待ち行列理論
Queuing Theory

参考: 大石信一「待ち行列理論」コロナ社

内容と応用

- 内容
  - 確率的に発生する処理事象を数学的に解析評価するための数学的手法
  - 以下の3つの事象の確率過程を定義して解析
    - 生成(Generation/Arrival)」
    - 収容(Waiting/Queuing)
    - 処理(Processing/Departure)
- 応用例
  - コンピュータシステム: プロセス処理
  - ネットワークシステム: パケット通信

  (*) 例: 1日に1,000人の客が来店する銀行に、最低いくつの窓口を用意すれば、平均待ち時間を10分にすることができるか?

確率空間 (Ω,S,P)

- Ω : 標本空間
- A $(\forall A \in \Omega)$: 事象
- $S = \{A_1, A_2, \dots A_k\}$: 事象の集合

- $P(A) \geq 0, \ (\forall A \in S)$
- $P(\Omega) = 1$
- $A_k \in S(k = 1,2\dots)$, かつ $A_k \cap A_j = 0$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

- 条件付き確率

$$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$$

(*) $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$ なら 事象 A と B は独立事象で、

$P(B|A) = P(B)$ ($\because$ 事象 B は 事象 A に影響されない)

確率分布

- 確率分布関数

$F(x):$確率変数 X が x 以下となる確率

$F(x) = P(X \le x)$

- 離散的 確率分布関数(離散的な事象の集合)

$p_j = P(X = x_j)$ (確率密度関数)

$F(x) = \sum_{\{j | xj \le x\}} p_j$

(注) 連続系では、$p(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

確率分布(続)

- 期待値

$$E(X) = \sum_j x_j p_j$$

- 合成積: 2つの独立事象(X と Y)で、z=x＋yとなる事象Z を考える

$$F_z(k) = \sum_{t+s=k} p_x(t)\, p_y(s) = \sum_{s=0}^{s=k} p_x(k-s)\, p_y(s)$$

幾何分布

- 独立な事象が、離散的に 確率 p で発生するような確率過程で、n 回目で初めて事象が発生する確率P(X=n)

$$P(X=n)=(1-p)^{n-1}p$$

- 期待値 E(X)

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}n(1-p)^{n-1}p=\frac{1}{p}$$

$$\because \quad E(X)-(1-p)E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}p$$

$$pE(x)=p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}$$

$$E(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}=\frac{1}{p}$$

ポアソン過程(Poisson Process)

- 事象は独立に発生し、時間依存がない。
- 微小時間Δt の間に 事象は発生する確率は λΔt で与えられる。

- この時、時間間隔 (0, t] で 事象が k 回発生する確率 $p_k(t)$

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

ポアソン過程を離散系で考えると

- 事象が発生する確率をｐとする過程。
- n 時間内にｋ回事象が発生する。
- np = λt とすれば。

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{np(np-p)\cdots(np-kp+p)}{k!} (1-p)^{-k} (1-p)^n \\
&= \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}
\end{aligned}
$$

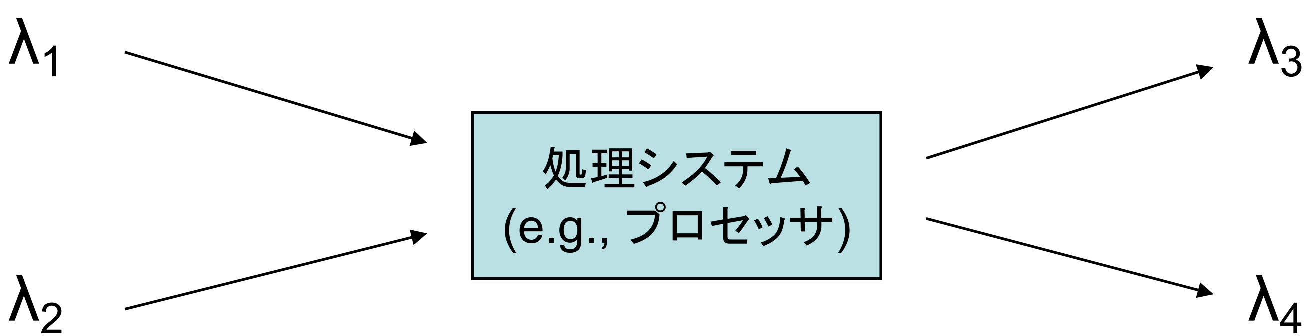
ポアソン過程の合流と分流

- 単に、λ の 加算 と 減算 になる。

$$Qn(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k^{\lambda_1}(t)\, P_{n-k}^{\lambda_2}(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda_1 t)^k e^{-\lambda_1 t}}{k!} \frac{(\lambda_2 t)^{n-k} e^{-\lambda_2 t}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{n!}$$



指数分布

- ポアソン過程において、時間T内で、事象が一度も発生しない確率 p(T) を考える。 つまり、事象が発生する時間間隔が T 以上となる確率に同値。

$$p(T) = P_0(T) = e^{-\lambda T} u(T)$$

$$\text{ただし、} u(T) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

(*) 時間 T 以内に事象が発生する確率 q(T)

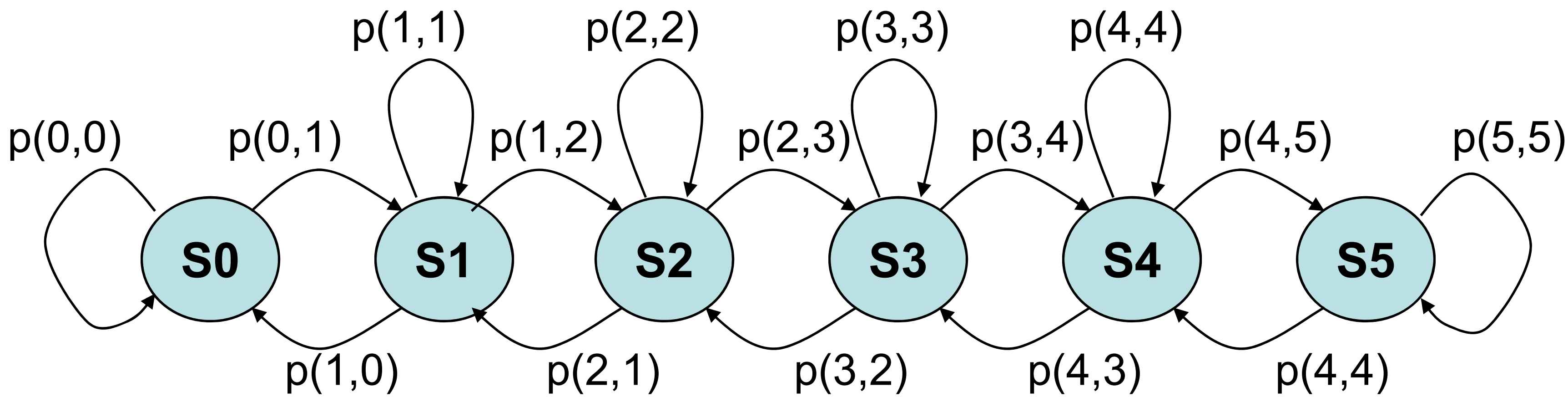
$$Q(T) = 1 - e^{-\lambda T} u(T)$$

マルコフ連鎖 を用いた
待ち行列計算手法

マルコフ連鎖

- マルコフ過程(Morkov Process)
  - システムの状態(State) が 定義されている。
  - 状態(State)　の間は、有向グラフ(リンク)で 連結されている。
  - ある状態(State)は、ある確率で、自分自身を含むその他の状態(State)に遷移する。
  - 将来の状態(次のState)は、過去の履歴に依存せず、現在の状態のみで決定される。
- マルコフ連鎖
  - マルコフ過程において 取りうる状態の数が、有限個もしくは、可算無限個の場合。

例: 5つのサーバがプロセスを独立に処理。 5つ目以上のプロセスは廃棄される。単位時間あたりには、プロセスは高々1つしか増減しない。



$$\begin{pmatrix} S_0(t+1) \\ S_1(t+1) \\ S_2(t+1) \\ S_3(t+1) \\ S_4(t+1) \\ S_5(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0,0) & p(1,0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P(0,1) & p(1,1) & p(2,1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(1,2) & p(2,2) & p(3,2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(2,3) & p(3,3) & p(4,3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(3,4) & p(4,4) & p(5,4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P(4,5) & p(5,5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \\ S_4(t) \\ S_5(t) \end{pmatrix}$$

解法/計算手法

1. 状態遷移方程式

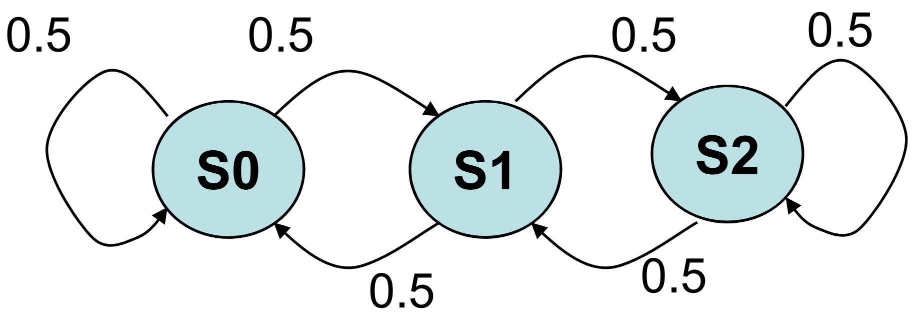
$$\mathbf{S}(t+1) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}(t)$$

$$\Rightarrow \ (\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \mathbf{0} \qquad \because \mathbf{S}(t+1) = \mathbf{S}(t)$$

2. 状態確率の総和 は、1.0。

$$\sum_i S_i(t+1) = \sum_i S_i(t) = 1.0$$

簡単な計算例(1)



$$\begin{pmatrix} S_0(t+1) \\ S_1(t+1) \\ S_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

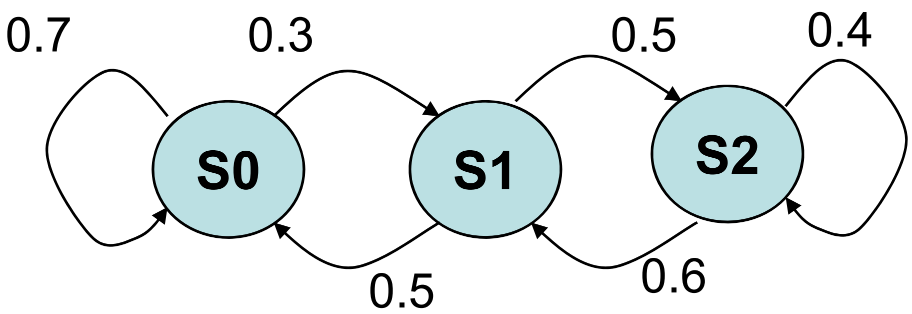
ただし、$S_0 + S_1 + S_2 = 1.0$

$$S_0 - S_1 = 0$$
$$-S_0 + 2S_1 - S_2 = 0$$
$$-S_1 + S_2 = 0$$

$$S_0 = S_1 = S_2,$$
$$\Rightarrow S_1 + S_1 + S_1 = 1.0$$
$$\Rightarrow 3S_1 = 1.0$$
$$\Rightarrow S_1 = 0.33$$
$$\Rightarrow S_0 = S_1 = S_2 = 0.33$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{S}_0 \\ \mathrm{S}_1 \\ \mathrm{S}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 \\ 0.33 \\ 0.33 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(\text{回答})$$

簡単な計算例(2)



$$\begin{pmatrix} S_0(t+1) \\ S_1(t+1) \\ S_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.3 & -0.5 & 0 \\ -0.3 & 1.0 & -0.6 \\ 0 & -0.5 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ただし、$S_0 + S_1 + S_2 = 1.0$

$$3S_0 - 5S_1 = 0$$
$$-3S_0 + 10S_1 - 6S_2 = 0$$
$$-5S_1 + 6S_2 = 0$$

$$3S_0 = 5S_1 = 6S_2,$$
$$\Rightarrow S_0 + \frac{3}{5}S_0 + \frac{1}{2}S_0 = 1.0$$
$$\Rightarrow \frac{10+6+5}{10}S_0 = \frac{21}{10}S_0 = 1.0$$
$$\Rightarrow S_0 = 10/21$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{S}_0 \\ \mathrm{S}_1 \\ \mathrm{S}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/21 \\ 6/21 \\ 5/21 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(回答)$$

少し、難しい モデルの計算

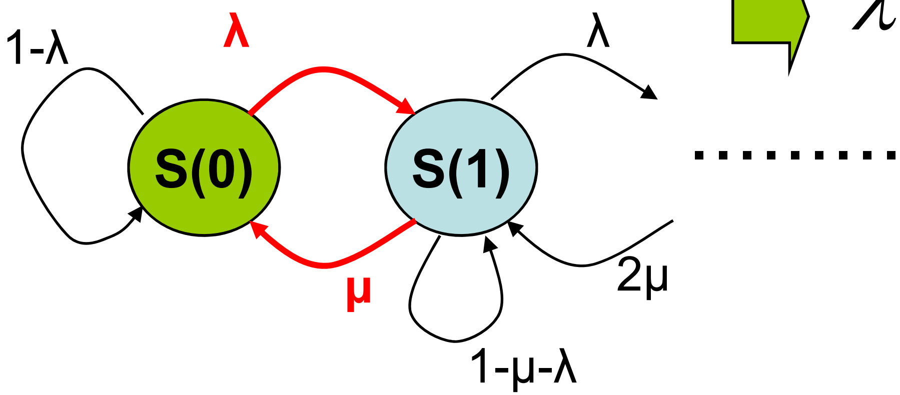
表記方法

- システム要素
  - 到着時間間隔、処理時間間隔
  - サービス窓口の数、システムの容量
- 確率過程
  - M： 指数分布(Morkov)
  - D： 一定分布 (Deterministic)
  - G： 一般分布
  - Ek： アーランK分布

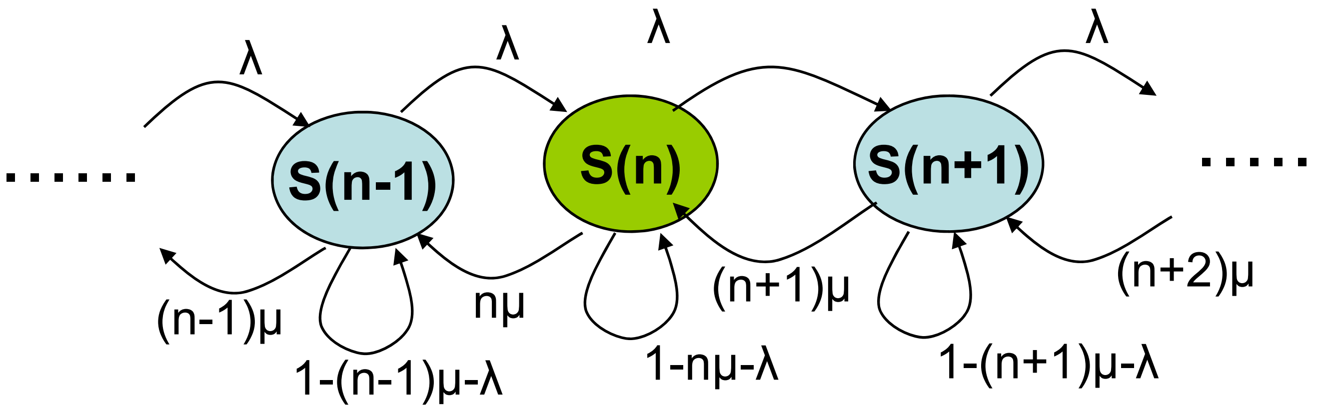
M/M/S/S, e.g.,電話システム

- 到着: 生起確率 λ の指数分布
- 処理: 消滅確率 nμの指数分布 (nは客数)
- 窓口数＝N (口)
- システム内数(＝窓口数)＝N(個)

(*) N個以上のサービスは拒絶される。

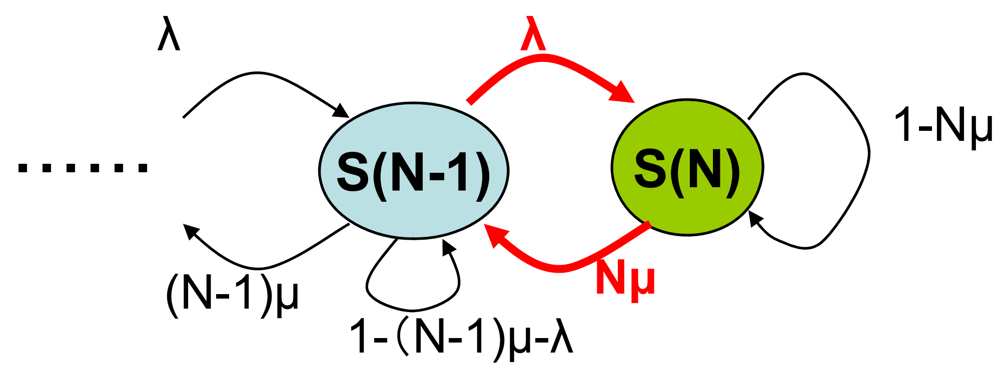


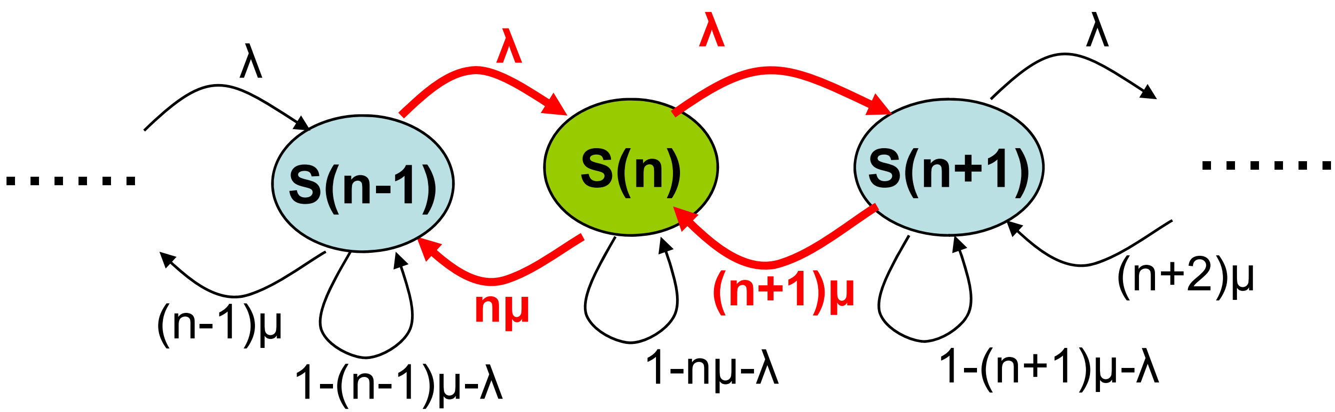
$$\lambda \cdot P_0 = \mu \cdot P_1 \quad \text{(境界条件1)}$$



$$\lambda \cdot P_{N-1} = N\mu \cdot P_N$$

(境界条件2)





$$\lambda P_{n-1} - (\lambda + n\mu) P_n + (n+1)\mu P_{n+1} = 0$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0, \quad P_N = \frac{\lambda}{N\mu} P_N - 1$$

$$P_2 = \frac{(\lambda + \mu)\dfrac{\lambda}{\mu} P_0 - \lambda P_0}{2\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu^2} P_0 = \frac{\lambda}{\mu} P_1$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 \xrightarrow{\text{再帰的に計算すると}} P_n = \frac{\lambda}{n\mu} P_{n-1}$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0$$

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right) P_0 = 1.0$$

$$\Rightarrow \; P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}$$

$$\Rightarrow \; P_n = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{N} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}$$

(*) 打ち切られたポアソン分布

ちょっとした計算

- 輻輳(Congestion)時間の確率 ＝ P_N
- 呼損率(サービスを受けらなかった生成事象)=B

$$B = \frac{\lambda P_N}{\sum_{i=0}^{N} \lambda P_i} = \frac{\lambda P_N}{\lambda \sum_{i=0}^{N} P_i} = P_N$$

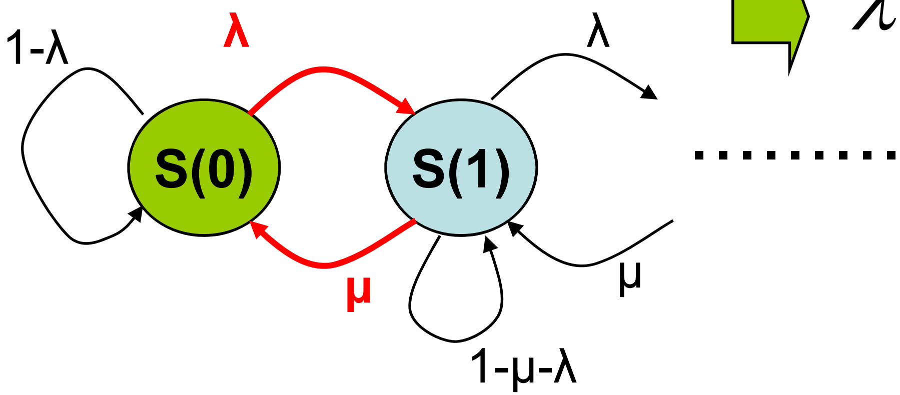
- 単位時間にサービスを受けることができた事象の数=Y

$$Y = \sum_{n=1}^{N} n P_n = \frac{\lambda}{\mu}(1 - B)$$

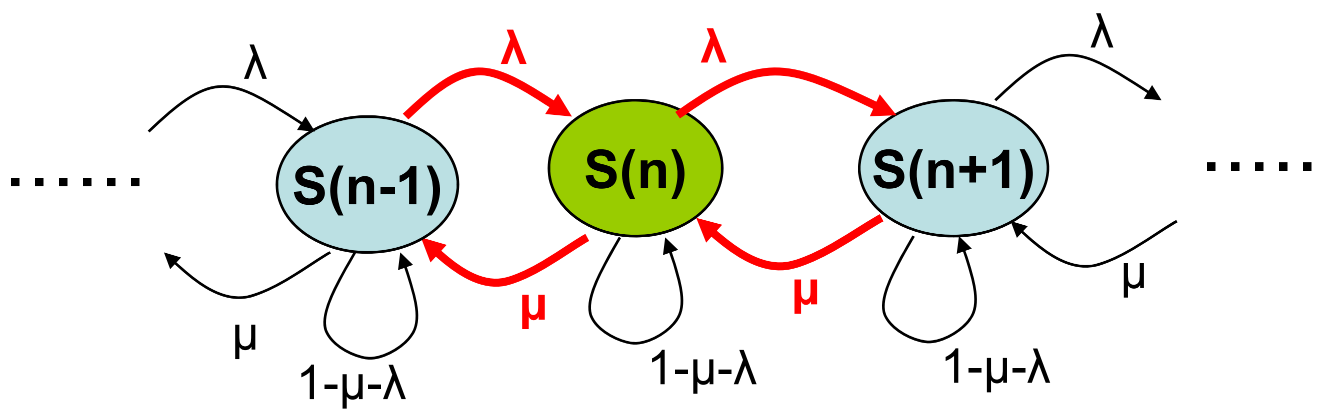
M/M/1/∞, e.g., 理想的な計算機

- 到着: 生起確率 λ の指数分布
- 処理: 消滅確率 μの指数分布
- 窓口数＝1 (口)
- システム内数＝∞ (個)

  (*) 無限個のプロセスをQueuing可能。



$$\lambda \cdot P_0 = \mu \cdot P_1 \quad (境界条件1)$$



$$\lambda P_{n-1} - (\lambda + \mu) P_n + \mu P_{n+1} = 0$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0,$$

$$P_2 = \frac{(\lambda + \mu)\frac{\lambda}{\mu} P_0 - \lambda P_0}{2\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu^2} P_0 = \frac{\lambda}{\mu} P_1$$

$$\Rightarrow\ P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 \xrightarrow{\text{再帰的に計算すると}} P_n = \left(\lambda/\mu\right)^n P_0$$

ここで、$1.0 = \sum_{n=0}^{N} P_n = \sum_{n=0}^{N} \left(\lambda/\mu\right)^n P_0 = \frac{1}{1-\lambda/\mu} P_0$

なので、

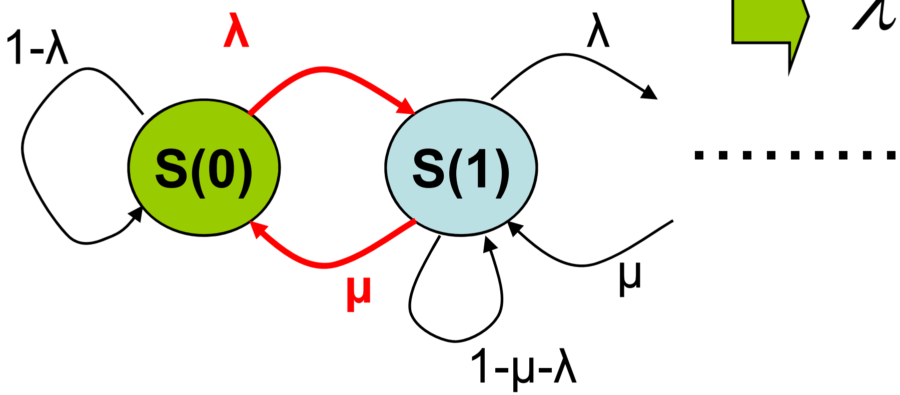
$$P_0 = 1 - \lambda/\mu$$

$$P_n = (1-\lambda/\mu)\cdot(\lambda/\mu)^n$$

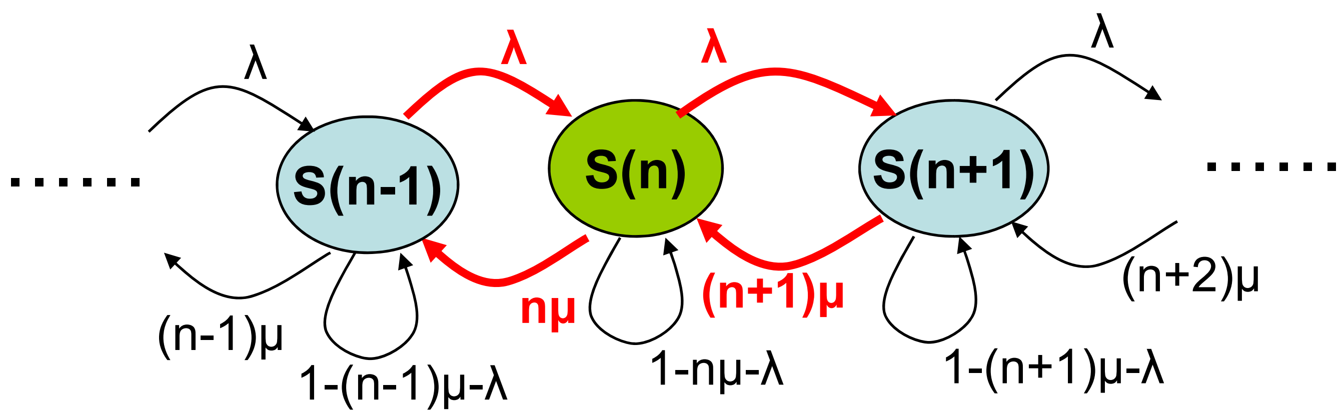
M/M/S/∞, e.g., 理想的な計算機

- 到着: 生起確率 λ の指数分布
- 処理: 消滅確率 nμの指数分布(nはプロセス数)
- 窓口数＝N (口)
- システム内数＝∞ (個)

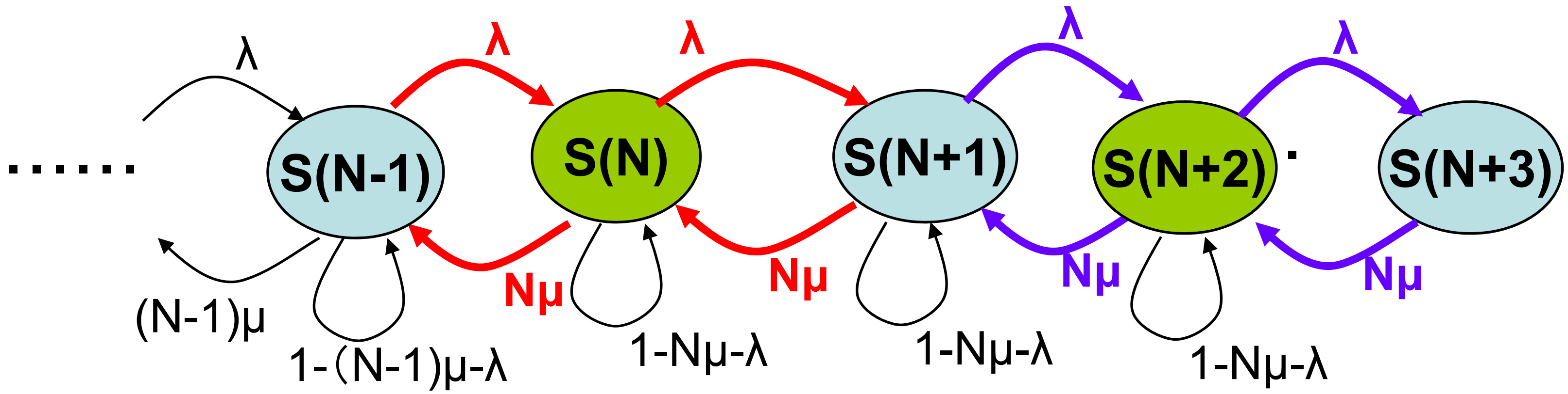
(*) 無限個のプロセスをQueuing可能。



$$\lambda \cdot P_0 = \mu \cdot P_1 \quad \text{(境界条件1)}$$



$$\lambda P_{n-1} - (\lambda + n\mu) P_n + (n+1)\mu P_{n+1} = 0$$



$$\Rightarrow \quad \lambda P_{n-1} - (\lambda + N\mu) P_n + N\mu P_{n+1} = 0$$

$$for \quad \forall n \geq N$$

$$\lambda P_n = (n+1)\mu P_{n+1}, \qquad (0 \leq \mathrm{n} < \mathrm{N})$$

$$\lambda P_n = N\mu P_{n+1}, \qquad (n \geq N)$$

なので、

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \qquad (0 \leq \mathrm{n} < \mathrm{N})$$

$$P_n = \frac{1}{N!\,N^{n-N}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \qquad (\mathrm{n} \geq \mathrm{N})$$

なお、

$$P_0 = \left\{\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \frac{1}{N!}\frac{1}{1-\lambda/N\mu}\right\}^{-1}$$