+\vec{\nabla}\phi\right)\times \mathrm{rot}\,\vec{A} \\
&= \vec{J}^0_{em} + J'_{em} \\
\vec{J}^0_{em} &= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\, \vec{r}\times(\dot{\vec{A}}\times\mathrm{rot}\,\vec{A}) \\
\vec{J}'_{em} &= -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0}\int dV\, \vec{r}\times(\vec{\nabla}\phi\times\mathrm{rot}\,\vec{A})
\end{aligned}
$$

まず、純輻射場の角運動量 $\vec{J}^0_{em}$ を次のように 2 つの部分に分ける。[225]

$$
\begin{aligned}
\vec{J}_{em} &= \vec{J}^{\ell}_{em} + J^s_{em} \\
\vec{J}^{\ell}_{em} &= -\frac{1}{\mu_0 c^2}\int_V d^3r\, \dot{A}_j\vec{\ell}A_j \\
\vec{J}^{s}_{em} &= -\frac{1}{\mu_0 c^2}\int_V d^3r\, \dot{\vec{A}}\times\vec{A} \\
&= -\sum_{k,\sigma\sigma'}(\vec{e}_{k\sigma}\times\vec{e}_{k\sigma'})p_{k\sigma}q_{k\sigma'}
\end{aligned}
$$

225

$$
\begin{aligned}
(\dot{A}\times\mathrm{rot}\,\vec{A})_i =& \epsilon_{ijk}\dot{A}_j\epsilon_{klm}\partial_l A_m = (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\dot{A}_j\partial_l A_m \\
=& \dot{A}_j\partial_i A_j - \dot{A}_j\partial_j A_i = \dot{A}_j\partial_i A_j - \partial_j(\dot{A}_j A_i) + \frac{\partial}{\partial t}(\partial_j A_j)A_i \\
=& \dot{A}_j\partial_i A_j - \partial_j(\dot{A}_j A_i) \\
(\vec{r}\times(\dot{A}\times\mathrm{rot}\,\vec{A}))_a =& \epsilon_{abc}r_b\dot{A}_j\partial_c A_j - \epsilon_{abc}r_b\partial_j(\dot{A}_j A_i) \\
=& \epsilon_{abc}r_b\dot{A}_j\partial_c A_j - \partial_j(\epsilon_{abc}r_b\dot{A}_j A_i) + \epsilon_{abc}\partial_j(r_b)\partial_j(\dot{A}_j A_c) \\
=& \epsilon_{abc}r_b\dot{A}_j\partial_c A_j - \partial_j(\epsilon_{abc}r_b\dot{A}_j A_c) + \epsilon_{abc}\dot{A}_b A_c \\
=& \dot{A}_j(\vec{\ell}A_j)_a - \partial_j(\epsilon_{abc}r_b\dot{A}_j A_c) + \epsilon_{abc}\dot{A}_b A_c
\end{aligned}
$$

境界項を落として

$$
\int_V d^3r\,\vec{r}\times(\dot{A}\times\mathrm{rot}\,\vec{A}) = \int_V d^3r\,\dot{A}_j\vec{\ell}A_j + \int_V d^3r\,\dot{\vec{A}}\times\vec{A}
$$

さらに粒子の存在からくる項を数回部分積分して変形すると次のようになる。[226]

$$\vec{J}'_{em} = -\epsilon_0 \int dV \Delta\phi\, \vec{r} \times \vec{A} = \int dV\, \rho \vec{r} \times \vec{A} = \sum_j \vec{r}_j \times (e_j \vec{A}_j)$$

よって全角運動量 $\vec{J}_T$ を粒子系の角運動量と輻射場の角運動量の和として

$$\begin{aligned} \vec{J}_T &= \sum_j \vec{r}_j \times (m_j \dot{\vec{r}})_j + \vec{J}_{em} = \sum_j \vec{L}_j + \vec{J}^0_{em} \\ \vec{L}_j &= \vec{r}_j \times (m \dot{\vec{r}}_j + e_j A_j) = \vec{r}_j \times \vec{P}_j \end{aligned}$$

となる。

12　場の量としての電磁場と相互作用する粒子系

12.1　ラグランジアン密度と運動方程式

前節の議論から Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned} \Box \vec{A} &= \vec{\nabla}(\mathrm{div}\, \vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}) - \mu_0 \vec{j} \\ \frac{1}{c}\Delta\phi &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\, \vec{A} - \mu_0 c \rho \end{aligned}$$

226

$$\vec{\nabla}\phi \times \mathrm{rot}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\phi \mathrm{rot}\, \vec{A}) - \phi \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\phi \mathrm{rot}\, \vec{A}) + \phi \Delta \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\nabla}\phi \times \mathrm{rot}\, \vec{A}) &= \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times (\phi \mathrm{rot}\, \vec{A})) + \vec{r} \times \phi \Delta \vec{A} \\ [\vec{r} \times (\vec{\nabla} \times (\phi \mathrm{rot}\, \vec{A}))]_i &= \epsilon_{ijk} r_j \epsilon_{klm} \partial_l (\phi \mathrm{rot}\, \vec{A})_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) r_j \partial_l (\phi \mathrm{rot}\, \vec{A})_m \\ &= r_j \partial_i (\phi \mathrm{rot}\, \vec{A})_j - r_j \partial_j (\phi \mathrm{rot}\, \vec{A})_i \\ &= \partial_i (r_j \phi (\mathrm{rot}\, \vec{A})_j) - \phi (\mathrm{rot}\, \vec{A})_i - \partial_j (r_j \phi (\mathrm{rot}\, \vec{A})_i) + 3\phi (\mathrm{rot}\, \vec{A})_i \\ &= \partial_i (r_j \phi (\mathrm{rot}\, \vec{A})_j) - \partial_j (r_j \phi (\mathrm{rot}\, \vec{A})_i) + 2\phi (\mathrm{rot}\, \vec{A})_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\vec{r} \times \phi \Delta \vec{A}]_i &= \epsilon_{ijk} r_j \phi \partial_l \partial_l A_k \\ &= \partial_l (\epsilon_{ijk} r_j \phi \partial_l A_k) - \epsilon_{ijk} \phi \partial_j A_k - \epsilon_{ijk} r_j (\partial_l \phi) \partial_l A_k \\ &= \partial_l (\epsilon_{ijk} r_j \phi \partial_l A_k) - \epsilon_{ijk} \phi \partial_j A_k - \partial_l \big(\epsilon_{ijk} r_j (\partial_l \phi) A_k\big) + \epsilon_{ijk} (\partial_j \phi) A_k + \epsilon_{ijk} r_j (\partial_l \partial_l \phi) A_k \\ &= \partial_l (\epsilon_{ijk} r_j \phi \partial_l A_k) - \epsilon_{ijk} \phi \partial_j A_k - \partial_l \big(\epsilon_{ijk} r_j (\partial_l \phi) A_k\big) + \partial_j (\epsilon_{ijk} \phi A_k) - \epsilon_{ijk} \phi (\partial_j A_k) + \epsilon_{ijk} r_j (\partial_l \partial_l \phi) A_k \\ &= \partial_l (\epsilon_{ijk} r_j \phi \partial_l A_k) - \partial_l \big(\epsilon_{ijk} r_j (\partial_l \phi) A_k\big) + \partial_j (\epsilon_{ijk} \phi A_k) - 2\phi (\mathrm{rot}\, \vec{A})_i + (\Delta\phi)(\vec{r} \times \vec{A})_i \end{aligned}$$

$$\vec{J}'_{em} = -\epsilon_0 \int dV \Delta\phi\, \vec{r} \times \vec{A} = \int dV\, \rho \vec{r} \times \vec{A} = \sum_j \vec{r}_j (e_j \times A_j)$$

となる。[227] これらをまとめてローレンツ変換に対して共変な形で Maxwell 方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= \mu_0 j^\nu \\ \partial_\mu f^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu\end{aligned}$$

ここで前に述べたように

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{1}{c}\phi \\ A_1 &= -A^1 = -A_x \\ A_2 &= -A^2 = -A_y \\ A_3 &= -A^3 = -A_z \\ f^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ j^0 &= c\rho \\ j^i &= (\vec{j})_i\end{aligned}$$

である。

　これを最小作用の原理から導く作用は粒子系のものを含めて次のように与えられる。($\tau_{(i)}$ は i 番目の粒子の固有時間である。$d\tau_{(i)} = dt\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}$)

227

$$\begin{aligned}\Box\vec{A} &= \vec{\nabla}(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}) - \mu_0\vec{j} \\ \frac{1}{c}\Delta\phi &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} - \mu_0 c\rho\end{aligned}$$

まず

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \partial_\mu A^\mu$$

に注意して第 1 式は

$$-\partial_\mu\partial^\mu A^i = -\partial^i\partial_\mu A^\mu - \mu_0 j^i$$

第 2 式は次のように書きなおせるから

$$\begin{aligned}\Box\frac{1}{c}\phi + \frac{1}{c^3}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\partial_\mu A^\mu - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi\right) - \mu_0 c\rho \\ -\partial_\mu\partial^\mu A^0 &= -\partial^0\partial_\mu A^\mu - \mu_0 j^0\end{aligned}$$

これらをまとめて Maxwell 方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= \mu_0 j^\nu \\ \partial_\mu f^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_{em} &= S_0 + S_{rad} + S_{el} = \int d^4x \left(\mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_{rad}(x) + \mathcal{L}_{el}(x)\right) \\
&\quad (d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 = cdtd^3r) \\
\mathcal{L}_0(x) &= -\sum_i m_i c \int d\tau_{(i)} \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu_{(i)}}{d\tau_{(i)}}\frac{dx^\nu_{(i)}}{d\tau_{(i)}}}\delta^4(x - x_{(i)}) \\
S_0 &= -\sum_i m_i c \int d\tau_{(i)} \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu_{(i)}}{d\tau_{(i)}}\frac{dx^\nu_{(i)}}{d\tau_{(i)}}} = -\sum_i m_i c \int dt\, \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu_{(i)}\dot{x}^\nu_{(i)}} \\
\mathcal{L}_{rad}(x) &= -\frac{1}{4\mu_0 c} f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} \\
S_{rad} &= -\frac{1}{4\mu_0}\int dtd^3r\, f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} \\
\mathcal{L}_{el}(x) &= -j^\mu(x)A_\mu(x) \\
S_{el} &= \int d^4x\, \mathcal{L}_{el}(x) = -\sum_i \int dt\, e_i A_\mu(x_{(i)})\dot{x}^\mu_{(i)} = \sum_i \int dt\, e_i\big(-\phi(\vec{r}_i, t) + \dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{A}(\vec{r}_i, t)\big) \\
j^\mu(x) &= \sum_i ce_i \int d\tau_{(i)}\, \delta^4(x - x_{(i)})x'^\mu_{(i)} = (c\sum_i e_i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i), e_i\dot{\vec{r}}_i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i))
\end{aligned}
$$

輻射場の運動方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_{rad}}{\delta A_\mu(x)} &= \frac{1}{4\mu_0}\partial_\nu\frac{\partial}{\partial\partial_\nu A_\mu}(\partial_\kappa A_\rho - \partial_\rho A_\kappa)(\partial^\kappa A^\rho - \partial^\rho A^\kappa) \\
&= \frac{1}{\mu_0}\partial_\nu f^{\nu\mu} \\
\frac{\delta\mathcal{L}_{el}}{\delta A_\mu(x)} &= -j^\mu
\end{aligned}
$$

また粒子系についてはすでに議論した。

12.2 エネルギー運動量テンソルと保存則

次に Maxwell 方程式 (場の方程式) $\partial_\mu f^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ に $f_{\lambda\nu}$ をかけると少し計算して[228]

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu T^\mu{}_\lambda &= f_{\lambda\nu} j^\nu \\
T^\mu{}_\lambda &= \frac{1}{\mu_0}\left(f^{\kappa\mu} f_{\kappa\lambda} - \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\lambda f^{\kappa\nu} f_{\kappa\nu} \right)
\end{aligned}
$$

この $T^\mu{}_\lambda$ を電磁場のエネルギー運動量テンソルと呼ぶ。具体的には $T^{\mu\nu} = g^{\lambda\nu} T^\mu{}_\lambda$

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0}\left(g^{\lambda\nu} g_{\kappa\alpha} g_{\lambda\beta} f^{\kappa\mu} f^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g^{\lambda\nu}\delta^\mu{}_\lambda f^{\kappa\nu} f_{\kappa\nu} \right) \\
&= \frac{1}{\mu_0}\left(g_{\kappa\alpha} f^{\kappa\mu} f^{\alpha\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} f^{\kappa\nu} f_{\kappa\nu} \right)
\end{aligned}
$$

228

$$
\begin{aligned}
f_{\lambda\nu}\partial_\mu f^{\mu\nu} &= \partial_\mu (f_{\lambda\nu} f^{\mu\nu}) - f^{\mu\nu}\partial_\mu f_{\lambda\nu} \\
&= \partial_\mu (f_{\lambda\nu} f^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} f^{\mu\nu}(\partial_\mu f_{\lambda\nu} - \partial_\nu f_{\lambda\mu}), \quad f^{\mu\nu} = -f^{\nu\mu} \\
&= \partial_\mu (f_{\lambda\nu} f^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} f^{\mu\nu}(\partial_\mu f_{\lambda\nu} + \partial_\nu f_{\mu\lambda} + \partial_\lambda f_{\nu\mu}) + \frac{1}{2} f^{\mu\nu}\partial_\lambda f_{\nu\mu} \\
&= \partial_\mu (f_{\lambda\nu} f^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} f^{\mu\nu}\partial_\lambda f_{\nu\mu} \\
&= \partial_\mu (f_{\lambda\nu} f^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\partial_\lambda (f^{\mu\nu} f_{\mu\nu}) = \partial_\mu (f_{\lambda\nu} f^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\partial_\lambda (f^{\kappa\nu} f_{\kappa\nu}) \\
&= \partial_\mu (f_{\lambda\nu} f^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\lambda \partial_\mu (f^{\kappa\nu} f_{\kappa\nu}) \\
&= \partial_\mu \left(f^{\kappa\mu} f_{\kappa\lambda} - \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\lambda f^{\kappa\nu} f_{\kappa\nu} \right)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\partial_\mu f_{\lambda\nu} + \partial_\nu f_{\mu\lambda} + \partial_\lambda f_{\nu\mu} = \partial_\mu (\partial_\lambda A_\nu - \partial_\nu A_\lambda) + \partial_\nu (\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu) + \partial_\lambda (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = 0
$$

として $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ と対称であり具体的には次のように書ける. [229]

$$
\begin{aligned}
T^{00} &= -\frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2) = -\mathcal{H}_{em} \\
T^{k0} &= -\frac{1}{c}(\vec{P})_k, \quad \vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \\
T^{kl} &= \epsilon_0 E_k E_l + \mu_0 H_k H_l - \delta_{kl}\frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 - \mu_0 \vec{H}^2))
\end{aligned}
$$

また

$$
\partial_\mu T^{\mu\kappa} = f^{\kappa\nu} j_\nu
$$

229

$$
\begin{aligned}
f_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & 0 & B_x & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \\
f^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\mu} g^{nu\beta} f_{\mu\nu} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & 0 & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}_{\alpha\beta} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

より

$$
f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} = -\frac{2}{c^2}\vec{E}^2 + 2\vec{B}^2
$$

$$
\begin{aligned}
T^{00} &= \frac{1}{\mu_0}\Big(-\frac{1}{c^2}\vec{E}^2 - \frac{1}{4}(-\frac{2}{c^2}\vec{E}^2 + 2\vec{B}^2)\Big) = -\frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2) = -\mathcal{H}_{em} \\
T^{10} &= \frac{1}{c\mu_0}\Big(- B_z E_y + B_y - E_x) = -\frac{1}{c}(\vec{E} \times \vec{H})_1
\end{aligned}
$$

他の空間成分をまとめて　$T^{k0} = -\dfrac{1}{c}\vec{P}_k, \quad \vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$

さらに　$T^{kl} = \dfrac{1}{\mu_0}(\dfrac{1}{c^2}E_k E_l + B_k B_l + \delta_{kl}\dfrac{1}{2}(-\dfrac{1}{c^2}\vec{E}^2 + \vec{B}^2))$

$$
= \epsilon_0 E_k E_l + \mu_0 H_k H_l - \delta_{kl}\frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 - \mu_0 \vec{H}^2))
$$

ここで i 番目の粒子の運動方程式を $\frac{d\pi^\mu_{(i)}}{dt} = e_i \dot{x_{\kappa(i)}} f^{\mu\kappa}$ と書けば

$$\int_V d^3r\, j_(x) = \sum_i e_i \dot{x_{\kappa(i)}} f^{\mu\kappa}$$

に注意して[230]

$$\frac{d}{dt}\sum_i \pi^\mu_{(i)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V d^3r\, T^{0\mu}$$

各成分で書いて

$$\sum_i M_i c^2 + \int_V d^3r\, \mathcal{H}_{em}(\vec{r}) = const.$$
$$\sum_i M_i \vec{v}_i + \int_V d^3r\, \vec{P}(\vec{r}) = const.$$

これはエネルギーと運動量の保存則をあらわす。

13　荷電粒子と電磁場の系の量子化

前節で与えた古典的正準方程式にしたがって量子化しよう。具体的には輻射場の正準変数 $q_{\vec{k}\sigma}, p_{\vec{k}\sigma}$, および粒子系の正準変数 $\vec{r}_i$, その共役運動量として $\vec{P}_i = m_i\dot{\vec{r}}_i + e_i\vec{A}$ を演算子としてその間に交換関係

$$\begin{aligned}[q_{\vec{k}\sigma}, p_{\vec{k}'\sigma'}] &= i\hbar\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\sigma\sigma'}\\ [r_i^\alpha, P_j^\beta] &= i\hbar\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

を課す。ここでは具体的な表示として粒子系に対しては微分表示

$$\vec{P}_i = -i\hbar\vec{\nabla}_i$$

230

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sum_i \pi^\mu_{(i)} &= \int_V d^3r\, \partial_\nu T^{\nu\mu}\\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V d^3r\, T^{0\mu} + \int_V \partial_i T^{i\mu}\\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V d^3r\, T^{0\mu} + \int_S dS_i T^{i\mu} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V d^3r\, T^{0\mu}\end{aligned}$$

をとろう。また輻射場に対してはボーズ粒子による表現

$$
\begin{aligned}
q_{\vec{k}\sigma} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(a^\dagger_{-\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}) \\
p_{\vec{k}\sigma} &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(a^\dagger_{\vec{k}\sigma} - a_{-\vec{k}\sigma}) \\
[a_{\vec{k}\sigma}, a^\dagger_{\vec{k}'\sigma'}] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\sigma\sigma'} \\
[a_{\vec{k}\sigma}, a_{-\vec{k}'\sigma'}] &= 0 \\
[a^\dagger_{\vec{k}\sigma}, a^\dagger_{-\vec{k}'\sigma'}] &= 0
\end{aligned}
$$

をとろう。

この表示でベクトルポテンシャルは[231]

$$
\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o V}} \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \vec{e}_{\vec{k}\sigma}(a^\dagger_{\vec{k}\sigma} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}})
$$

となる。

[231]

$$
\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o V}} \sum_{\vec{k}\sigma} \vec{e}_{\vec{k}\sigma} q_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o V}} \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \vec{e}_{\vec{k}\sigma}(a^\dagger_{-\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o V}} \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \vec{e}_{\vec{k}\sigma}(a^\dagger_{\vec{k}\sigma} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}})
\end{aligned}
$$

場の量の交換関係

ここで場の量の交換関係を計算しておこう。[232]

$$
\begin{aligned}
[A_\alpha(\vec r), A_\beta(\vec r\,')] =& 0\\
[E_\alpha(\vec r), E_\beta(\vec r\,')] =& 0\\
[B_\alpha(\vec r), B_\beta(\vec r\,')] =& 0\\
[E_\alpha(\vec r), A_\kappa(\vec r\,')] =& i\hbar\frac{1}{\epsilon_0 V}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial'_\gamma\delta(\vec r-\vec r\,')
\end{aligned}
$$

13.1 Hamiltonian

よってハミルトニアンは古典系のものをここでの演算子で書き直して[233]

---

[232]

$$
\begin{aligned}
[A_\alpha(\vec r), A_\beta(\vec r\,')] =& 0\\
[E_\alpha(\vec r), E_\beta(\vec r\,')] =& 0\\
[B_\alpha(\vec r), B_\beta(\vec r\,')] =& 0\\
[E_\alpha(\vec r), A_\beta(\vec r\,')] =& -\frac{1}{\epsilon_0 V}\sum_{\vec k\sigma}(\vec e_{\vec k\sigma})_\alpha(\vec e_{\vec k\sigma})_\beta[p_{\vec k\sigma}, q_{\vec k\sigma}]e^{-i\vec k\cdot(\vec r-\vec r\,')}\\
=& \frac{i\hbar}{\epsilon_0 V}\sum_{\vec k\sigma}(\vec e_{\vec k\sigma})_\alpha(\vec e_{\vec k\sigma})_\beta e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r\,')}\\
=& \frac{i\hbar}{\epsilon_0 V}\sum_{\vec k}(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2})e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r\,')}\\
[E_\alpha(\vec r), B_\beta(\vec r\,')] =& \epsilon_{\beta\gamma\kappa}\partial'_\gamma[E_\alpha(\vec r), A_\kappa(\vec r\,')]\\
=& -\frac{\hbar}{\epsilon_0 V}\sum_{\vec k}(\delta_{\alpha\kappa}-\frac{k_\alpha k_\kappa}{k^2})\epsilon_{\beta\gamma\kappa}k_\gamma e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r\,')}\\
=& -\frac{\hbar}{\epsilon_0 V}\sum_{\vec k}\epsilon_{\beta\gamma\alpha}k_\gamma e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r\,')}\\
=& i\frac{\hbar}{\epsilon_0 V}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial'_\gamma\delta(\vec r-\vec r\,')
\end{aligned}
$$

[233]

$$
\begin{aligned}
\frac12\sum_k\Big(p_{\vec k\sigma}p_{-\vec k\sigma}+\omega_k^2 q_{\vec k\sigma}q_{-\vec k\sigma}\Big) &= \sum_k\frac{\hbar\omega_k}{4}\Big(-(a^\dagger_{\vec k\sigma}-a_{-\vec k\sigma})(a^\dagger_{-\vec k\sigma}-a_{\vec k\sigma})+(a^\dagger_{-\vec k\sigma}+a_{\vec k\sigma})(a^\dagger_{\vec k\sigma}+a_{-\vec k\sigma})\Big)\\
&= \sum_k\hbar\omega_k\frac14(a_{-\vec k\sigma}a^\dagger_{-\vec k\sigma}+a^\dagger_{\vec k\sigma}a_{\vec k\sigma})+a^\dagger_{-\vec k\sigma}a_{-\vec k\sigma})+a_{\vec k\sigma}a^\dagger_{\vec k\sigma})\\
&= \sum_k\hbar\omega_k\frac12(a_{\vec k\sigma}a^\dagger_{\vec k\sigma}+a^\dagger_{\vec k\sigma}a_{\vec k\sigma})\\
&= \sum_k\hbar\omega_k(a^\dagger_{\vec k\sigma}a_{\vec k\sigma}+\frac12)
\end{aligned}
$$

[234]

$$
\begin{aligned}
H &= H_{part} + H_{rad} + H_{coulomb} \\
H_{part} &= \sum_i \frac{1}{2m_i}(-i\hbar\vec{\nabla}_i - e_i\vec{A}(\vec{r}_i))^2 \\
\vec{A}(\vec{r}_i) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o V}}\sum_{\vec{k}\sigma}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}(a^\dagger_{\vec{k}\sigma}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} + a_{\vec{k}\sigma}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}) \\
H_{rad} &= \sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma=1,2}\hbar\omega_k(n_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2}) \\
n_{\vec{k}\sigma} &= a^\dagger_{\vec{k}\sigma}a_{\vec{k}\sigma'} \\
H_{coulomb} &= \sum_i \frac{e_ie_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}
\end{aligned}
$$

となる。

13.2 運動量

また場の運動量は[235]

$$\vec{G}^0_{em} = \sum_{\vec{k}\sigma}\hbar\vec{k}\ n_{\vec{k}\sigma}$$

234

$$\vec{A}(\vec{r}_i) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o V}}\sum_{\vec{k}\sigma}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\vec{e}_{\vec{k}\sigma}(a^\dagger_{\vec{k}\sigma}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} + a_{\vec{k}\sigma}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i})$$

235

$$
\begin{aligned}
G^0_{em} &= -i\sum_{\vec{k}\sigma}\vec{k}\ p_{\vec{k}\sigma}q_{\vec{k}\sigma} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}\sigma}\hbar\vec{k}(a^\dagger_{\vec{k}\sigma} - a_{-\vec{k}\sigma})(a^\dagger_{-\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}\sigma}\hbar\vec{k}(a^\dagger_{\vec{k}\sigma}a^\dagger_{-\vec{k}\sigma} - a_{-\vec{k}\sigma}a_{\vec{k}\sigma} + a^\dagger_{\vec{k}\sigma}a_{\vec{k}\sigma} - a_{-\vec{k}\sigma}a^\dagger_{-\vec{k}\sigma}) \\
&= \sum_{\vec{k}\sigma}\hbar\vec{k}\ a^\dagger_{\vec{k}\sigma}a_{\vec{k}\sigma} \quad (\vec{k}\leftrightarrow -\vec{k})
\end{aligned}
$$

最後の変形では $(\vec{k}\leftrightarrow -\vec{k})$ に注意する。

となり、粒子の運動量を加えて

$$\begin{aligned}
\vec{G}_T &= \vec{G}_p + \vec{G}^0_{em} \\
&= \sum_i \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_i + \sum_{\vec{k}\sigma} \hbar\vec{k}\; n_{\vec{k}\sigma} \\
\vec{G}_p &= \sum_i \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_i
\end{aligned}$$

ここで運動量とハミルトニアンの交換子は

$$[H, \vec{G}_T] = 0$$

となることも示せる。[236]

14　電磁場と物質の相互作用

ここでもし A, A^2 の項がなければ粒子系と輻射場は分離するのでこの項を摂動ハミルトニアンと考え、以下摂動論により議論を進めよう。ここでクーロンゲージをとっているため[237]

$$\vec{P}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i) = \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \vec{P}_i$$

であることに注意し系のハミルトニアンを次のように分離する。

$$H = H_0 + H_{int}$$

236

$$\begin{aligned}
[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_j}, \vec{\nabla}_j] &= -i\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_j} \\
[a, a^\dagger a] &= a \\
[a^\dagger, a^\dagger a] &= -a^\dagger \\
[(\vec{A}(\vec{r}_i))_\alpha, \vec{G}_T] &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (\vec{e}_{\vec{k}\sigma})_\alpha \Big([a^\dagger_{\vec{k}\sigma} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}, \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_i + \hbar\vec{k}n_{\vec{k}\sigma}] \\
&\quad + [a_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}, \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_i + \hbar\vec{k}n_{\vec{k}\sigma}] \Big) = 0 \\
[H_{part}, \vec{G}_T] &= 0 \\
[H, \vec{G}_T] &= [H_{part} + H_{rad} + H_{coulomb}, \vec{G}_p + \vec{G}^0_{em}] \\
&= [H_{rad} + H_{coulomb}, \vec{G}_p + \vec{G}^0_{em}] \\
&= [H_{coulomb}, \vec{G}_p + \vec{G}^0_{em}] \\
&= [H_{coulomb}, \vec{G}_p] = 0
\end{aligned}$$

237

$$[\vec{P}_i, \vec{A}(\vec{r}_i)]* = \vec{A}_i \cdot \vec{P}_i(*) + (\vec{P}_i \cdot \vec{A}_i) * - \vec{A}_i(\cdot \vec{P}_i *) = -i\hbar \mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r}_i) = 0$$

ここで H_0 は粒子系と放射場の分離した以下のハミルトニアンであり、

$$
\begin{aligned}
H_0 &= H_p + H_{rad} \\
H_p &= -\sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_i + \sum_i \frac{e_i e_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\
H_{rad} &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=1,2} \hbar\omega_k (n_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

H_{int} はベクトルポテンシャルによる粒子系と放射場の相互作用である。

$$
\begin{aligned}
H_{int} &= H^{(1)} + H^{(2)} \\
H^{(1)} &= \sum_i \frac{i\hbar e_i}{m_i} \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \vec{\nabla}_i \\
&= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o V}} \sum_i \frac{i\hbar e_i}{m_i} \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a^\dagger_{-\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} (\vec{e}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{\nabla}_i) \\
H^{(2)} &= \sum_i \frac{\hbar(e_i)^2}{2m_i} \vec{A}(\vec{r}_i)^2 \\
&= \sum_i \frac{\hbar(e_i)^2}{2m_i} \frac{1}{\epsilon_o V} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} \frac{\hbar(\vec{e}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{e}_{\vec{k}'\sigma'})}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} (a^\dagger_{-\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma})(a^\dagger_{-\vec{k}'\sigma'} + a_{\vec{k}'\sigma'}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}_i + \vec{k}'\cdot\vec{r}_i')}
\end{aligned}
$$

よって非摂動系の基底は粒子系の固有状態 $\Psi_m(\{\vec{r}_i\})$ 固有エネルギー E_m および輻射場の状態ベクトル $|\{n_{\vec{k}\sigma}\}\rangle$ により次のように書ける。(セロ点エネルギーは除いた)

$$
\begin{aligned}
H_0|m; \{n_{\vec{k}\sigma}\}\rangle &= (E_m + \sum_{\vec{k}\sigma} n_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}}))|m; \{n_{\vec{k}\sigma}\}\rangle \\
|m; \{n_{\vec{k}\sigma}\}\rangle &= |\{n_{\vec{k}\sigma}\}\rangle \Psi_m(\{\vec{r}_i\}) \\
H_p \Psi_m(\{\vec{r}_i\} &= E_m \Psi_m(\{\vec{r}_i\}) \\
H_{rad}|\{n_{\vec{k}\sigma}\}\rangle &= \sum_{\vec{k}\sigma} n_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} |\{n_{\vec{k}\sigma}\}\rangle
\end{aligned}
$$

特に $H^{(1)}$ は光子 1 つの吸収放出に関係し $H^{(2)}$ は光子 2 つが関与する過程を記述する。

以上粒子系に対する相対論的効果を無視してきたが最低次の相対論的補正が

$$
-\frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{A}
$$

であったことに対応して次の項が摂動ハミルトニアンとして付け加わる。

$$
\begin{aligned}
H^{(s)} &= -\sum_i \frac{e_i\hbar}{2m_i}\vec{\sigma}\cdot \mathrm{rot}_i\, \vec{A}_i = -\sum_i \frac{e_i\hbar}{2m_i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}_i\times\vec{A}_i \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}}\sum_i\sum_{k,\sigma}\frac{ie_i\hbar}{2m_i}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(a^\dagger_{-\vec{k}\sigma}+a_{\vec{k}\sigma})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}\vec{\sigma}\cdot(\vec{e}_{\vec{k}\sigma}\times\vec{k})
\end{aligned}
$$

14.1　フェルミの黄金律

ここで摂動論による状態の遷移確率に関するフェルミの黄金律を復習しておこう。まず非摂動系とその状態

$$H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$$

を考え全系が (時間に依存しない) ハミルトニアン

$$H = H_0 + H_{int}$$

に支配されているとする。このとき時間 0 に状態が非摂動状態 a にあったとして単位時間あたりに非摂動状態 b へ遷移する確率を求めよう。ただし摂動項は十分小さく、更に観測時間は十分長いことを仮定する。

- 相互作用表示

  シュレディンガー方程式

  $$i\hbar\partial_t\Psi = (H_0 + H_{int})\Psi$$

  において

  $$\Psi = e^{-iH_0t/\hbar}\Psi^{\mathrm{I}}$$

  とすると[238]

  $$
  \begin{aligned}
  i\hbar\partial_t\Psi^{\mathrm{I}} &= H^{\mathrm{I}}_{int}\Psi^{\mathrm{I}} \\
  H^{\mathrm{I}}_{int} &= e^{iH_0t/\hbar}H_{int}e^{-iH_0t/\hbar}
  \end{aligned}
  $$

  これを相互作用表示という。よって

  $$\Psi^{\mathrm{I}}(t) = \sum_n c_n(t)|n\rangle$$

  とすれば

  $$
  \begin{aligned}
  i\hbar\dot{c}_n &= \sum_m \langle n|H^{\mathrm{I}}_{int}|m\rangle c_m \\
  &= \sum_m \langle n|H_{int}|m\rangle e^{i(E_n-E_m)t/\hbar}c_m
  \end{aligned}
  $$

[238] 代入せよ

なおこれより確率の保存

$$\frac{d}{dt}\sum_n |c_n(t)|^2 = 0$$

はすぐに導ける。(自明か?)

もとに戻り

$$c_a(t=0)=1,\quad c_n(t=0)=0,\ (n\neq a)$$

として時間が初期条件からあまりたっていないと仮定し逐次近似解を求めると[239]

$$c_b(t) = \langle b|H_{int}|a\rangle \frac{e^{i(E_b-E_a)t/\hbar}-1}{E_b-E_a}$$

よって

$$|c_b(t)|^2 = |\langle b|H_{int}|a\rangle|^2 2\frac{\cos(E_b-E_a)t/\hbar}{(E_b-E_a)^2}$$

ここで[240] [241]

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{\pi\alpha x^2}$$

をもちいると単位時間に a から b に遷移する確率 $w_{a\to b}$ が以下のように与えれれることを意味する。[242]

$$w_{a\to b} = \frac{1}{t}|c_b(t)|^2 \longrightarrow \frac{2\pi}{\hbar}|\langle b|H_{int}|a\rangle|^2\delta(E_b-E_a)$$

つまり遷移はエネルギーは等しいが状態のことなるものあいだで起こる。さらに例えば終状態 b が連続スペクトルに属する場合エネルギー間隔 dE_b における状態密度が $\rho(E_b)$ であるとすれば状態数は $\rho(E_b)dE_b$ なので遷移確率は

$$\int w_{a\to b}\rho(E_b)dE_b = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle b|H_{int}|a\rangle|^2\rho(E_b)$$

となる。これをフェルミの黄金律という。[243]

239

$$i\hbar\dot{c}_b(t) = \langle b|H_{int}|a\rangle e^{i(E_b-E_a)t/\hbar}c_a$$

240 これより逐次近似の有効範囲は

$$|\langle b|H_{int}|a\rangle| << |E_b-E_a|$$

であり時間にはよらないことがわかる。

241

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\frac{1-\cos\alpha x}{y^2} = \pi$$

242 このデルタ関数での置き換えは

$$\frac{|E_a-E_b|t}{\hbar} >> 1$$

で正当化される。つまりエネルギーが近い状態ほど観測時間が十分に長くなければならない。

243 近似である.

14.2　遷移の行列要素と双極子遷移

光の吸収、放出等を一次の過程に限りフェルミの黄金律の範囲内で議論する。そのためには次の行列要素

$$
\begin{aligned}
\langle m_b; \{n_{\vec{k}\sigma}\}_b | H^{(1)} | | m_a; \{n_{\vec{k}\sigma}\}_a \rangle &= \sum_{\vec{k}\sigma} M^p_{ba}(\vec{k},\sigma) M^{rad}_{ba}(\vec{k},\sigma) \\
M^p_{ba}(\vec{k},\sigma) &= = \int \prod d\vec{r}_i \Psi^*_b(\{\vec{r}_i\}) \Bigg(\sum_i \frac{i\hbar e_i}{m_i} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} (\vec{e}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{\nabla}_i) \Bigg) \Psi_a(\{\vec{r}_i\}) \\
M^{rad}_{ba}(\vec{k},\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o V}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \langle \{n_{\vec{k}\sigma}\}_b | (a^\dagger_{-\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}) | \{n_{\vec{k}\sigma}\}_a \rangle
\end{aligned}
$$

を計算することとなる。[244] まず輻射場については以下の評価を用いる。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \langle n-1 | a | n \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \sqrt{n} \\
\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \langle n+1 | a^\dagger | n \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \sqrt{n+1}
\end{aligned}
$$

次に粒子系の波動関数 $\Psi_m(\{\vec{r}_i\})$ による $(m = a, b)$ 行列要素 $M^p_{ba}(\vec{k}\sigma)$ について少し議論しよう。まず原子の半径を a として遷移の前後のエネルギー差 E を見積もって原子の束縛エネルギー

$$
E = \hbar\omega \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}
$$

とすれば、関与する光の波数 k は

$$
k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \frac{E}{\hbar c} \approx \frac{1}{a} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \alpha \frac{1}{a}
$$

よって

$$
k \approx \frac{\alpha}{a} << \frac{1}{a}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137},
$$

ここで α は 微細構造定数とよばれる無次元の物理定数である。つまり粒子系の波動関数が有限の値をもつ領域においては光の波数と

$$
\vec{k} = 0
$$

のみを考えれば良いと考えられる。更に粒子系のハミルニアン H_p に対して[245]

$$
[H_p, \vec{r}_i] = - \frac{\hbar^2}{m} \vec{\nabla}_i
$$

$$
[H_p, r_{i,\alpha}] = - \frac{\hbar^2}{m} \partial_{i,\alpha}
$$

---

[244] フェルミ粒子系を考える。ボーズ系の場合は規格化に注意する

[245]

$$
[\frac{p^2}{2m}, r] = \frac{p}{2m} 2[p, r] = \frac{p}{2m} 2(-) i\hbar = -ip\frac{\hbar}{m}
$$

これから状態が固有状態であることをつかって

$$
\begin{aligned}
M_{ba}^{p} &\approx M_{ba}^{p,e-dipole} \\
M_{ba}^{p,e-dipole} &= (E_b - E_a)\int \prod d\vec{r}_i \Psi_b^*(\{\vec{r}_i\})\left(\sum_i (\vec{e}_{\vec{k}=0,\sigma}\cdot\vec{r}_i)\frac{ie_i}{\hbar}\right)\Psi_a(\{\vec{r}_i\}) \\
&= (E_b - E_a)\langle b|\sum_i (\vec{e}_{\vec{k}=0,\sigma}\cdot\vec{r}_i)\frac{ie_i}{\hbar}|a\rangle \\
&= -i\omega_{ba}\mu_{\sigma,ba}^{T} \\
\mu_{\sigma,ba}^{T} &= \sum_i \langle b|\mu_\sigma^i|a\rangle, \qquad \hbar\omega_{ba} = E_b - E_a \\
&\langle b|\cdots|a\rangle \equiv \int \prod d\vec{r}_i \Psi_b^*(\{\vec{r}_i\})(\cdots)\Psi_a(\{\vec{r}_i\}), \\
\mu_\sigma^i &= \vec{e}_{\vec{k},\sigma}\cdot\vec{\mu}_i, \quad \vec{\mu}_i = e_i\vec{r}_i \ \ (\text{電気双極子})
\end{aligned}
$$

書ける。この $e^{i\vec{k}\cdot r_i}\to 1$ ととる近似を電気双極子近似という。

　一般にこの $b\to a$ の遷移の強さを表す量として振動子強度 f_{ba} を次のように定義する。

$$f_{ab} = \frac{2m}{e^2\hbar\omega_{ba}}|M_{ba}^p|^2$$

この振動子強度について電気双極子遷移に関しては次の総和則が成立する。[246]

$$\sum_b f_{ba} = N$$

[246] まず次の 2 重交換子を確認しよう。

$$
\begin{aligned}
[\sum_i^N r_{i,\alpha},[H_p,\sum_j^N r_{j,\beta}]] &= \frac{1}{2m}[\sum_i^N r_{i,\alpha},[\sum_k^N \vec{p}_k^2,\sum_j^N r_{j,\beta}]] \\
&= -2i\hbar\frac{1}{2m}[\sum_i^N r_{i,\alpha},\sum_j^N p_{j,\beta}] \\
&= (-2i\hbar)(i\hbar)\frac{1}{2m}N\delta_{\alpha\beta} = \frac{\hbar^2}{m}N\delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

$$[\sum_i^N(\vec{e}_\sigma\cdot\vec{r}_i),[H_p,\sum_j^N(\vec{e}_\sigma\cdot\vec{r}_j)]] = (\vec{e}_\sigma)_\alpha(\vec{e}_\sigma)_\alpha\frac{\hbar^2}{m}N = \frac{\hbar^2}{m}N$$

$[x,[H,x]] = [x,Hx-xH] = xHx - x^2H - Hx^2 + xHx = 2xHx - x^2H - Hx^2$ から

$$
\begin{aligned}
\langle a|[x,[H,x]]|a\rangle &= 2\langle a|xHx|a\rangle - \langle a|x^2H|a\rangle - \langle a|Hx^2|a\rangle \\
&= 2\langle a|xHx|a\rangle - E_a\langle a|x^2|a\rangle - E_a\langle a|x^2|a\rangle \\
&= 2\sum_b \langle a|x|b\rangle\langle b|Hx|a\rangle - 2E_a\sum_b\langle a|x|b\rangle\langle b|x|a\rangle \\
&= 2\sum_b (E_b - E_a)|\langle b|x|a\rangle|^2
\end{aligned}
$$

通常いくつかの遷移が主要な寄与をあたえるので、それらの主要な寄与は $\mathcal{O}(1)$ であることを意味する。

電気双極子近似による寄与が対称性のために 0 となる場合次の次数を考慮する必要がある。そこで $e^{i\vec{k}\cdot r_i} \to 1 + i\vec{k}\cdot\vec{r}_i$ として

$$M_{ba}^{p} \approx M_{ba}^{p,e-d} + \int\prod d\vec{r}_i \Psi_b^*(\{\vec{r}_i\})\left(\frac{i\hbar e_i}{m_i}\sum_i i\vec{k}\cdot\vec{r}_i(\vec{e}_{\vec{k},\sigma}\cdot\vec{\nabla}_i)\right)\Psi_a(\{\vec{r}_i\})$$

ここで[247]

$$(\vec{k}\cdot\vec{r})(\vec{e}\cdot\vec{\nabla}) = \frac{1}{2}(\vec{k}\times\vec{e})\cdot\vec{\ell} + \frac{1}{2}[H_p, (\vec{k}\cdot\vec{r})(\vec{e}\cdot\vec{r})]$$

より

$$\begin{aligned}
M_{ba}^{p} &\approx M_{ba}^{p,e-d} + M_{ba}^{p,e-q} + M_{ba}^{p,m-d_2} \\
M_{ba}^{p,e-q} &= (E_b - E_a)\int\prod d\vec{r}_i \Psi_b^*(\{\vec{r}_i\})\left(\sum_i (\vec{k}\cdot\vec{r}_i)(\vec{e}_{\vec{k},\sigma}\cdot\vec{r}_i)\frac{ie_i}{2\hbar}\right)\Psi_a(\{\vec{r}_i\}) \\
M_{ba}^{p,m-d_1} &= \int\prod d\vec{r}_i \Psi_b^*(\{\vec{r}_i\})\left(\sum_i \frac{i\hbar e_i}{m_i}\left(\frac{1}{2}(\vec{k}\times\vec{e}_{\vec{k}\sigma})\cdot\vec{\ell}\right)\Psi_a(\{\vec{r}_i\})\right.
\end{aligned}$$

この $M_{ba}^{p,e-q}$ を電気 2 重極子遷移の行列要素とよぶ。さらに $M_{ba}^{p,m-d_1}$ からの寄与は $H^{(s)}$ の 1 次の寄与を $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1$ と双極子近似で扱うときの寄与 $M_{ba}^{p,m-d_2}$ とまと

よって $x = \sum_i \vec{e}_\sigma\cdot\vec{r}_i$ として $\langle a|a\rangle = 1$ と中間状態の完全性より

$$\sum_b f_{ba} = \sum_b \frac{2m}{e^2\hbar}\omega_{ba}|\mu_{\sigma,ba}^T|^2 = \sum_b \frac{2}{e^2 m\hbar^2}(E_b - E_a)|\mu_{\sigma,ba}^T|^2 = N$$

[247] まず次の関係式を確認する。

$$\begin{aligned}
(\vec{k}\times\vec{e})(\vec{r}\times\vec{\nabla}) &= \epsilon_{ijk}k_j e_k \epsilon_{iab} r_a\partial_b = (\delta_{ja}\delta_{kb} - \delta_{jb}\delta_{ka})k_j e_k r_a \partial_b \\
&= k_j e_k r_j \partial_k - k_j e_k r_k \partial_j \\
[H_p, r_i r_j] &= r_i[H_p, r_j] + [H_p, r_i]r_j = -\frac{\hbar^2}{m}(r_i\partial_j + \partial_j r_i)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
(\vec{k}\cdot\vec{r})(\vec{e}\cdot\vec{\nabla}) &= k_i r_i e_j \partial_j = \frac{1}{2}k_i e_j(r_i\partial_j - r_j\partial_i) + \frac{1}{2}k_i e_j(r_i\partial_j + r_j\partial_i) \\
&= \frac{1}{2}(\vec{k}\times\vec{e})\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla}) + \frac{1}{2}[H_p, (\vec{k}\cdot\vec{r})(\vec{e}\cdot\vec{r})]
\end{aligned}$$

めて次の磁気双極子遷移の行列要素と呼ぶ。

$$M_{ba}^{p,m-d} = \int \prod d\vec{r}_i \Psi_b^*(\{\vec{r}_i\}) \left(\sum_i \frac{i\hbar e_i}{2m_i} (\vec{e}_{\vec{k}\sigma} \times \vec{k}) \cdot \vec{M} \right) \Psi_a(\{\vec{r}_i\})$$

$$\vec{M} = \vec{\ell} + \vec{\sigma} = \vec{\ell} + 2\vec{s}$$

もっとも簡単な電気双極子近似での計算に入る前に輻射場の状態密度を計算しておこう。系が一辺 L の箱に入っていると考えるとエネルギーが $[E, E+dE]$ にある状態数 $\rho(E)dE$ は立体角 $d\Omega$ 波数 $[k, k+dk]$ に分解して[248]

$$\rho(E) = V \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{\hbar c^3} d\Omega$$

14.3　光の放出

前節の議論から次のような遷移の過程を考えると

	原子系の状態	原子系のエネルギー	輻射場
始状態	a	E_a	$\{n_i\}$
終状態	b	E_b	${}^{\exists}\nu\ n_\nu + 1$

放出される光のエネルギーについてエネルギー保存 (フェルミの黄金律のデルタ関数) より

$$\hbar\omega = E_a - E_b$$

であり、フェルミの黄金律から単位時間あたり立体角 $d\Omega$ に偏光 σ で放出される確率 $w d\Omega$ は

$$w d\Omega = \frac{2\pi}{\hbar} \times \frac{1}{\epsilon_0 V} \omega^2 |\mu_\sigma^{\mathrm{T}}|^2 \times \frac{\hbar}{2\omega} (\bar{n}_{k\sigma} + 1) \times \rho(E)$$

ここで輻射場の光子数としては波数 k 偏光 σ のものについて平均をとったものを $\bar{n}_{k\sigma}$ として導入した。これを整理して

$$\begin{aligned} w &= w_{sp} + w_{ind} = \frac{\omega^3}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\mu_\sigma^{\mathrm{T}}|^2 (\bar{n}_{k\sigma} + 1) \\ w_{sp} &= \frac{\omega^3}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\mu_\sigma^{\mathrm{T}}|^2 \bar{n}_{k\sigma} \\ w_{ind} &= \frac{\omega^3}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\mu_\sigma^{\mathrm{T}}|^2 \end{aligned}$$

248

$$\begin{aligned} \rho dE &= \frac{dk k^2 d\Omega}{(\frac{2\pi}{L})^3} = V \frac{k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3} \\ E &= \hbar c k \\ \rho(E) &= V \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{E^2}{(\hbar c)^3} d\Omega = V \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{\hbar c^3} d\Omega \end{aligned}$$

このうち $\bar{n}_{k\sigma}$ に比例する w_{ind} を誘導放出、残りの項を自然放出と呼ぶ。

14.4　光の吸収

吸収に関与する遷移の過程も放出の場合と同じなので $n_{\vec{k}\sigma}+1 \to n_{\vec{k}\sigma}$ として以下のようになる。

$$w_a = \frac{\omega^3}{8\pi^2\epsilon_0\hbar c^3}|\mu_\sigma^{\mathrm{T}}|^2\bar{n}_{k\sigma}$$

この表式は光の入射強度 $I(\omega)d\omega$ を[249]

$$I(\omega)d\omega = c\frac{\hbar\omega n}{V}\rho_\omega d\omega = (\text{速度})(\text{エネルギー密度})\rho_\omega d\omega$$

として

$$w_a = \frac{\pi}{\epsilon_0\hbar^2 c}\,|\mu_\sigma^{\mathrm{T}}|^2 I(\omega)$$

と書けることに注意しよう。

なお 2 準位系 a, b が輻射場を介して熱平衡になっているとすると $(E_b - E_a = \hbar\omega)$ それぞれの準位にある原子数を N_a, N_b, として粒子系の方の遷移行列要素を $A_{a\to b} = A_{b\to a}$ として

$$N_b A_{b\to a}(n+1) = N_a A_{a\to b} n$$

ここで原子系にボルツマン分布

$$\frac{N_b}{N_a} = e^{-(E_b-E_a)/k_BT} = e^{-hbar\omega/k_BT}$$

を仮定すると

$$n = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}$$

というプランクの輻射公式がでる。

---

[249]

$$\rho(E)dE = \tilde{\rho}(\omega)d\omega$$

より

$$\tilde{\rho}(\omega) = \rho(E)\hbar$$

$$I(\omega) = \frac{\hbar^2\omega c n}{V}\rho(E)$$