

1
幾何学における認識と行為

非ユークリッド幾何と時空

教理科学研究科

古田 幹雄

幾何学

① 平面空間の中の図形の学

↓
 (・ユークリッド 公理的方法
 ・デカルト 解析幾何学)

② 平面空間の構造 そのものの
 “本性”を問う

↓
 (・非ユークリッド幾何
 ・カウス、リーマン)

③ 構造から解き放たれた
“まっさらな空間”の概念

↓
 (・多様体
 ・位相空間, トポロジ)

④ 動的な空間像

④ 動的な空間像の例

- “空間自身”を切りほり、改変し、新しい空間を作る
- 空間の構造に“初期値”を設定すると、空間が自ら運動し、その行く末を見守ることからできる
(ペレルマンによるポアンカレ予想の解決)
- 空間を ∞ 次元にまで伸縮させ、“和”や“積”に分解すると、その背後に代数構造が見えてくる。
(代数的トポロジー)
- まったくな空間が自然に持つ構造が、深い性質を明かすことがある。

今日は....

- 球面幾何と非ユークリッド幾何
- シンコフスキー空間
- 多様体と位相空間

(特殊相対性理論)

① 平面・空間の中の図形の学¹

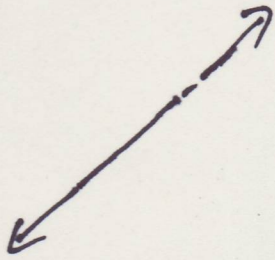
--- ユークリッド幾何 [論証]

(1)



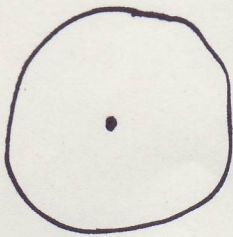
異なる2点を結ぶ直線
が唯一存在する。

(2)



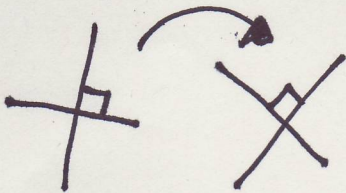
直線はいくらでも(無限に)
延長可能である。

(3)



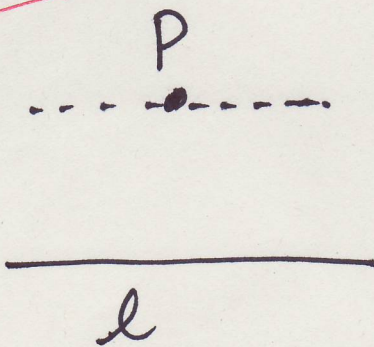
中心と半径を与えると、
円を描くことができる。

(4)

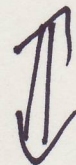


直角は互いに合同

(5)



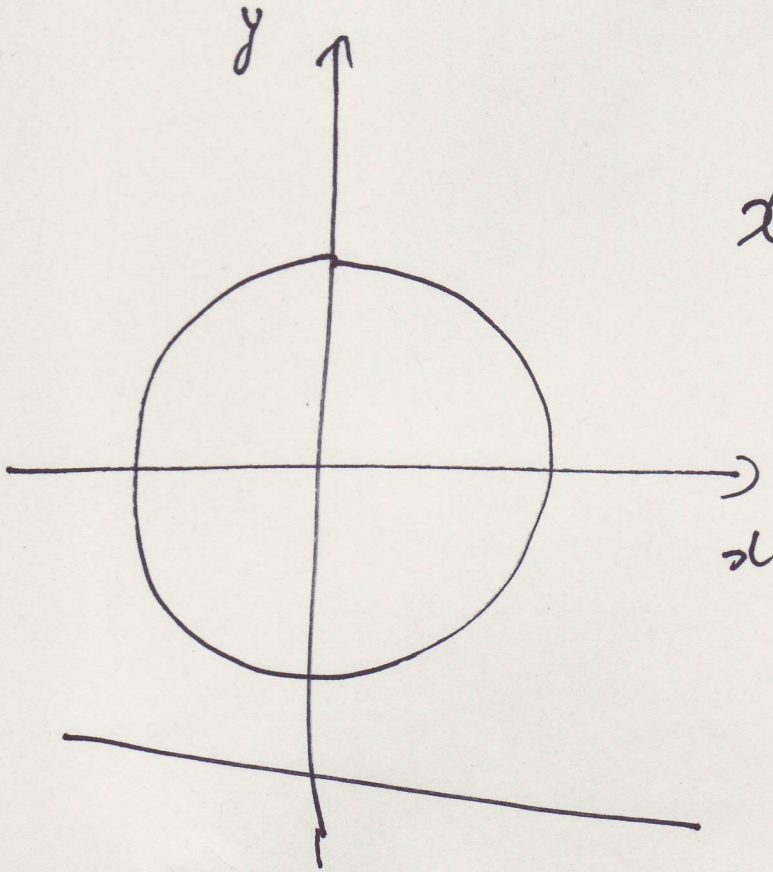
[平行線についての命題]



「 l と平行」で P を通る
直線が唯一存在する。

① 平面・空間の中の図形の学” 2

--- 解析幾何学 [代数的計算]



$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots \text{円}$$

$$ax + by + c = 0$$

--- 直線

・ 平面上の点を座標 (x, y) を用いて表示する。

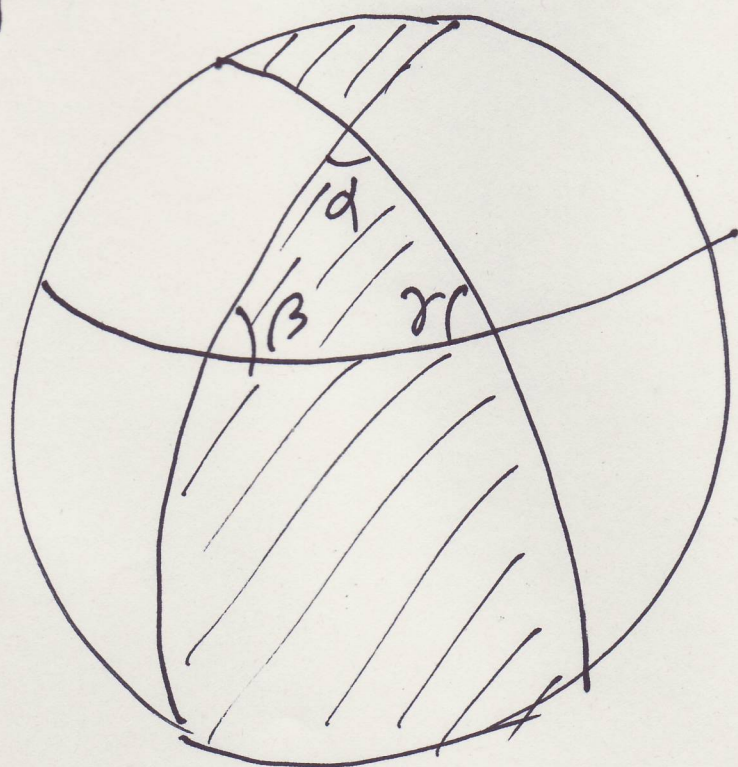
・ 空間の点であれば (x, y, z) 。

球面上の幾何学

... ユークリッド幾何, 解析幾何を用いて
展開することからできる。

例

半径 r の球面



球面三角形の
面積は?

$$\uparrow \frac{2\alpha}{2\pi} \times 4\pi r^2 = 4\alpha r^2$$



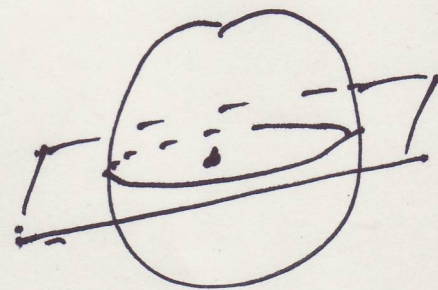
$$= \frac{4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 4\pi r^2}{4}$$

$$= \boxed{(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot r^2}$$

問 球面幾何は「非ユークリッド幾何」か?

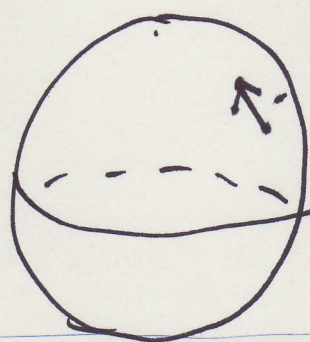
「直線」「長さ」「角度」を次のように
みなすとはどうだろうか?

・「直線」 := 大円 即ち.



原点を通る平面 $\cap$ 球面

・「(微小な)長さ」



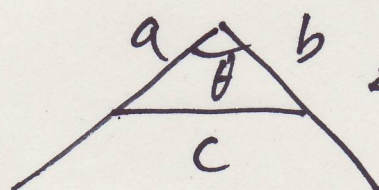
$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

普通の長さ

$$\text{長さ} \doteq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

・「角度」

普通の角度



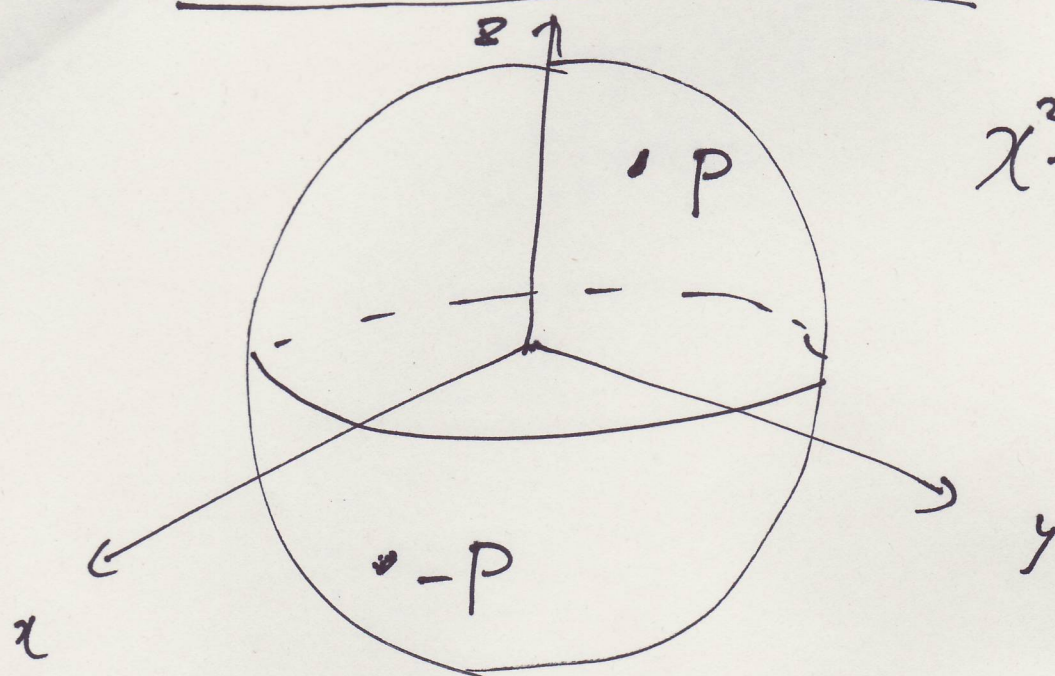
← 微小三角形

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

問題点 1

相異なる「直線」の交わりは、
高々 1 点であってほしい。

しかし、2 点で交わってしまう!



$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

解決方法 $\wedge^0 \mathcal{P} \{P, -P\}$ を「1 個の点」と定義しなおせばよい!

$\Rightarrow$ 射影平面 $:= \{ \{P, -P\} \}_{P \in \text{球面}}$

問題点 2

10

「有限の直線」をいくらでも、

無限に延長できてほしい

しかし、ぐるりと回って戻ってきてしまう!

球面幾何は、(遅くとも) 18世紀後半にはよく知られていた。

(地図図法、球面天文学等)

しかし、それが「非ユークリッド幾何」

として理解されなかった。

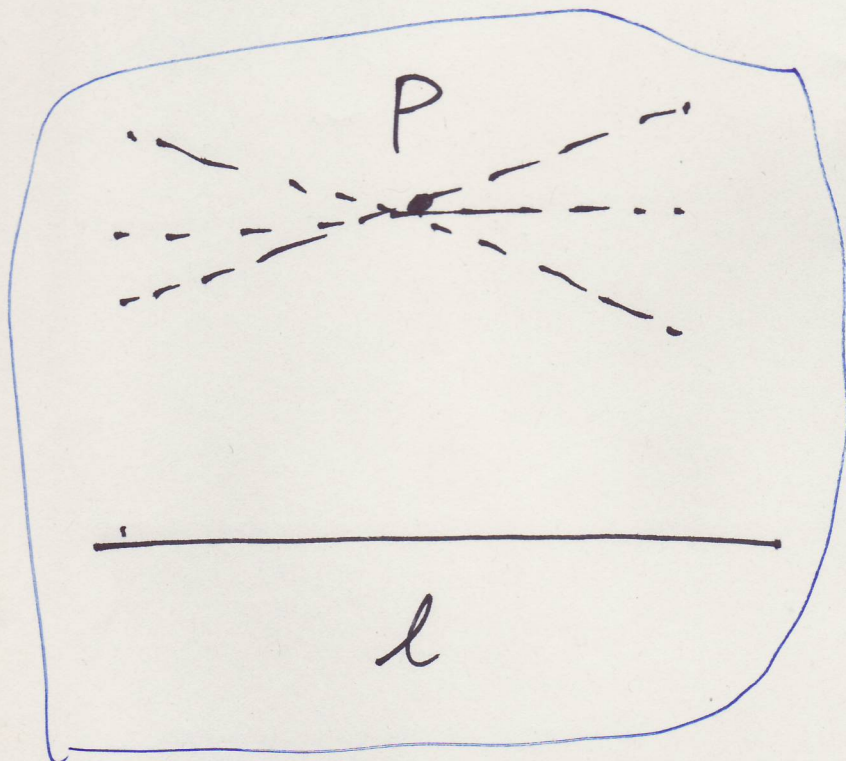
これは、上の「問題点 2」のためで

ありと知られる。

非ユークリッド幾何

11

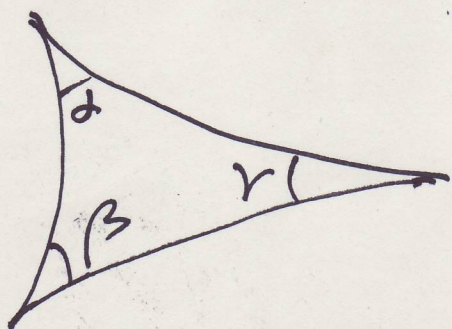
19世紀 (ロバチェフスキー、ボヤイ
 Gauss



lと交わらず:
Pを通る直線が
2本以上(無限本)
存在すると仮定する。

そのような世界でも、正弦定理、余弦定理
の類似が証明され、独自の幾何学が
展開されることか認識された。

例



$$\propto \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

ガウスの洞察

・現実のこの世界が、

(ユークリッド幾何に従うのか?
非ユークリッド幾何に従うのか?)

・それは、頭で考えることによって解決できない。

・実験によって、どちらが正しいのか、
決定しなくてはならない!

[ガウスは、3個の山を結ぶ
巨大な三角形の測量によって、
これを実際に試みた。]

球面幾何をあらためてふり返ると...

(1) 問題となっていた、

「直線の無限延長可能性」
を忘れば、ガウス達によって
発見された非ユークリッド幾何と
そっくりパラレルな体系と考えられる。

(2) 球面幾何のための **球面** は、

現に目の前にある。(地球、天球)

しかし、ガウス達の発見した非ユークリッド
幾何に、そのような「目の前のもの」は
どこにもなかった!

—— 高度の抽象的思考力の賜物。

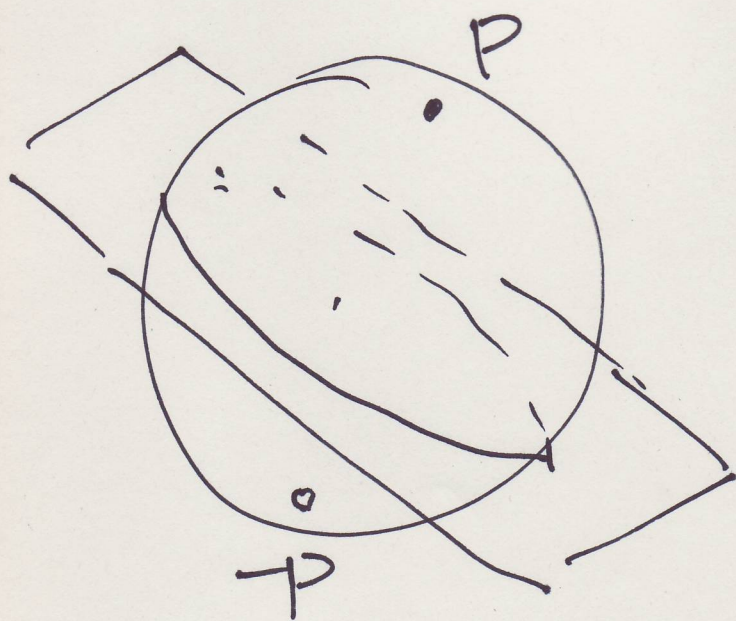
...後に、非ユークリッド幾何の

「モデル」が発見された！

(グライン, ホッペンカシ ---)

その「モデル」の説明のために、

まず 球面幾何を見直してみる。



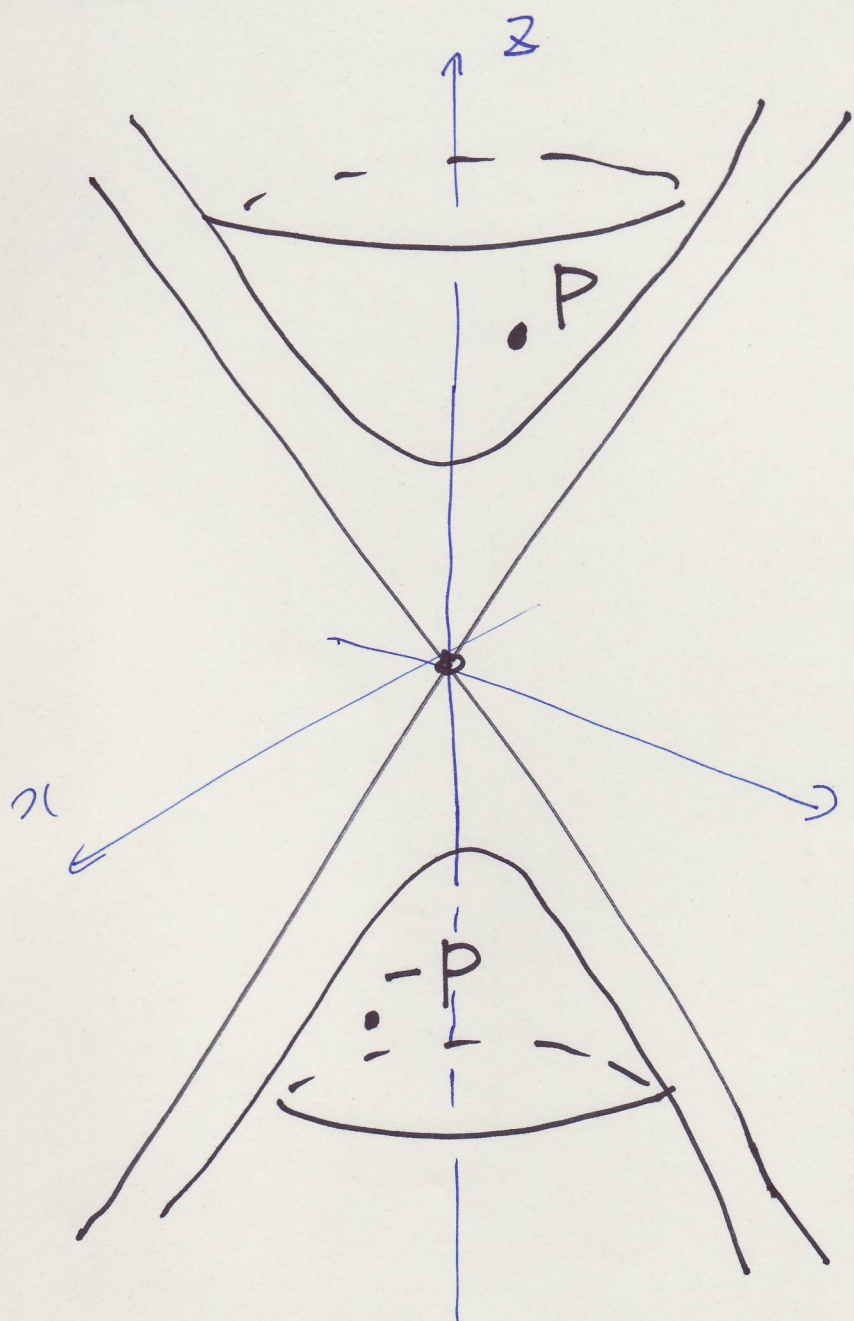
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

「点」 = $\{P, O\}$

「直線」 = 原点を通る平面 $\cap$ 球面

「微小距離」 = $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$

非ユークリッド幾何のモデルのひとつ 15



$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$

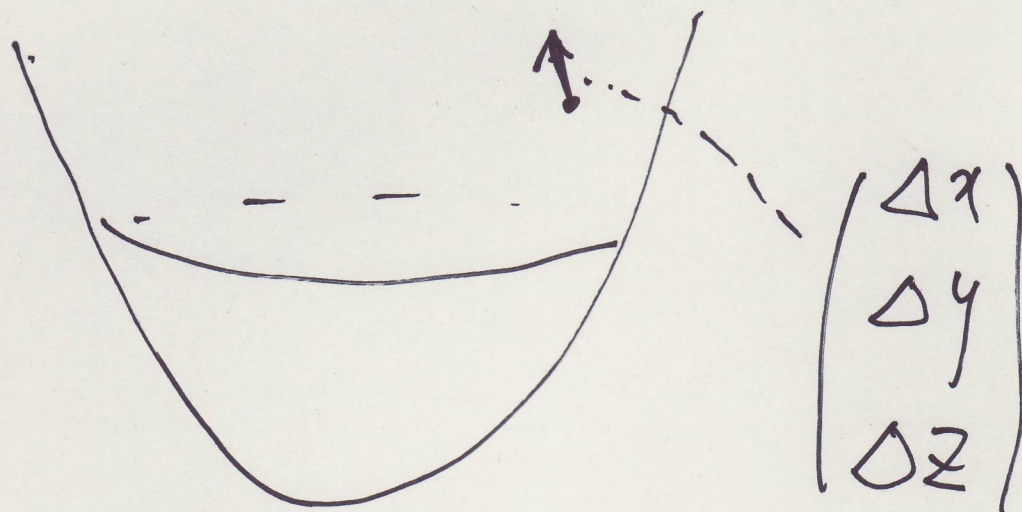
二葉双曲面

「点」 = 1° $\{P, -P\}$

「直線」 = 原点を通る平面 $\cap$ 双曲面

距離をどう定めますか?

16



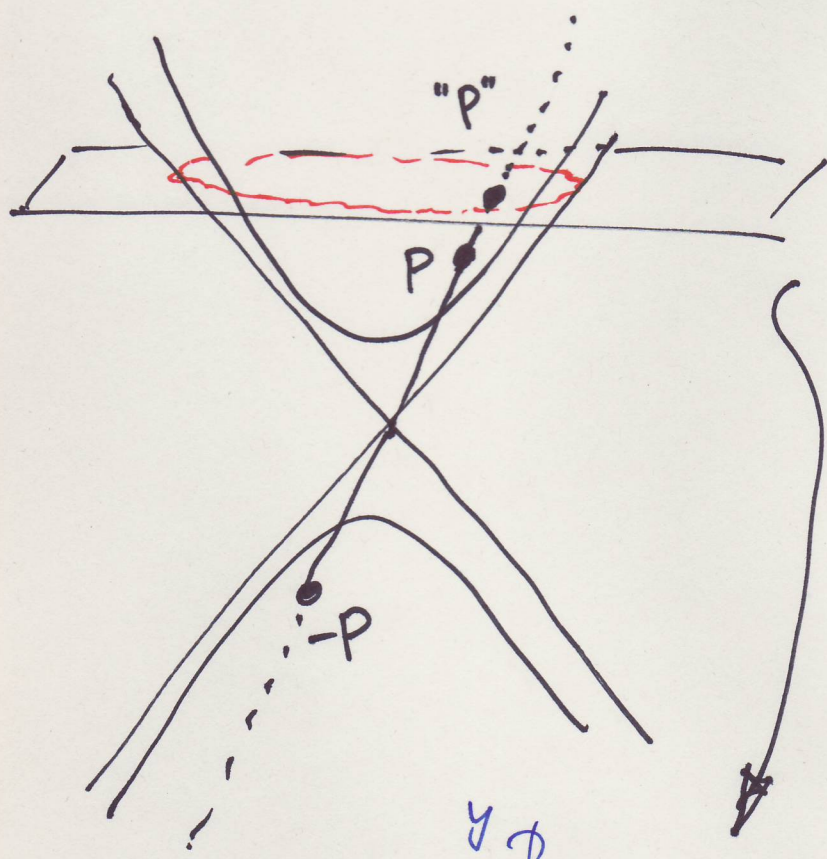
普通の $\mathbb{R}^3$ の
距離とは異なる!

$$\text{微小距離} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+\Delta x \\ y+\Delta y \\ z+\Delta z \end{pmatrix}$ が双曲面上なら $\sqrt{\quad}$ の中は正.

原点を通る直線によつて.

平面 $z=1$ に射影すると...



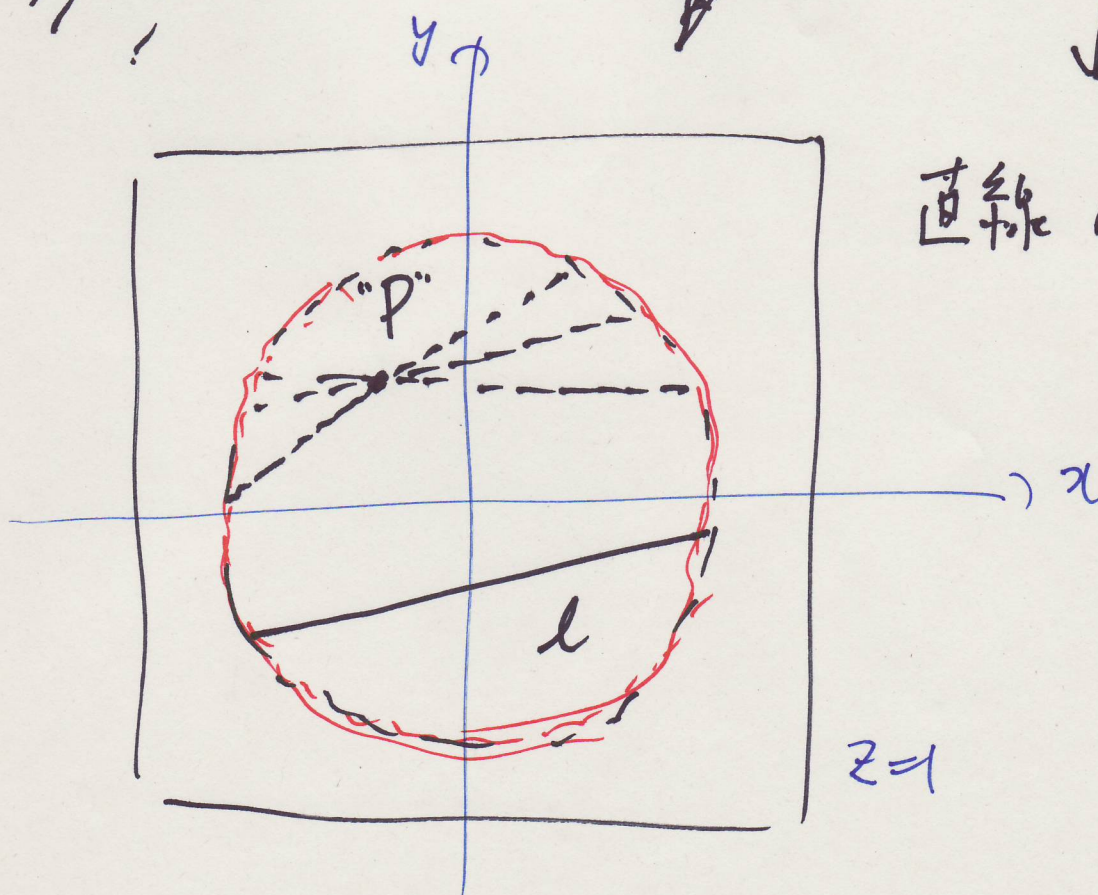
「直線」

||

原点を通る平面の双曲面

射影

直線 $\cap \{x^2 + y^2 < 1\}$



球面幾何の場合

球面のどの2点も「対等」であり、
適当な回転によって移りあう。

球面の回転のやり

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos \theta & -\sin \theta \\ & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(1) 方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を保つ

(2) 「直線」を「直線」にうつす

(3) 微小距離² = $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ を保つ



$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

非ユークリッド幾何の「モデル」について

双曲面のどの2点も「同等」であり
適当な「回転」によって移りあう

「回転」の例

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cosh \tau & \sinh \tau \\ & \sinh \tau & \cosh \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- (1) 方程式 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ を保つ
- (2) 「直線」を「直線」にうつす
- (3) 微小距離² $= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ を保つ

$$\therefore -\sinh^2 \tau + \cosh^2 \tau = 1$$

$$\left(\sinh \tau = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2}, \cosh \tau = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2} \right)$$

非ユークリッド幾何の無矛盾性

- ロバチフスキー、ボヤイ、カウスの以前にも、「平行線の公準」が不成立と仮定して、論理的帰結を考察する試みがあった。(18世紀後半、サッケーリ、ランベルト等)
- しかし、その試みの目的は矛盾を導くことであった。
- ロバチフスキー、ボヤイ、カウスは、「矛盾を導けないことを証明したわけではない。」しかし、そこに新しい幾何学が成立しているという決定的な洞察があった。
- 解析幾何学的モデルの存在によって、非ユークリッド幾何学の無矛盾性は解析幾何によってユークリッド幾何のそれと帰着する。

その後

次の、2つの(独立した)事柄に
注目したい。

ア

$\mathbb{R}^3$ を忘れ、

双曲面 or 球面 自体に注目。
その方向 --

イ

$\mathbb{R}^3$ に導入された

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

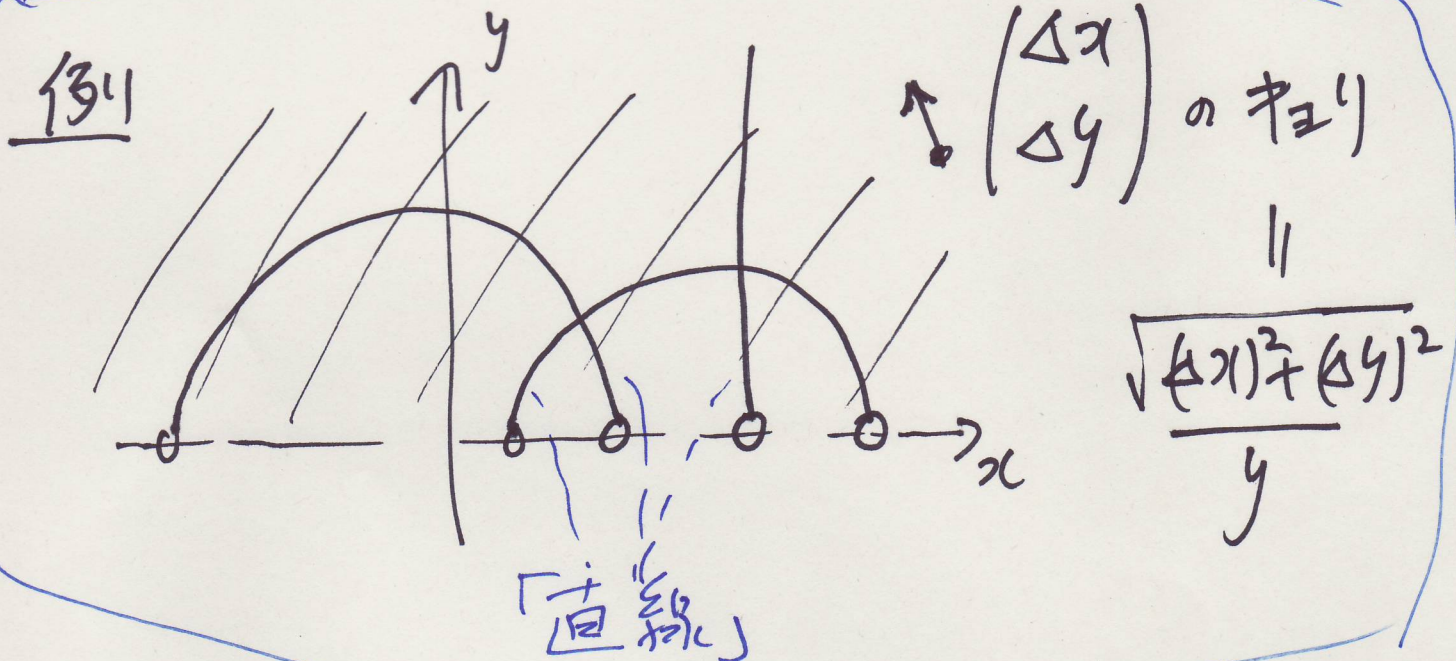
に注目する方向..

以下 . 順に説明したい。

① 外を忘れ、“空間” 自体に注目せよ!
 (双曲面 球面)

(ガウス、リーマン ...)

非ユークリッド幾何のモデルは
 一通りではない。

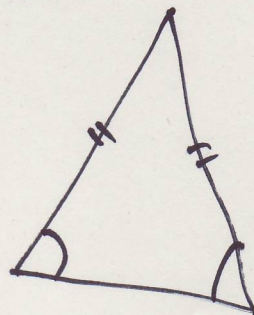
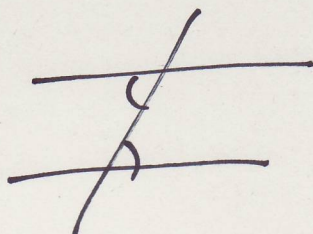
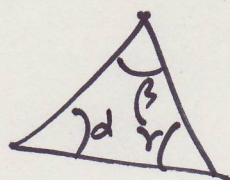


モデルはモデルにすぎず、やはり
内在的な幾何学がそこにあると
 考える思考の自由度をさらに展開できる。

→

(非)ユークリッド空間の内部に.

様々な幾何学的現象
現象



人はそれらを動かしたり
分割したり、合わせたりできる。

[非ユークリッド空間は、いわば背景.]

古典的幾何学像

飛躍

背景として、幾何学的現象を支える
現象

(非)ユークリッド空間自体が、様々な
可能性を持つ。

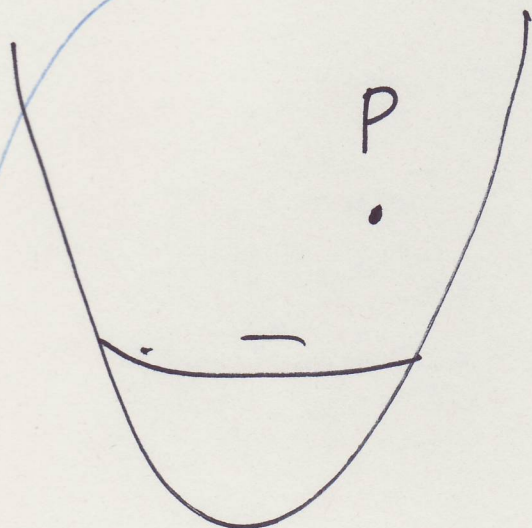
人は、その「空間自体」を動かしたり
分割したり、合わせたりできる

新しい幾何学像

「空間自体」という物の見方について

24

思い出すと

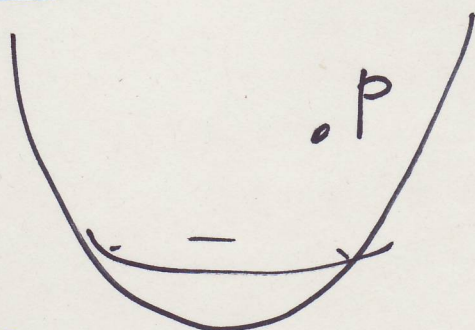


$\Lambda^0 P \{P, -P\} \Sigma$

uとつゝ「点」と思う

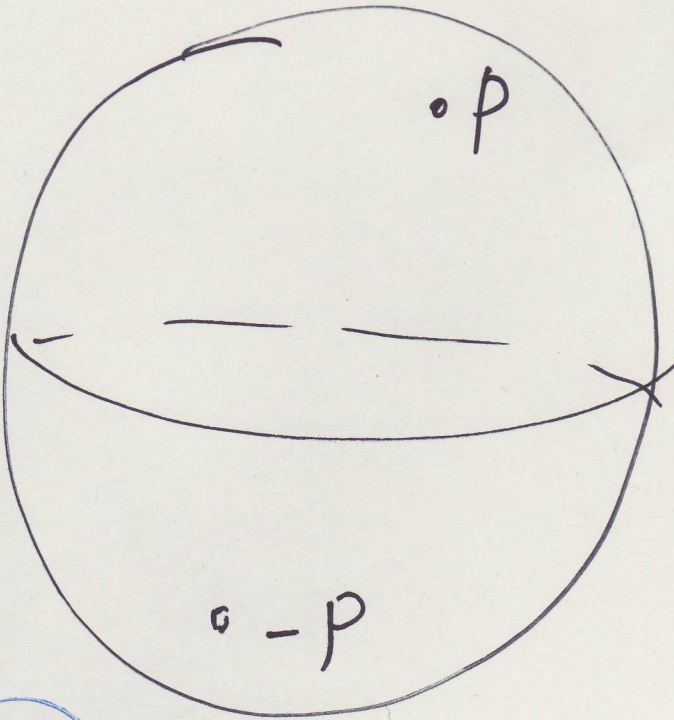


⇕ 同等



P か uとつゝ点

(素直に)



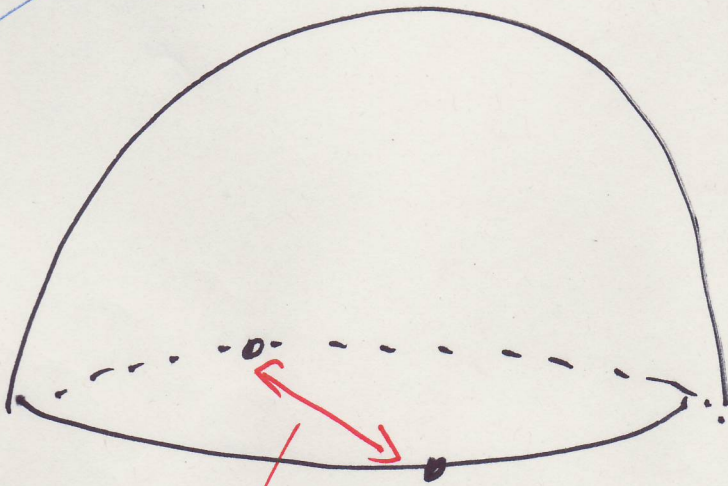
$\wedge^0 P \setminus \{P, -P\}$ を

ひとつの「点」と

思う

厳密

⇕ 同等



同一視

半球の境界に

おいて、

向かいあった

2点を

同一視に

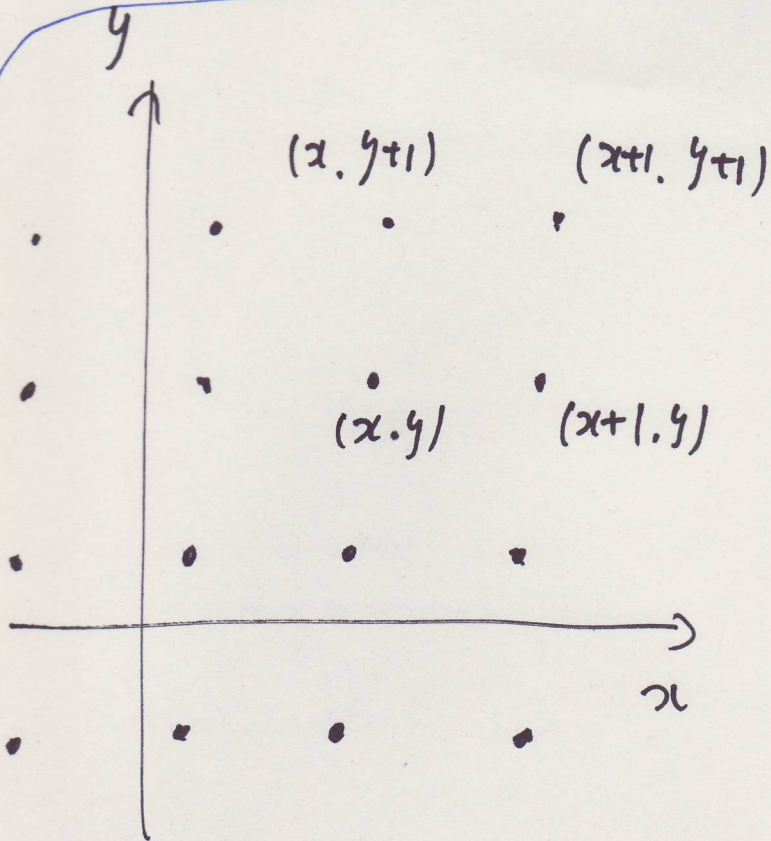
はりあおせた

ものを考える。

直観的

(厳密化可能)

似た例(1) — トラス



各 (x, y) に対し

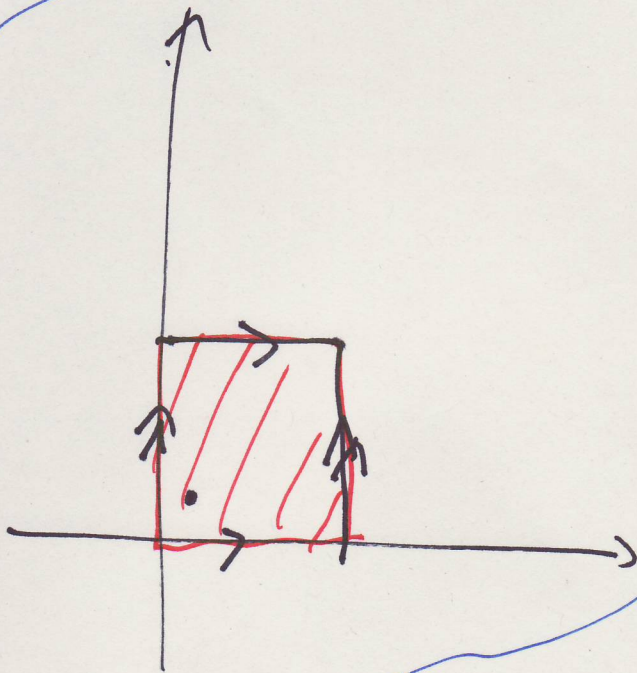
集合

$$\left\{ (x+n, y+m) \mid \begin{array}{l} m, n \\ \text{整数} \end{array} \right\}$$

をひとつの「点」と

思う

⇔ 同等



正方形の対辺を
各は同一視して

はりあせられた物

を考えろ。

直感的

(厳密化可能)

似た例 (2) グラスマン多様体

27

$\mathbb{R}^4$ の中の すべての

「2次元部分ベクトル空間」

の可能性全体の集合を $Gr_2(\mathbb{R}^4)$ とおく.

$Gr_2(\mathbb{R}^4)$ の 「点」 とは、ひとつの

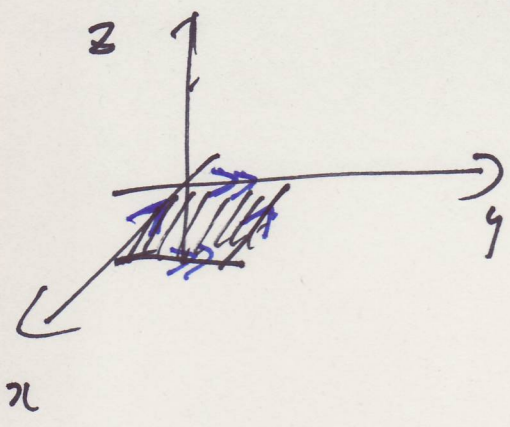
「2次元部分ベクトル空間」

である。

(注 $Gr_2(\mathbb{R}^4)$ は 「4次元多様体」

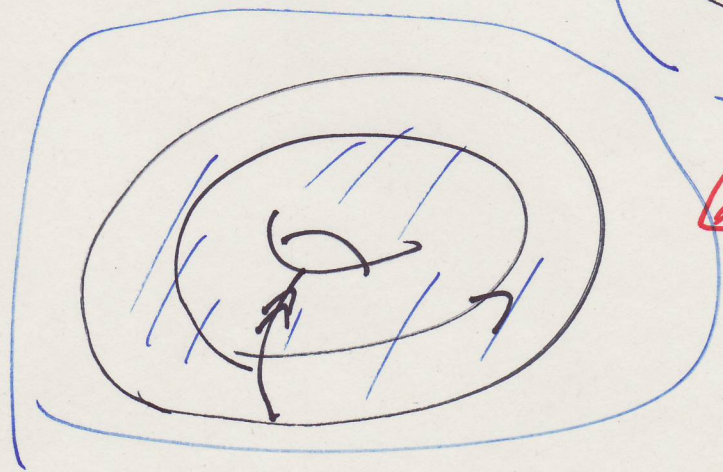
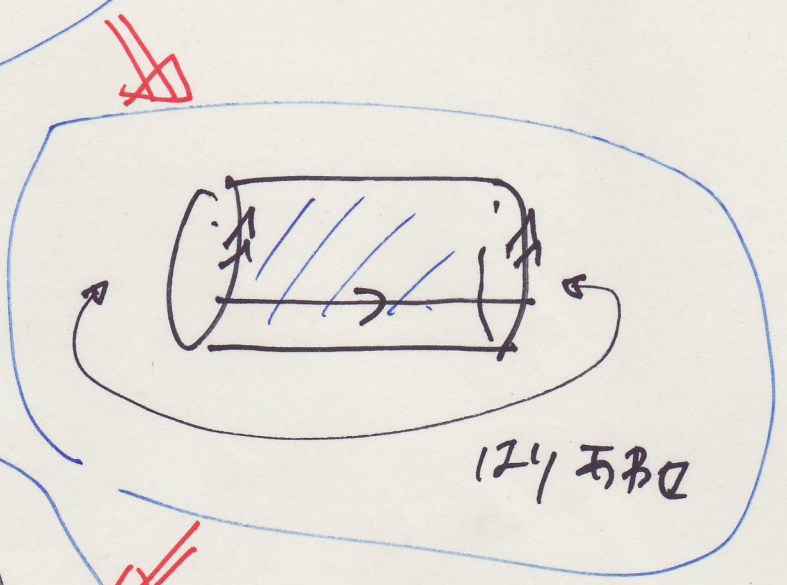
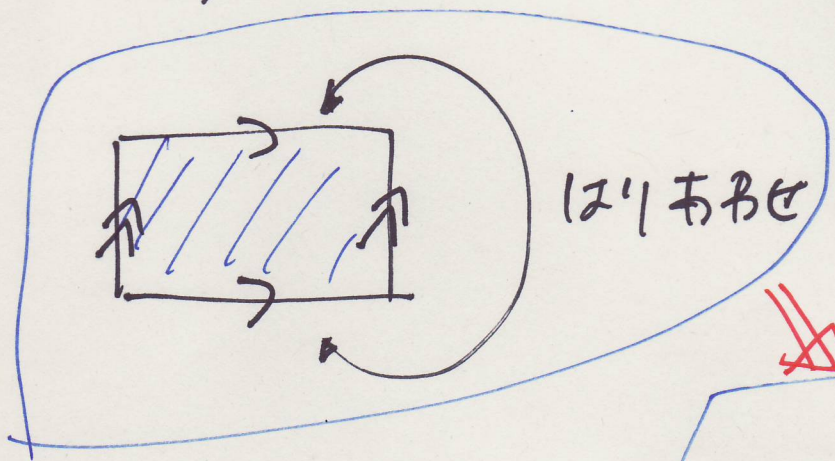
であることが知られている.

トラスの説明における「はりあわせ」について



正方形を左のように
空間の中に置いたら

次のように正方形を伸縮させて
「はりあわせ」を空間内で実現できる



- 「はりあわせ」は、正方形が、空間 ($\mathbb{R}^3$) の中におかれていず時には、ゴムのように正方形を伸縮させれば“物理的に”可能である。
- 1つ $\{(x+n, y+m)\}$ をひとつの「点」と思う、という操作のためには空間 ($\mathbb{R}^3$) は必要とされない。
- グラスマン多様体においては、
外の空間というものがそもそも自然には存在しない。

⇒ 抽象的かつ自由な
 { 位相空間
多様体 } の概念の必然性

多様体とは何か

30

n 次元
多様体

位相空間^{*}であって、

各点の近くが、

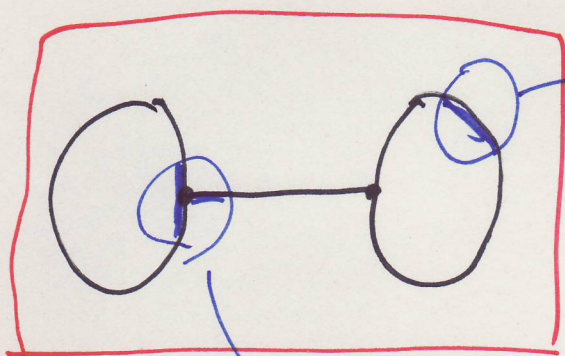
n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の

厚点の近くと 同じ形^{**}で

あるもの。

また
説明に
いない

1次元多様体でない例



これは $\mathbb{R}^1$ の厚点の
近くと同じ形

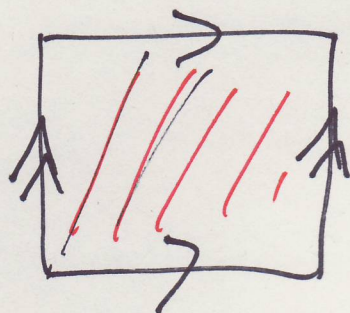


これは $\mathbb{R}^1$ の厚点の近くと
同じ形ではない

* ハウスドルフ・ハウスドルフ位相空間

** 同相

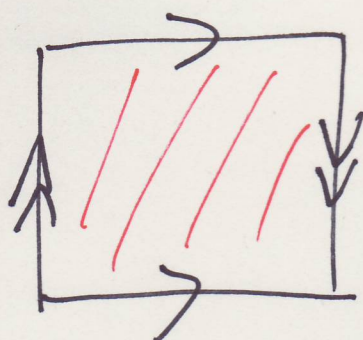
2次元多様体の例



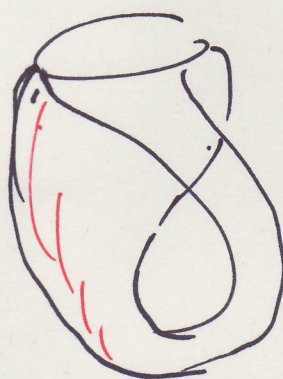
12



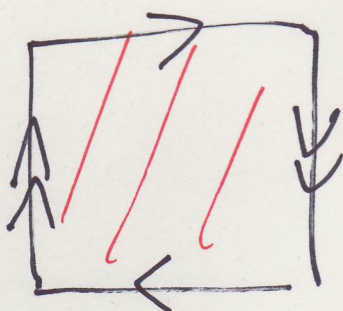
トーラス



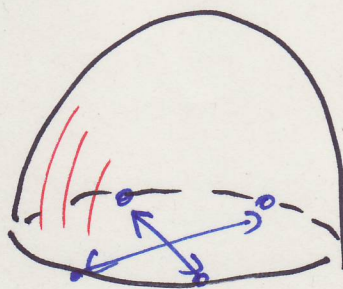
17



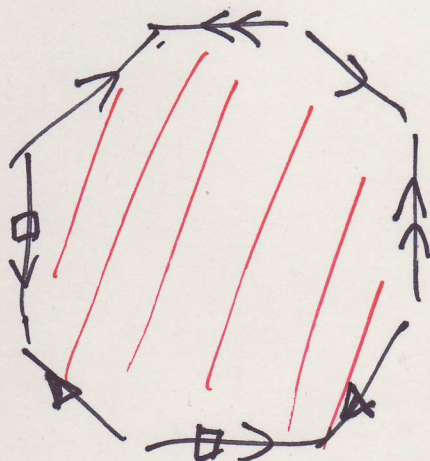
クラインの壺



12



射影平面



11



位相空間とは何か

集合 X が位相空間であるとは、

X の各部分集合 A に対して、直観的には

「 A と、 A の境界の点をすべておさえた物」
に相当する集合 $\overline{A}$ が付随しており、
対応 $A \mapsto \overline{A}$ が次の公理^{*}を
みたすことである

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \overline{\phi} = \phi \\ \textcircled{2} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \textcircled{3} \quad \overline{A} \supset A \\ \textcircled{4} \quad \overline{\overline{A}} = A \end{array} \right.$$

(^{*} 様々な同値な公理系がある。「開集合」を使うなど)

位相空間の例には、幾何学だけでなく、代数学、数論、解析学、など、広範な分野にあたって多くのものがあり、重要な役割をはたしている。

現代数学において、「位相空間」の概念は、言葉として不可欠である。

—— 丁度 ベクトル空間の概念が
 そうであるように。

⑦ 外を忘れた空間自体に
 注目せよ！

の終り、

① $\mathbb{R}^3$ に導入された

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

↑!!

思い出すと

普通の距離

$$(\text{ホリ})^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

このことを

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

と略記する

「計量」

距離もどき

$$(\text{ホリモドキ})^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

このことを

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$$

と略記する

$\mathbb{R}^3$ 内ではマイトスになり得る。

「計量」
 [キヨリモトキ] は、実在の距離とは
 無縁な虚構のようにも見えるであろう。

1か1. アインシュタインの特殊相対論に
 よると、

{ 時間 t (単位 秒)
 空間座標 x_1, x_2, x_3 (単位 光秒)

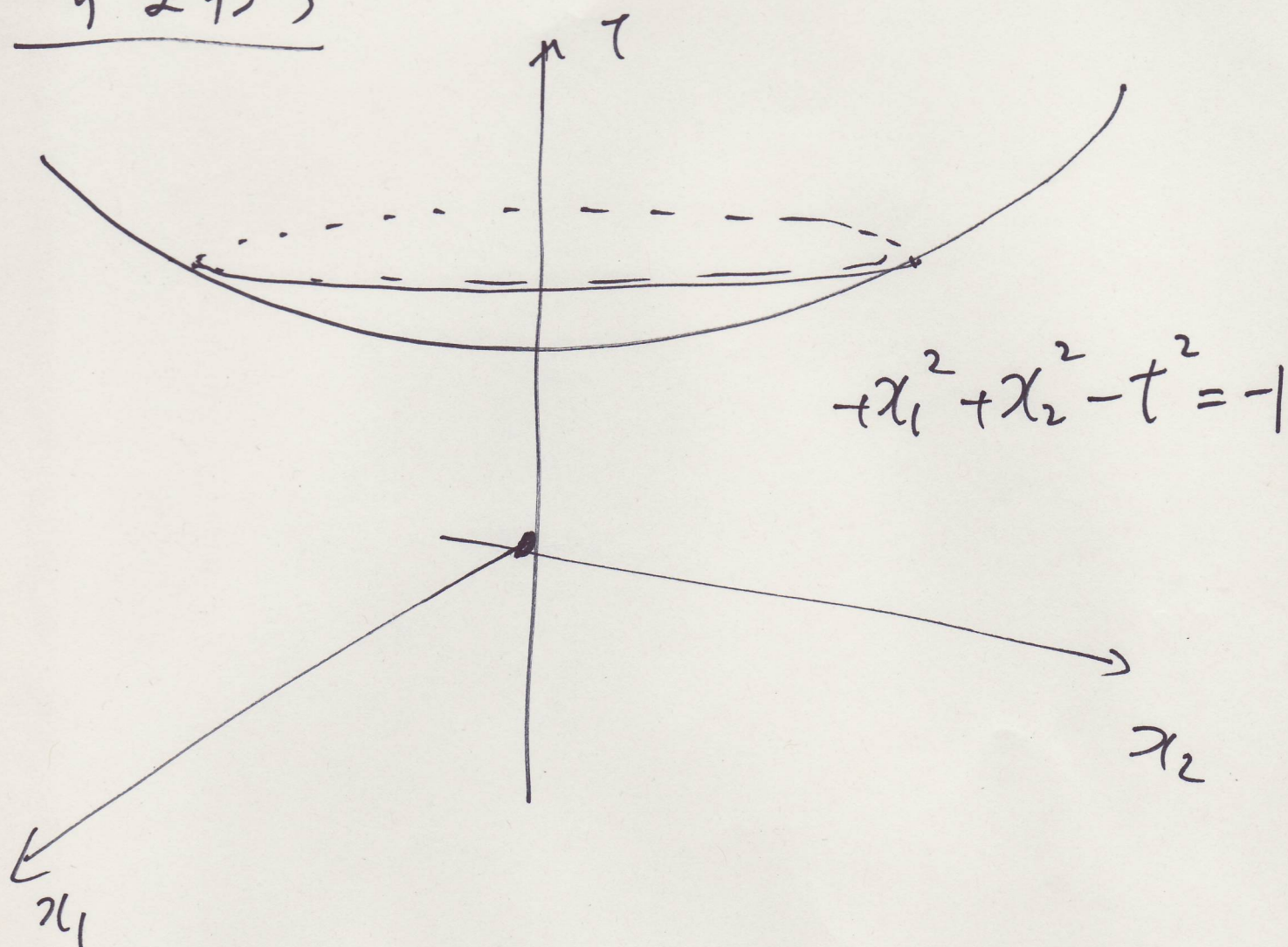
に対して

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2$$

が 物理的に意味のある数である。

$\sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2)}$ は、
 物体の固有時の経過をあらわす

すなわち



$t=0$ において原点から出発し、
様々な方向に進み、

「その動いている者にとって固有時が
1 秒経過した時刻と位置」

をプロットすると、上のような

“双曲面”になる。($x_3=0$ といった
面をかけた)

x_3 も書くなり

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = -1$$

↑ 光速度

この「3次元空間」の上での

物理的な、実在の距離は、

(特殊相対論の下で)

非ユークリッド幾何の距離に他ならない

この意味で、非ユークリッド幾何は、

球面幾何のように、我々の目の前に

実在する、といえる。

① の終り

まとめ

- ア : モデルを離れて、
空間自体を考察し、
様々な可能性を考えよう自由
- イ : そうした自由な思考の産物が、
想像力を越えた現実の把握に
思いかけず有効な場合がある。

次回、次々回は、その「自由な思考の産物」
の内幕に、少しわけ入ってみたい。

Appendix : 余談

特殊相対性理論 と 時間^{*}の“力学的定義”

時空^{*}に、いくつかの種類^{**}の粒子^{**}が

とびかっているとしよう。それらは、

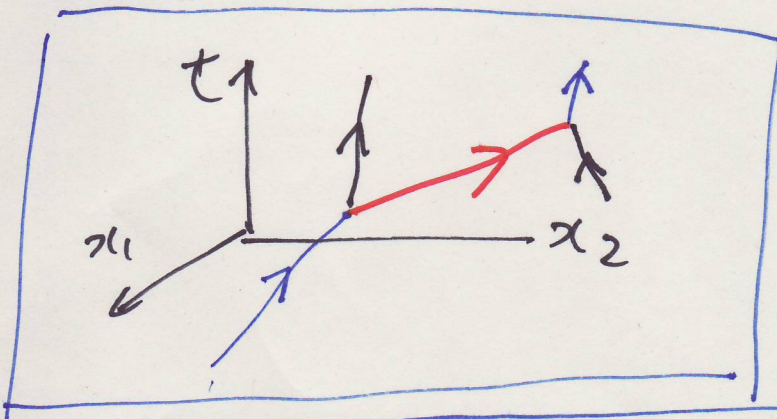
分裂したり衝突したりしている。

少し離れると、“力”を及ぼすとはなる。

これらの粒子の有様をビデオ(?)で

記録にとり、分析した結果、次の

「保存則」が発見された --- と考えてみたい。



* 時空は affine と仮定する。

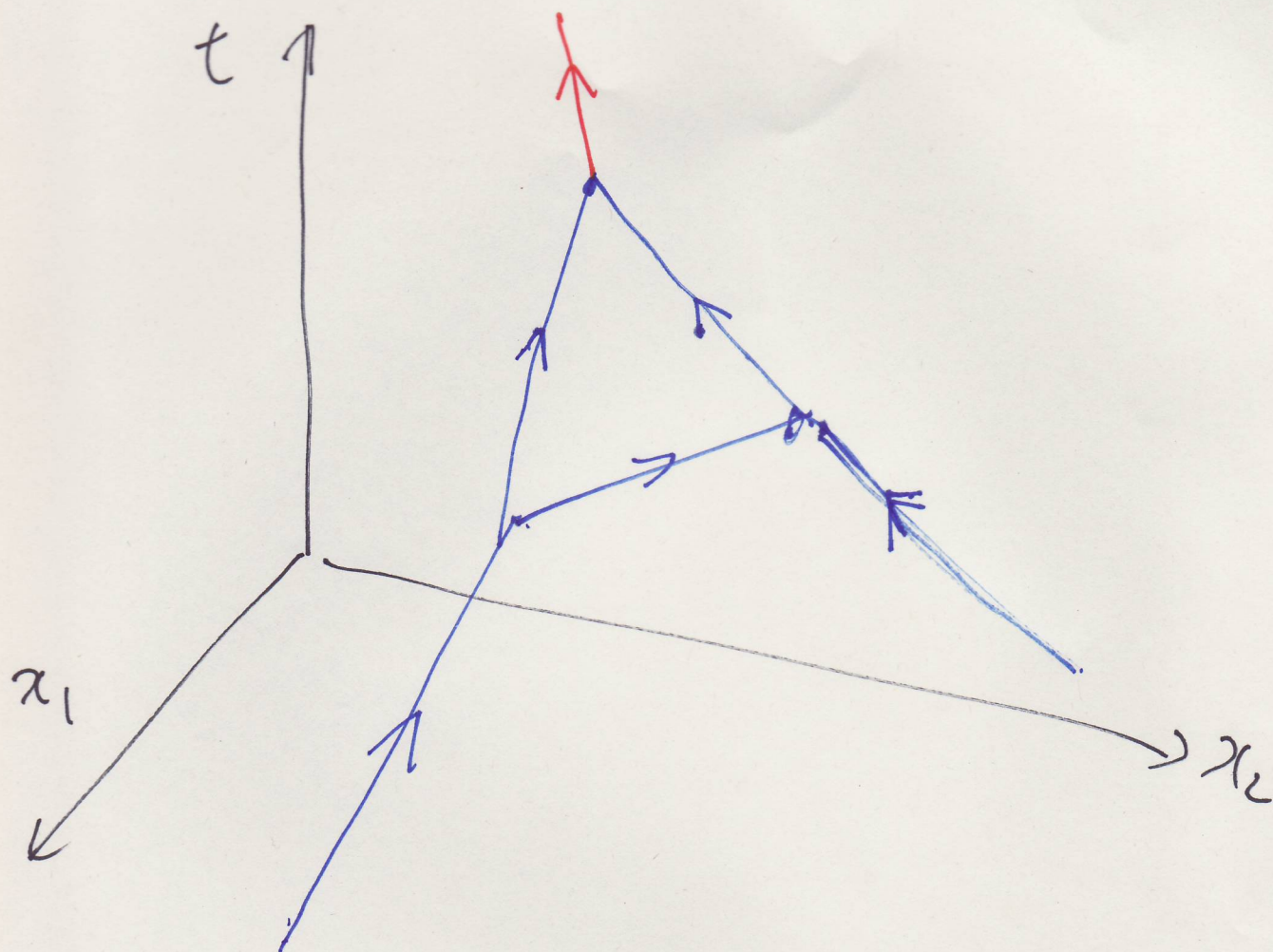
** 「同一種の粒子」の存在が以下の議論で使われる。

保存則

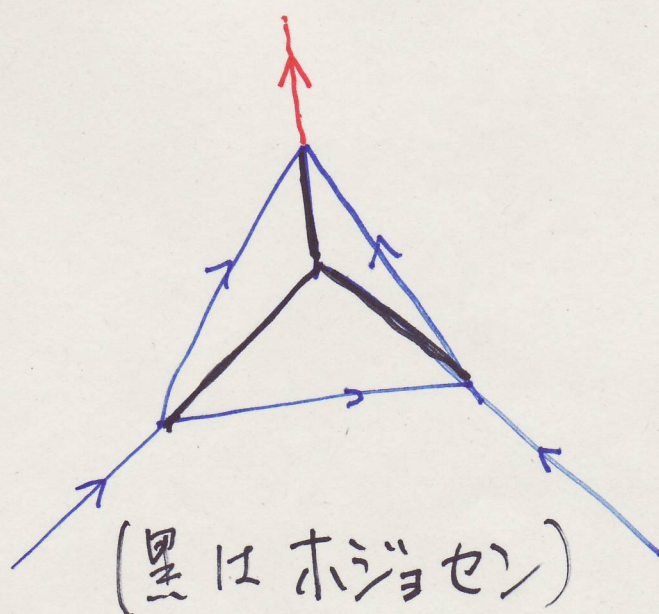
- ① どの運動する粒子にも、「時空の軌跡」に沿ったベクトル $\begin{pmatrix} m \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ が付随している。
- ② 衝突分裂に際して、
それらのベクトルの和は保存する

問 上の保存則は意味があるだろうか？
つまり、実験によって反証可能だろうか？

答 Yes. 上の保存則を用いると
次のような「予言」ができる。
その「予言」が成立するかどうかを
チェックすればよい。

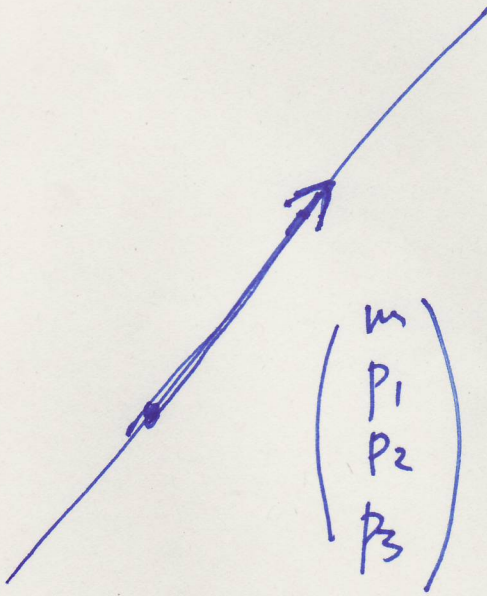


青の軌跡が既知とすると、赤の軌跡は
次のように予言できる。



- この保存則が成立するという前提を置く。
- すると、ベクトル $\begin{pmatrix} m \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ は、この保存則によって

規定される「物理的意味」をもつ。^{*}

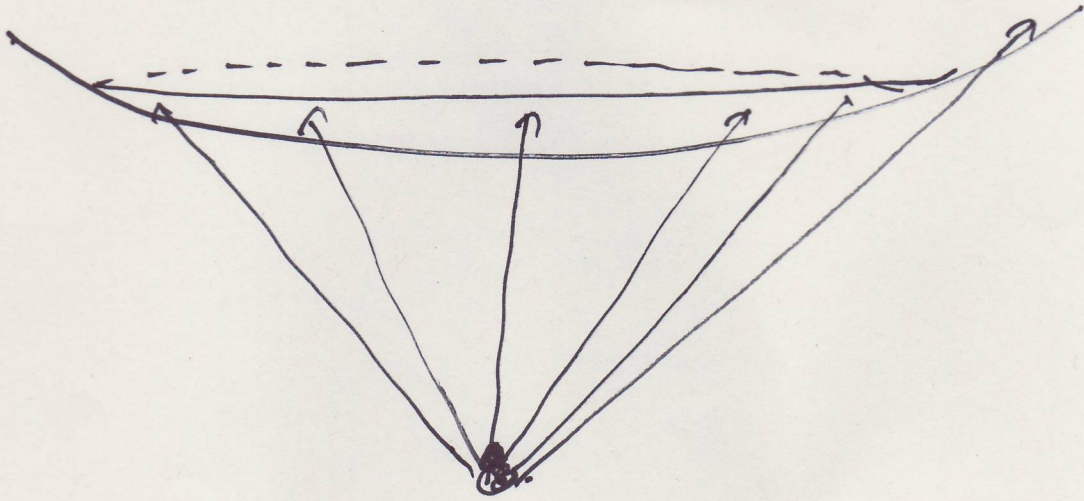


ある「種類の粒子」^{**}が
様々な方向に運動に
いる状態を考える。

この時、(この種類の粒子を
使って、「固有時の定義を
次のように置く。

定義 このベクトルの長さが固有時の経過 = 1 に
相当する、とに固有時の測り方を定義する。

^{*} overall の constant の不定性はある。これは固定
^{**} 例えは電子のようなものが念頭に^{ある。}



- ・ 時空の一点から様々な方向にその粒子を放ち、固有時の経過 = 1 の (時刻, 位置) をプロットする (上図.)
- ・ 適当な等加速度の仮定の下で、上のプロットされた起曲面が、2次超曲面 (あるいは超平面) であることを (数学的に) 示すことができる。

参考 ... $\vec{v}_{-1}, \vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots$ が $\vec{v}_k = \lambda(\vec{v}_{k-1} + \vec{v}_{k+1})$
 をみたす時、これらのベクトルの終点は、すべて
 ひとつの 2次曲線の上に乗っていることが示される。

この超曲面が双曲面の時には、

(適当な等方性の仮定と、いさべき座標のとり方の下で) その方程式は、

お普遍定数
(光速)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = -c^2 t_0^2$$

と置くことができる。 (t_0 = 単位時間)

固有時の定義にもとづいて、この式は

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - c^2 m^2 = -c^2 m_0^2$$

(m_0 : 粒子固有の定数)
(静止質量)

と同値である。

前者は特殊相対論の幾何の要であり、

後者は特殊相対論の力学の要である。

即ち、固有時の「力学定義」*の下で両者は同一の主張となる。

* その固有時の定義が、諸々の物理現象を測定する際の
まさに固有時としてふさわしい性質をもちことは相対性原理
の下で示される。

結論

「計量」といふ

- ・ 時空の 相対性 $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2$ は、
時空の上の「保存則」等の現象と不即不離の
関係にあるといふ。

- ・ 純粋数学の幾何学においても、
もとより 相対性 が定義されているとは
見えなかった空間に、自然に
「計量」が 相対性 が誘導される
状況が、時々ある。

- ・ そのような時、その 相対性 は、対象となる空間の
本質的な何かを、目に見える形で私達に
示しているとも考えられる。