

1

幾何学における分析と総合

— 双対性 あるいは鏡の中の自己 —

古田 新雄

前回

① 想像力, 構想力, 論理的可能性の

自由な行使

——「幾何学」の「現実の宇宙 / 実用」からの解放

② 現実が想像力を越えるような事態に

直面した時, ①が期せられて

有用である場合がある。

①	②
非ユークリッド幾何のモデル	特殊相対論の幾何
リーマン幾何	一般相対性理論

(参考文献: アインシュタイン「レクチャーズ・オン物理」
東大出版会)

補足

外部のより「空間自体」の概念への契機

→ トポロジー、多様体 etc.

① 非ユークリッド幾何

(ロバチフスキー, ボヤイ, ガウス)

② リーマン幾何 (← ガウスの曲面論)

(ガウス ... リーマン)

・ 歴史的には、①よりも②が大事か、下。

・ 特に、②における「曲率」の概念。

参考文献 「リーマン—人と業績」

ラウアー・ガイッツ著 山本敦之訳

シュプリンガー・フェアラーク東京

概念の出会い

- ✱ ある分野の概念. その見方が
他の分野において期せられて.
本質的な役割を果たしている / 果たし得る.
とわかることがある.

● 数学と物理

(先の ②. ①, 複素数の量子力学における役割)
etc

● 物理の中において

(統計力学と場の量子論の形式的類似性)
(保存量, という概念 etc)

● 数学の中において

(素数と測地線の類似性 etc)
(砂田利一)

cf 数学が「実用性」と出会うこともある.

e.g 数論と暗号理論 (cf「極」)

今日

5

数学において、代数、幾何、解析を
横断して、響きあえるように出現する、ひとつの
ものの見方を紹介する。

双対性

duality

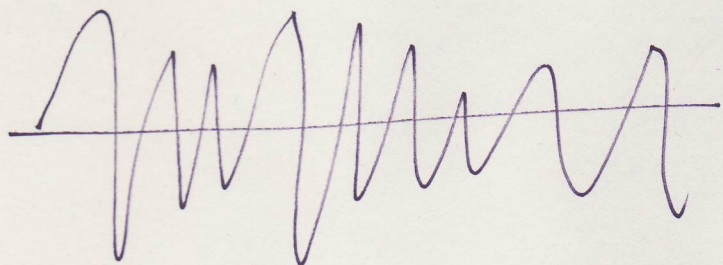
特に、多様体の幾何学において
その現れ方を見たい。

- ・ ホップンカレ 双対性
- ・ 接ベクトルと余接ベクトル
- ・ ド・ラームの定理

双対性とは?

6

(1) 光の波の2通りの表示方法



電磁波の波形

↓ フーリエ展開 フーリエ変換

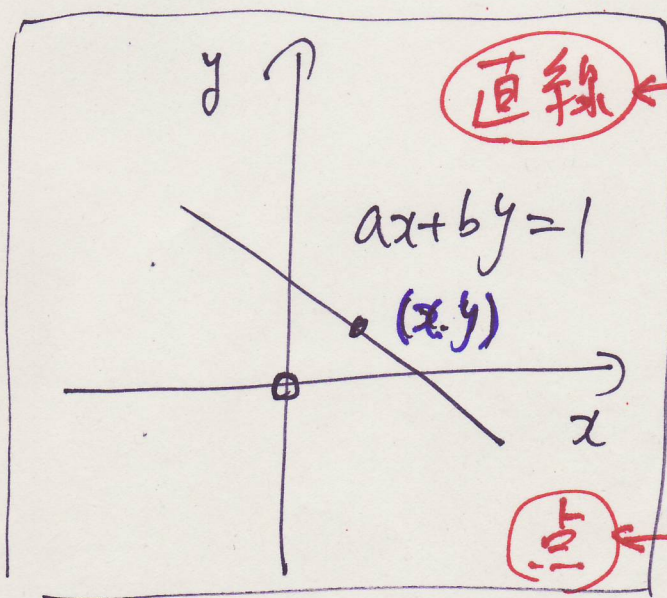


スペクトル分解

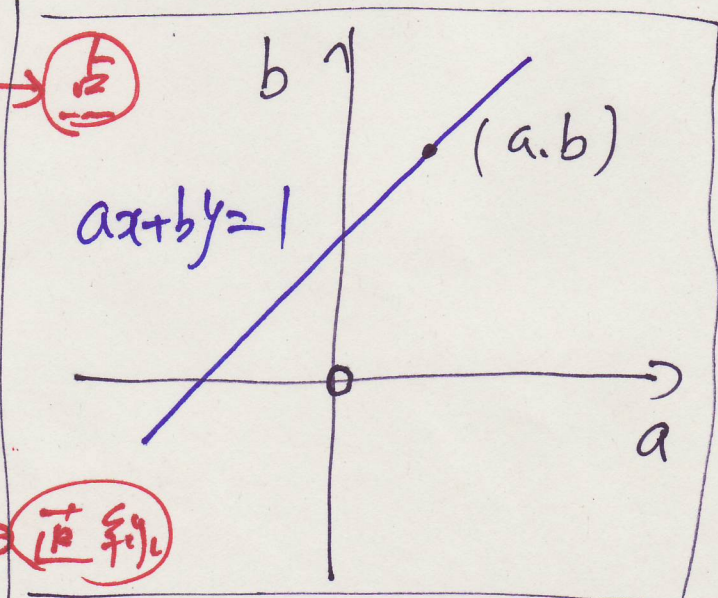
赤

紫

(2) $ax + by = 1$ の2つの解釈



直線



点

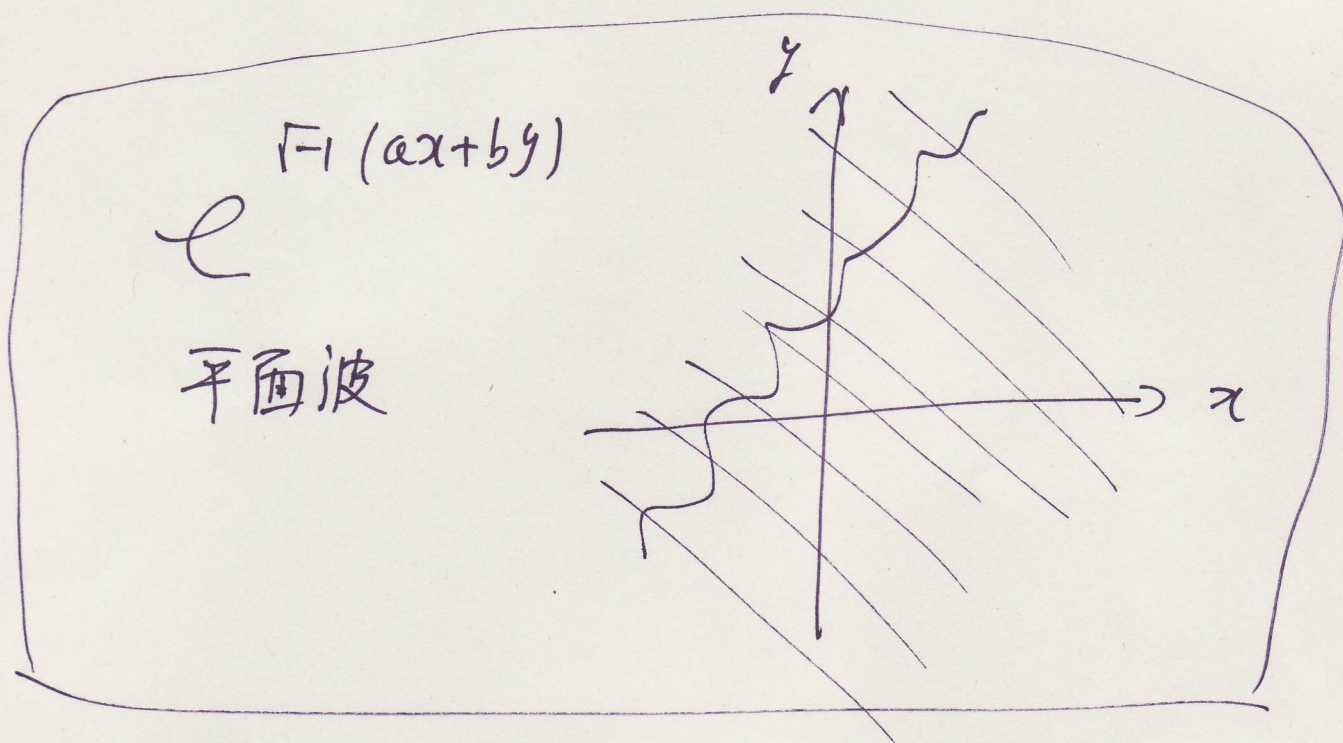
点

直線

$$(1) \text{ スペクトル分解 } \Leftrightarrow (2) \text{ 点 } \leftrightarrow \text{ 直線}$$

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ax + by$$



xy 平面上の関数

平面波の重ねあわせで表現

ab 平面上の関数

その重みは a, b の関数を与える

内積を少し一般化してみた

8

$$\bullet C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \end{pmatrix} \quad \text{固定}$$

$$\bullet \vec{a} = (a, b, c)$$

$$\bullet \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \times & \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\text{双線形}} \mathbb{R} \\ \vec{a} & & \vec{x} \quad \vec{a} C \vec{x} \end{array}$$

★ $\vec{a}$ を. $\vec{x}$ に与える効果の側面について注目して見た

★ $\vec{x}$ を. $\vec{a}$ に与える効果の側面に注目して見た。

$\mathbb{R}^3 \ni \vec{a}, \vec{a}'$ の同値関係 $\sim_{\mathbb{R}^3}$ を

$$\vec{a} \sim_{\mathbb{R}^3} \vec{a}' \iff \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ に対し } \vec{a} \subset \vec{x} = \vec{a}' \subset \vec{x}$$

によって定義する。

$\vec{a} \sim_{\mathbb{R}^3} \vec{a}'$ の時 $\vec{a}$ と $\vec{a}'$ とは「同族」に
得られる集合を $\mathbb{R}^3 / \sim_{\mathbb{R}^3}$ と書く

$\mathbb{R}^4 \ni \vec{x}, \vec{x}'$ の同値関係 $\sim_{\mathbb{R}^4}$ を

$$\vec{x} \sim_{\mathbb{R}^4} \vec{x}' \iff \exists \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ に対し } \vec{a} \subset \vec{x} = \vec{a} \subset \vec{x}'$$

によって定義する。

$\vec{x} \sim_{\mathbb{R}^4} \vec{x}'$ の時 $\vec{x}$ と $\vec{x}'$ とは「同族」に
得られる集合を $\mathbb{R}^4 / \sim_{\mathbb{R}^4}$ と書く

$$\mathbb{R}^3 / \sim_{\mathbb{R}^3} \times \mathbb{R}^4 / \sim_{\mathbb{R}^4} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$[\vec{a}] \quad [\vec{x}] \quad \vec{a} \subset \vec{x}$$

このとき、 $\mathbb{R}^3 / \sim_{\mathbb{R}^3}$ と $\mathbb{R}^4 / \sim_{\mathbb{R}^4}$ とは、互いに

「鏡にうつた姿」によって自己と完全に

知りことができる。

⇒ **非退化性**

FACT

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{R}^3 / \sim_{\mathbb{R}^3} \right) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{R}^4 / \sim_{\mathbb{R}^4} \right)$$

↑
↑
ベクトル空間になる

離散うージョン

11

$$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$(a, b) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ax + by \pmod{2}$$

問

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = (a, b) \\ \vec{a}' = (a', b') \end{array} \right. \quad \text{に対して.}$$

すなわち $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が

$$\vec{a} \cdot \vec{x} \pmod{2} = \vec{a}' \cdot \vec{x} \pmod{2}$$

を満たすと仮定する。

この時、 $\vec{a}$ と $\vec{a}'$ はどんな関係があるか？

答

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv a' \pmod{2} \\ b \equiv b' \pmod{2} \end{array} \right.$$

この問は、いわば

「鏡にうつった姿を見て、自己のことか
どのくらいわかるか？」

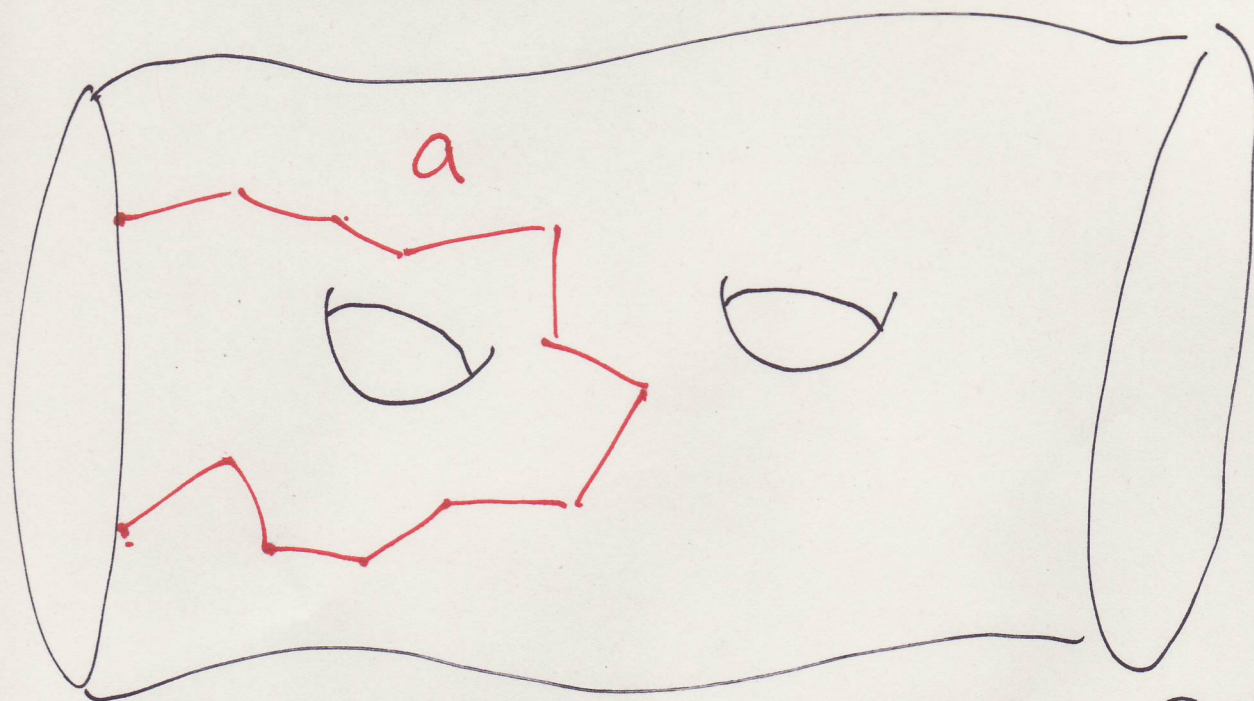
という問いである。

以下、これと類似の問いを

幾何学において考えてみる。

曲面上の1次元チェーン

次の図形を考えよ。



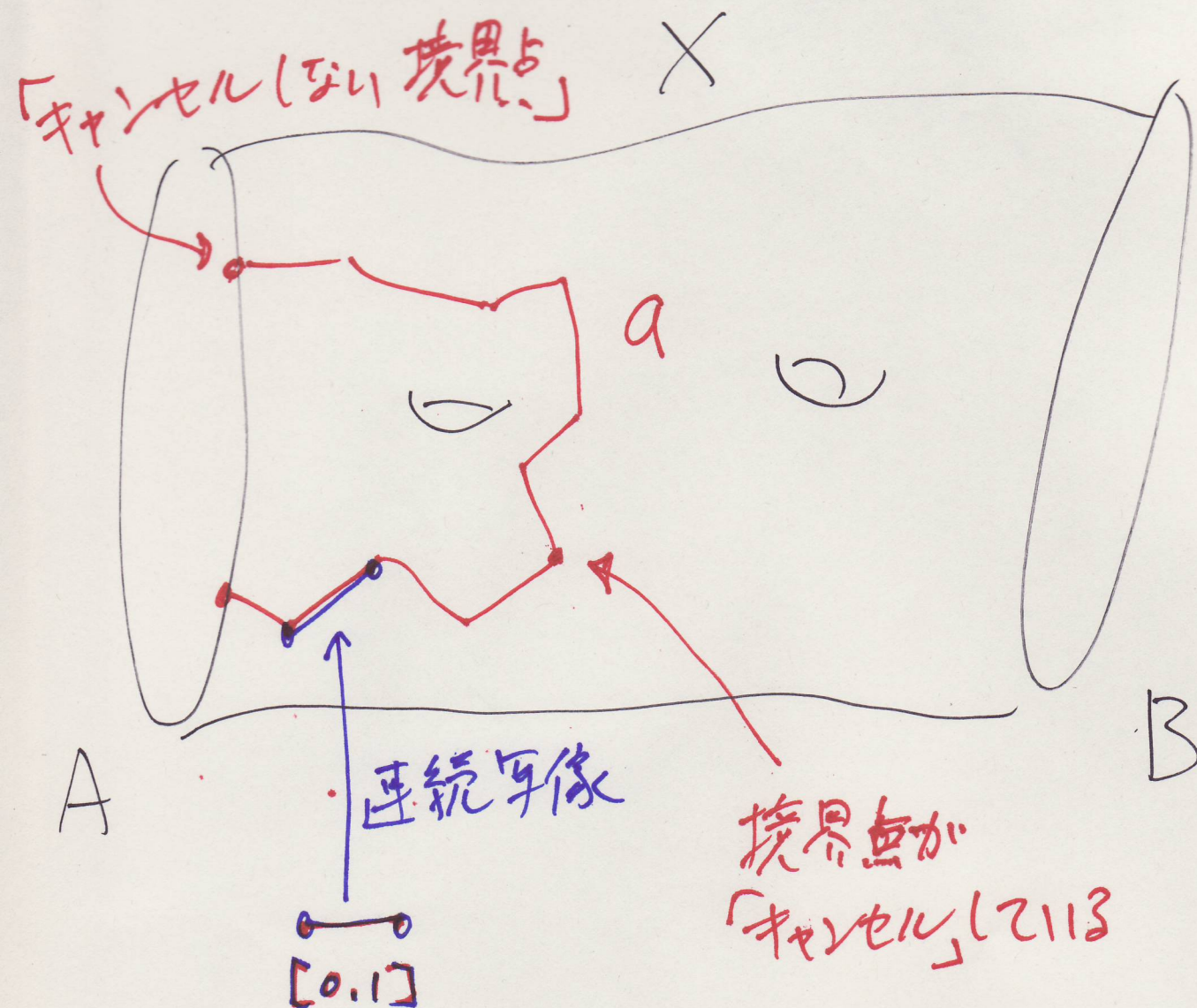
A
(境界の一部)

X (曲面)

B
(境界の一部)

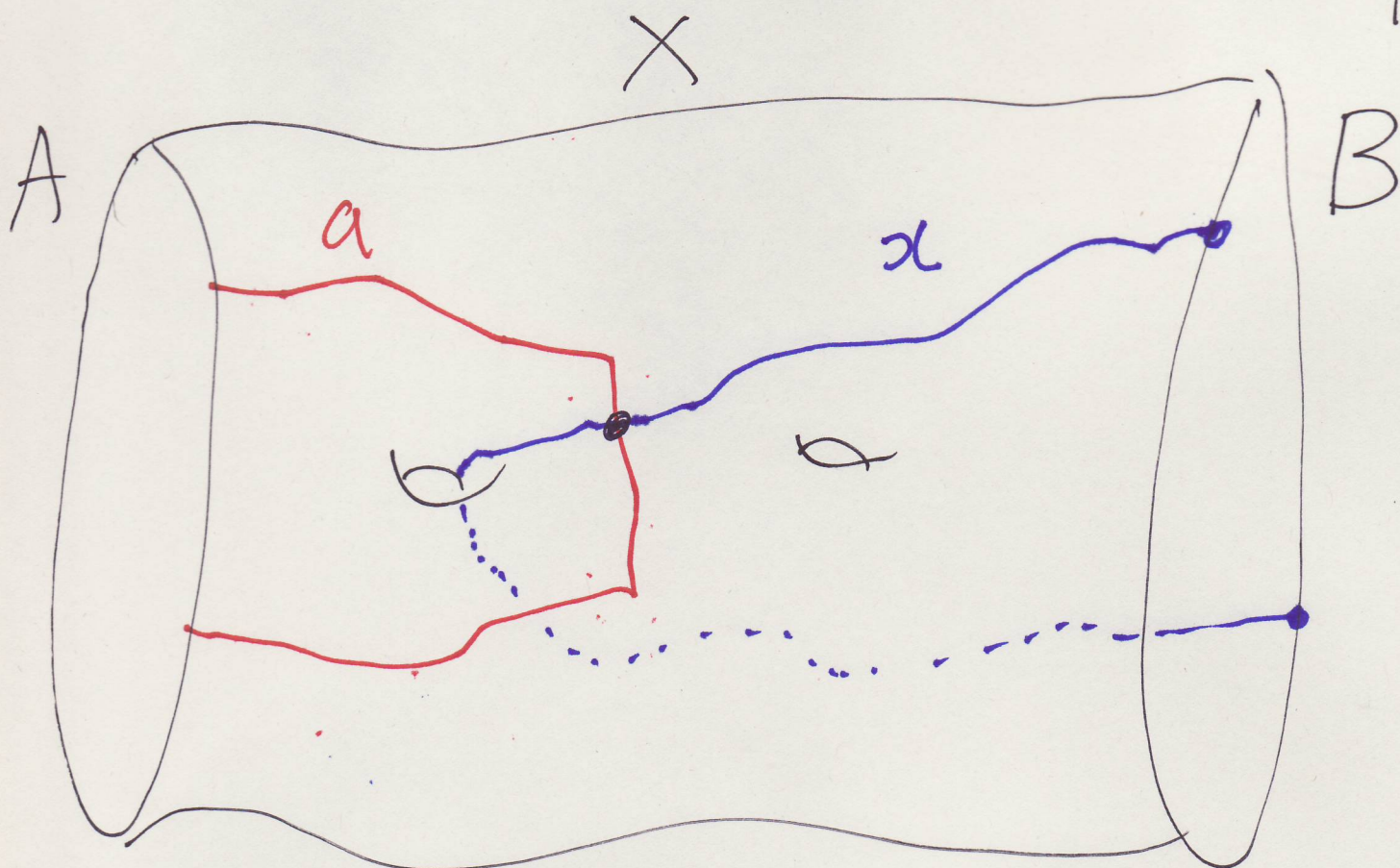
$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \dim X = 2 \\ \bullet \partial X = A \cup B \quad (A \cap B = \emptyset) \end{array} \right.$$

X: 2次元コンパクト多様体



a : 1次元4エッジ
 $[0,1]$ からの連続写像の像が
 有限個 あつまったもの.

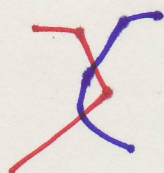
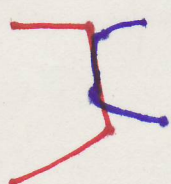
$$Z_1(X, A) \stackrel{\text{定義}}{=} \left\{ a \mid \begin{array}{l} \text{キャンセルしない} \\ \text{境界点か.} \\ \text{すべて } A \text{ 上にある} \\ \text{1次元4エッジ} \end{array} \right\}$$



$$Z_1(X, A) \times Z_1(X, B) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

 a
 x
 $\#(a \cap x) \pmod{2}$

a と x の交点の個数の偶奇を写える。



少なくとも交叉を
「横断的」に数える

鏡の中っ姿で何かあか子か?

16

問

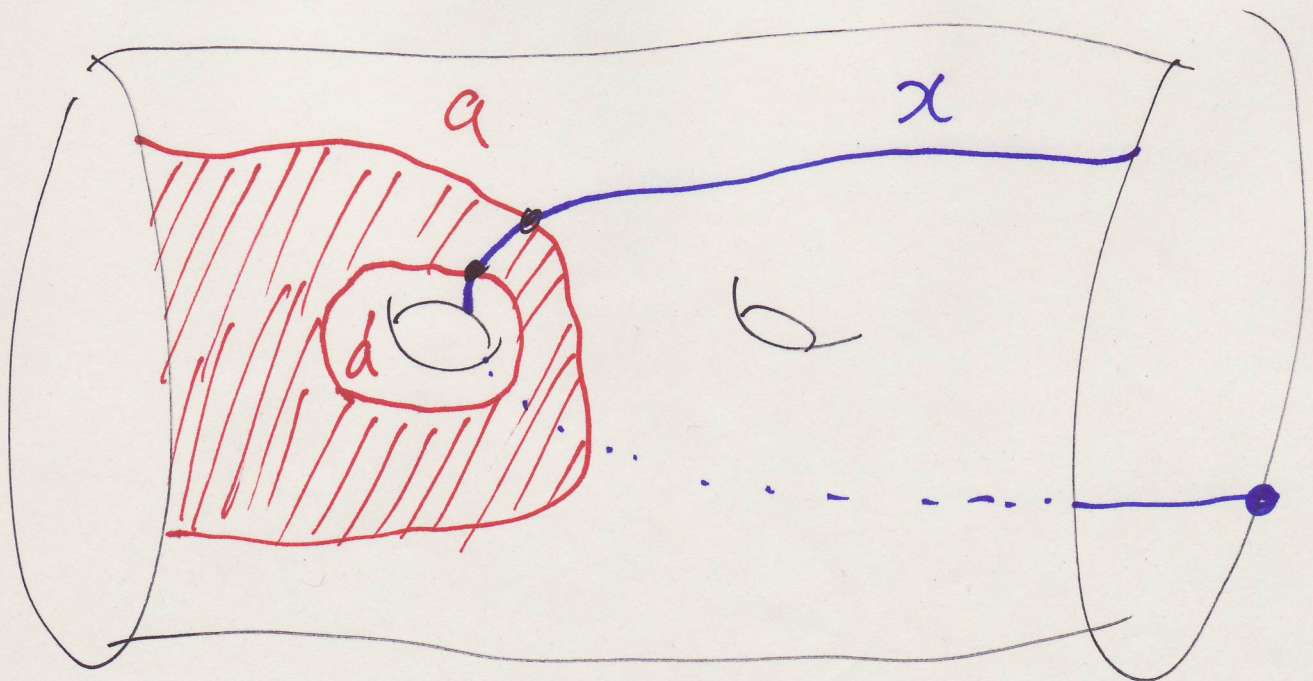
$a, a' \in Z_1(X, A)$ かい
どの $x \in Z_1(X, B)$ に対しても

$$\#(a \cap x) \equiv \#(a' \cap x) \pmod{2}$$

をみたす時、 a と a' の関係は何か?

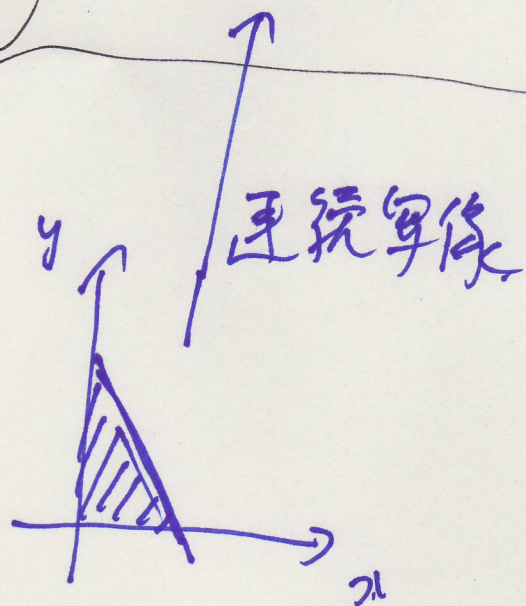
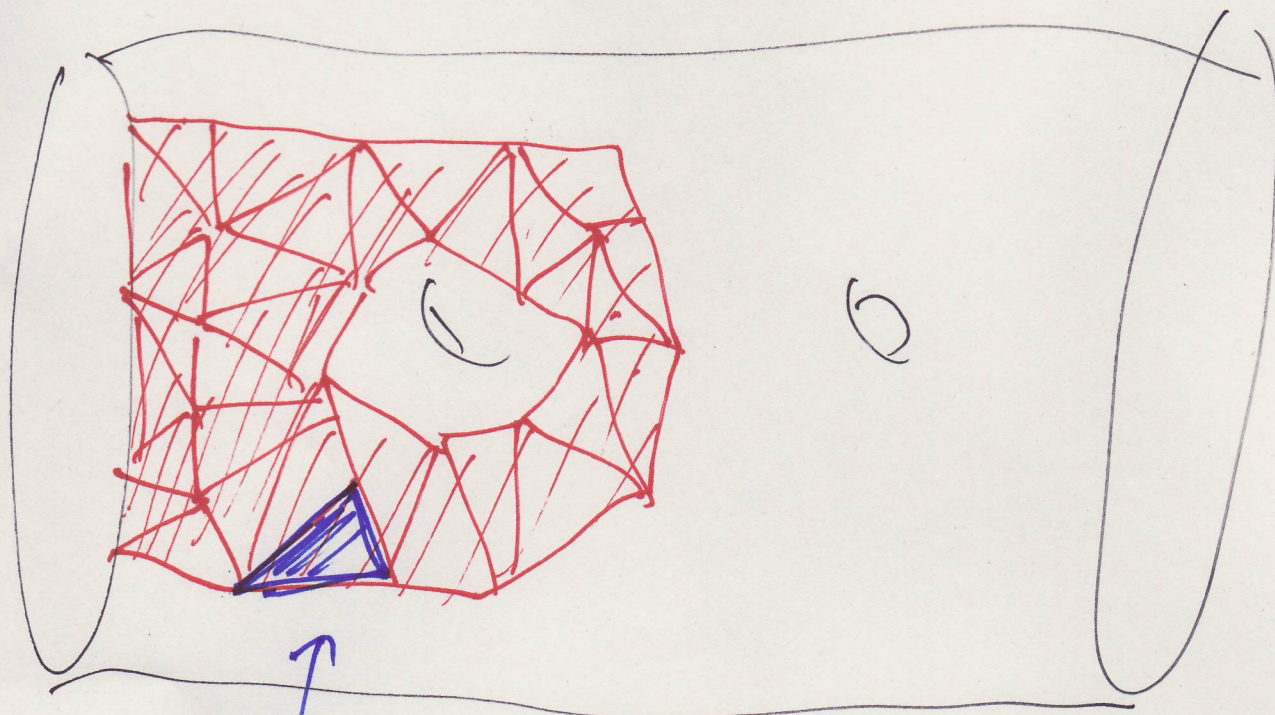
観察

「 a と a' の間に膜をはれる」時、
上の条件が成立する



「膜がはれる」とはということか？

17



$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x, y \\ x+y \leq 1 \end{array} \right\}$$

三角形の連続写像の有限個の集り。

境界の辺の行き先が

「キャンセルしあう」を

除くと $a \cup a'$ になっているか、あるいは A に含まれる

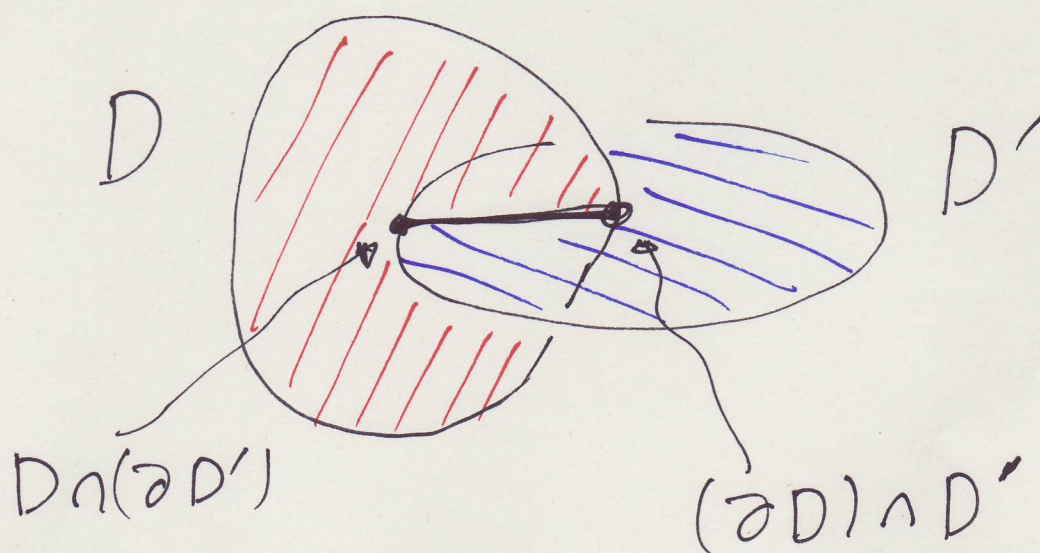
~~膜~~

なぜか？

18

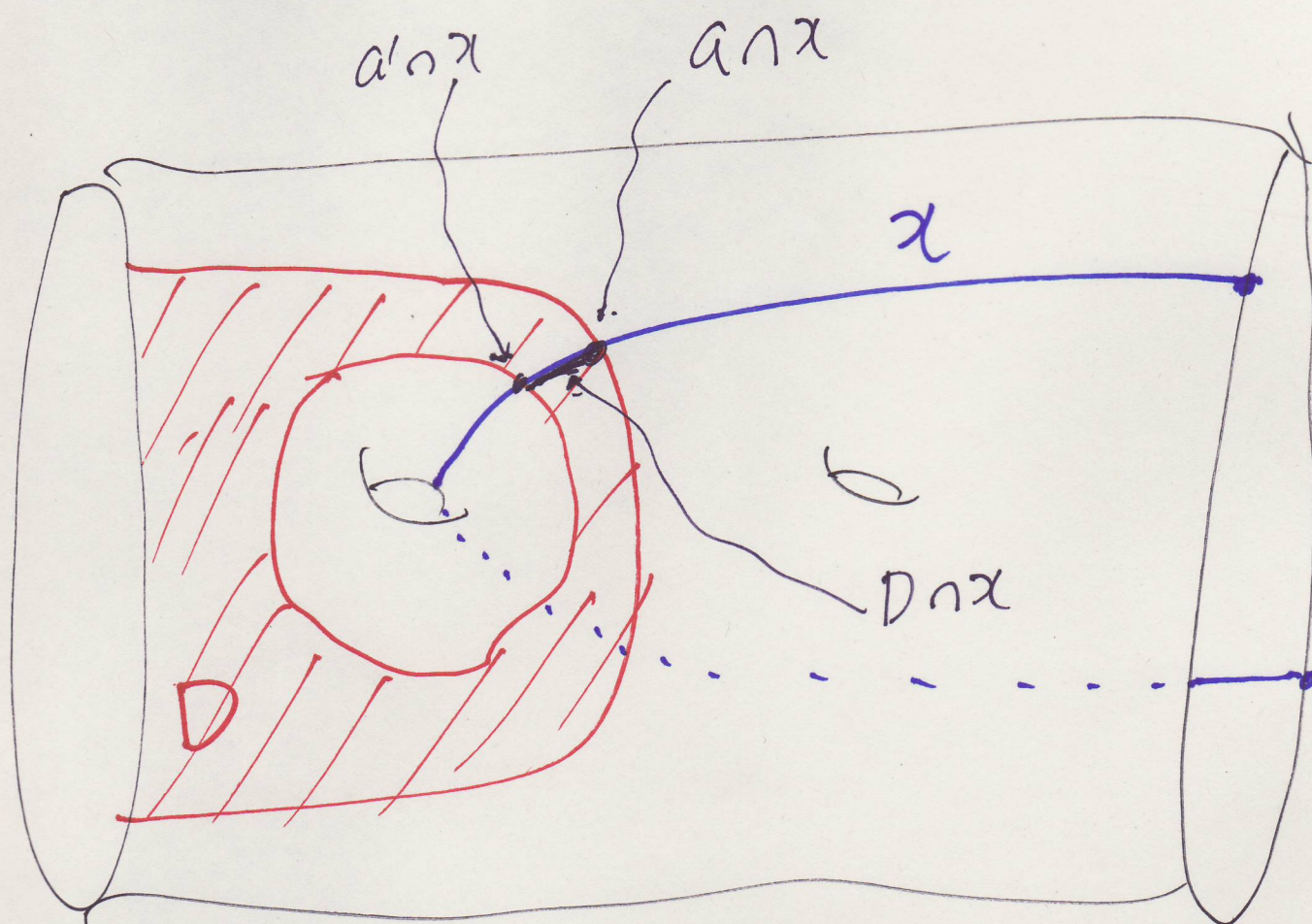
ポイント

$$\partial(D \cap D') = ((\partial D) \cap D') \cup (D \cap \partial D')$$



これを $\begin{cases} D = a \text{ と } a' \text{ とを張る膜} \\ D' = \alpha \end{cases}$

122に用いると...



$$\partial(D \cap x) = \underbrace{(\partial D \cap x)}_{(a \cap x) \cup (a' \cap x)} \cup \underbrace{(D \cap \partial x)}_{\text{交わらない}^*}$$

1次元の線

1次元の線の境界点は必ず偶数個

$$\therefore \#(a \cap x) \equiv \#(a' \cap x) \pmod{2}$$

* D, a, a' は B と交わらないように動かせる。

定理 (ホップレカレ)

$a, a' \in Z_1(X, A)$ か

と $x \in Z_1(X, B)$ に對して

$$\#(a \cap x) \equiv \#(a' \cap x) \pmod{2}$$

をみたす時,

a と a' の間に膜をはさることか
可能である

交点数 という 数字だけ を見て、

膜の存在 という 幾何学的命題 が

成立するとわかって (もう!!)

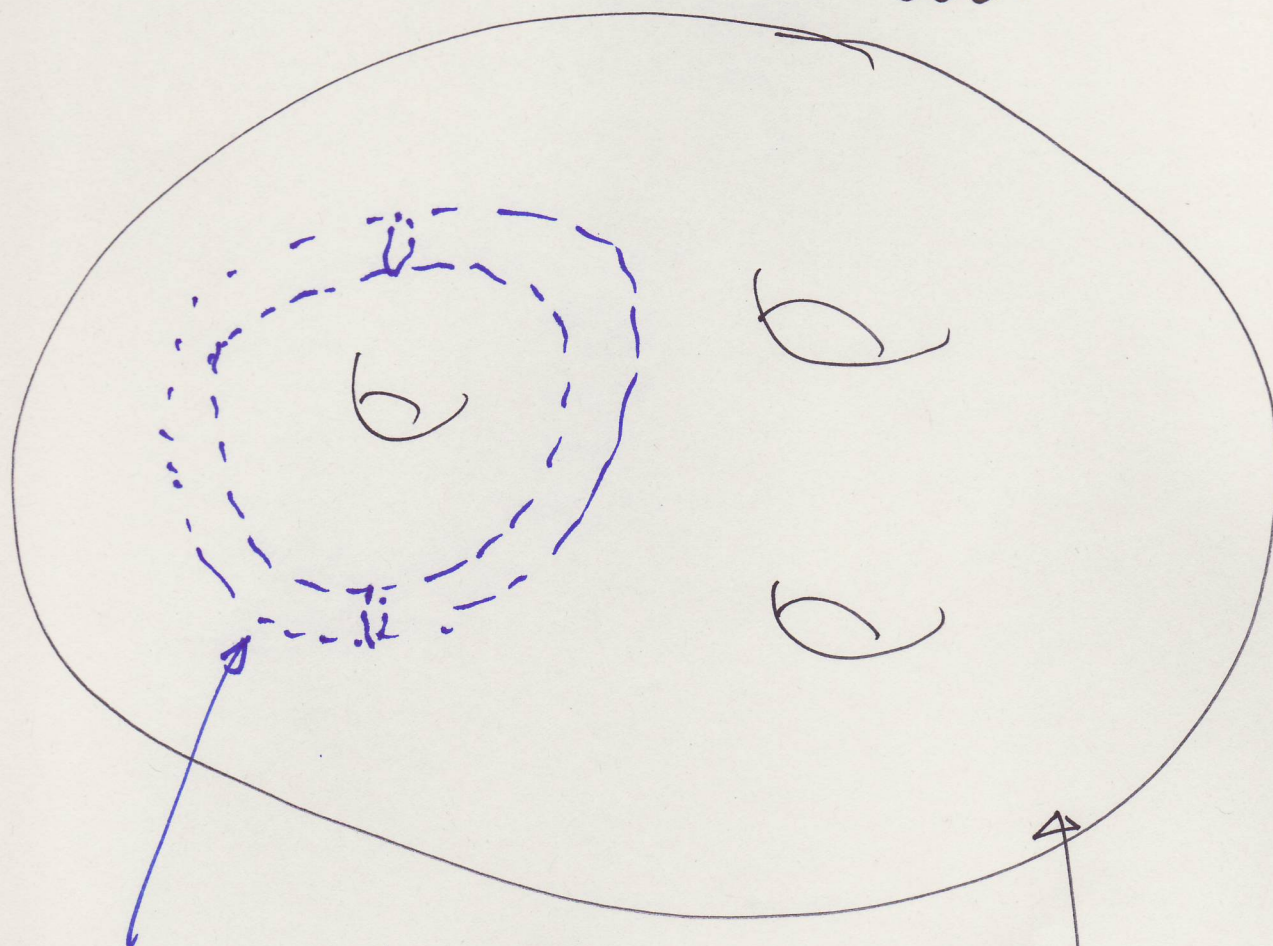
証明の方針 --- いさゝかあり得る.

(1) 多様体 X の複雑さに関する
帰納法を用いる。

(2) "Morse theory" を用いる。

(3)

X 下の中身



"虫食いの空洞"

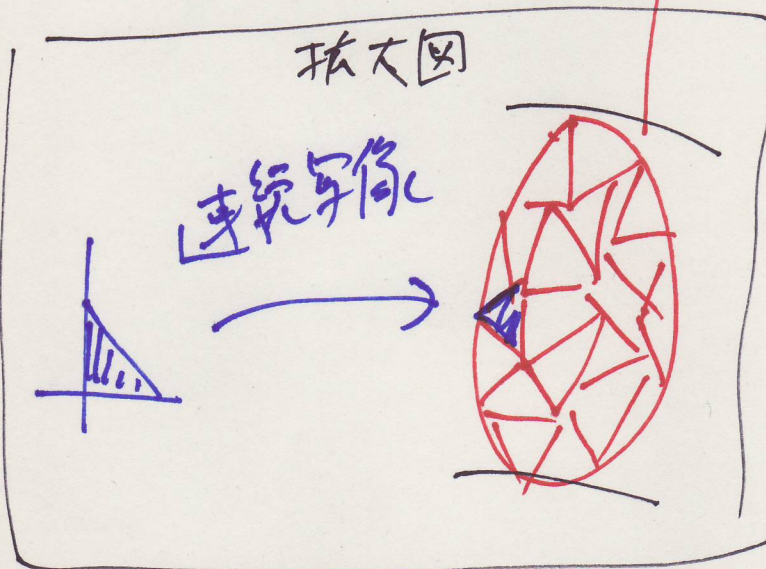
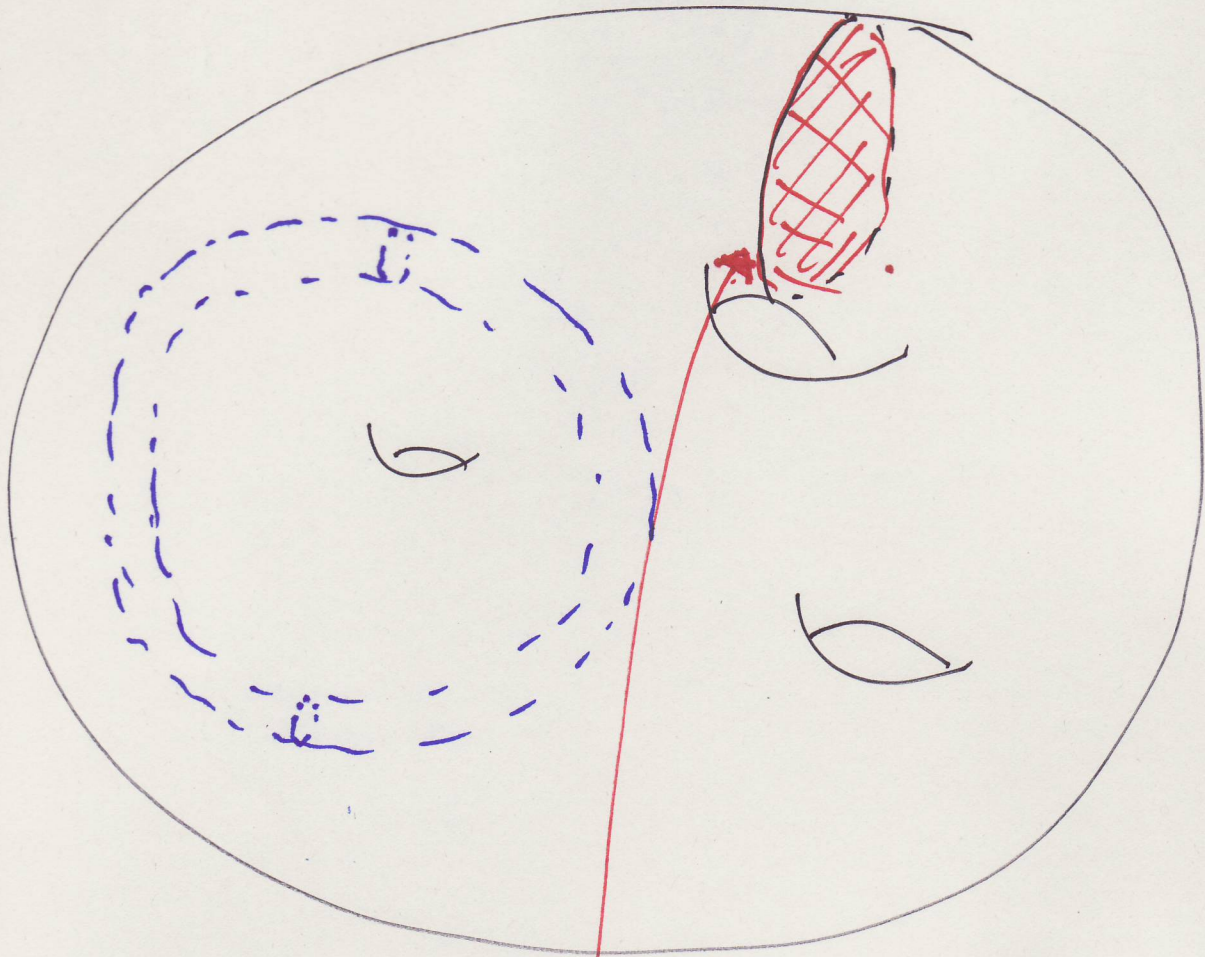
空洞の表面 B

外の表面 A

$$\dim X = 3$$

$$\partial X = A \cup B$$

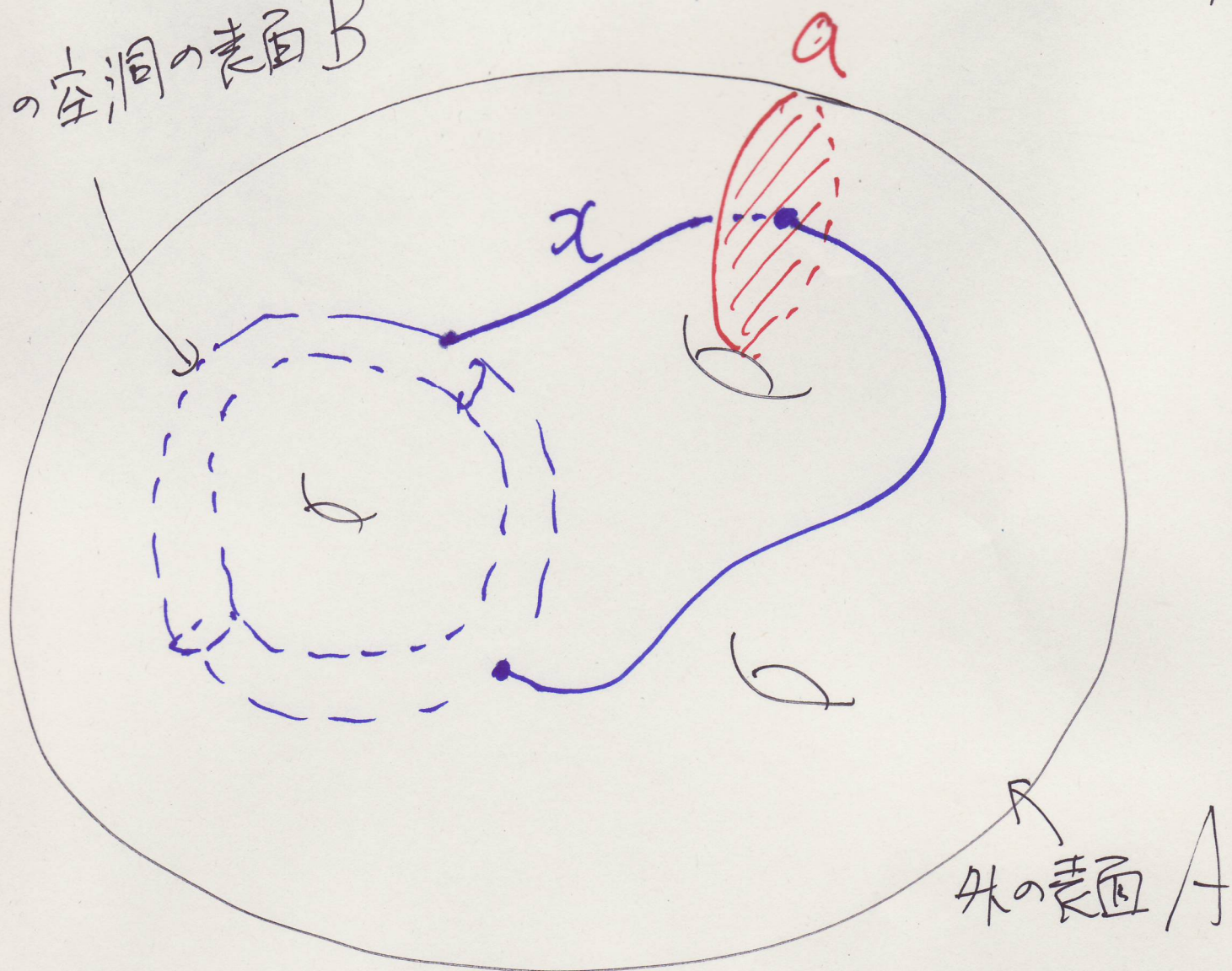
$$(A \cap B = \emptyset)$$



三角形の
有限個の
連続写像

$$Z_2(X, A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{キャンセルするものを除くと} \\ \text{境界が } A \text{ 上にある} \\ X \text{ の 2次元チェイネ} \end{array} \right\}$$

中の空洞の表面 B



$$Z_2(x.A) \times Z_1(x.B) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$a \quad x \quad \#(a \cap x) \bmod 2$$

上の図の場合には $\#(a \cap x) = 1$

これに對してもホップカレ双射性が成立する

一般に

$$\left[\begin{array}{l} X : n \text{次元コンパクト多様体} \\ \partial X = A \cup B \quad A \cap B = \phi \\ n = k + l \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc} Z_k(X, A) \times Z_l(X, B) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ a \quad \alpha & & \#(a \cap \alpha) \pmod{2} \end{array} \right.$$

定理 全ての α に對して

(ホップカレ) $\#(a \cap \alpha) \equiv \#(a' \cap \alpha) \pmod{2}$

のとき, a と a' の間に

膜 (の高次元版) をはるこたてする

ホムカシ双対性をよりよく理解する 26

ために、ホモロジー群の概念を導入する。

$$H_m(X, A; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) := Z_m(X, A) / \sim$$

$$a \sim a' \iff$$

定義

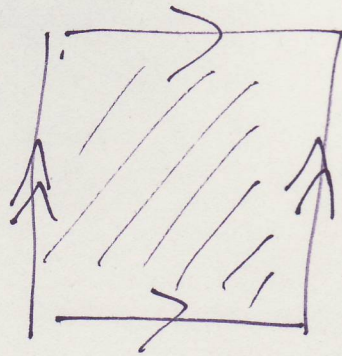
a と a' の間に
膜 (の高次元版)
をはさむことができる

$$\left(\begin{array}{l} \text{i.e. } a \cup a' = \partial b \\ \text{となる } b \text{ がある.} \end{array} \right)$$

この時、 $H_m(X, A; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は
有限体 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の上のベクトル空間としての
構造を自然に持つ。

例

2次元トーラス

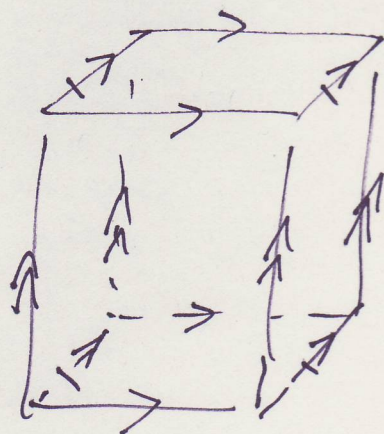
 T^2 

$$(\partial T^2 = \emptyset)$$

$$\begin{aligned} \cdot H_0(T^2; \mathbb{Z}/2) &= \{ 0, [\text{pt}] \} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} [\text{pt}] \\ \cdot H_1(T^2; \mathbb{Z}/2) &= \{ 0, [\rightarrow], [\uparrow], [\rightarrow\uparrow] \} \\ &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} [\rightarrow] \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} [\uparrow] \\ \cdot H_2(T^2; \mathbb{Z}/2) &= \{ 0, [\text{hatched square}] \} \\ &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} [\text{hatched square}] \end{aligned}$$

	$H_0(T^2; \mathbb{Z}/2)$	$H_1(T^2; \mathbb{Z}/2)$	$H_2(T^2; \mathbb{Z}/2)$
#	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$2 = 2^1$
$\dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$	1	2	1

3次元トラス

 T^3 

$$H_0(T^3; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 [p^t]$$

$$H_1(T^3; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 [\rightarrow] \oplus \mathbb{Z}_2 [\uparrow] \oplus \mathbb{Z}_2 [\nearrow]$$

$$H_2(T^3; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 [\square] \oplus \mathbb{Z}_2 [\triangleleft] \oplus \mathbb{Z}_2 [\triangleright]$$

$$H_3(T^3; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 [\text{cube}]$$

	H_0	H_1	H_2	H_3
#	$2 = 2^1$	$8 = 2^3$	$8 = 2^3$	$2 = 2^1$
$\dim_{\mathbb{Z}_2}$	1	3	3	1

実は、一般に、「 n 次元トーラス T^n 」では

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \# H_k(T^n; \mathbb{Z}_2) = 2^{\binom{n}{k}} \end{array} \right.$$

$$\cdot \dim_{\mathbb{Z}_2} H_k(T^n; \mathbb{Z}_2) = \binom{n}{k}$$

2項係数

となることが知られている。

• 特に $k+l=n$ の時

$$\# H_k(T^n; \mathbb{Z}_2) = \# H_l(T^n; \mathbb{Z}_2)$$

という対称性がある。

• この対称性は、境界のない任意のコンパクト多様体に対して成立する

—— なせか??

答: ホップカレ双対性の帰結である 30

$$Z_k(X, A) \times Z_\ell(X, B) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$



$$H_k(X, A; \mathbb{Z}/2) \times H_\ell(X, B; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

ホップカレ双対性が意味している

のは、これが「鏡にうつった姿を

みれば自己が完全にあかる」写像、

即ち **非退化** であるということ!

このとき 一般論 (線形代数) から

$$\dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} H_k(X, A; \mathbb{Z}/2) = \dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} H_\ell(X, B; \mathbb{Z}/2)$$

であら!!

接ベクトルと余接ベクトル

↑ 反変ベクトル ↑ 共変ベクトル

X : 多様体

eg. $X = \mathbb{R}^n$

$x_0 \in X$

曲線 γ 上の点

関数 f ベクトル空間になる

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \xrightarrow{c} X \\ 0 \mapsto x_0 \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x_0 \mapsto 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$c, f \longmapsto \left[\frac{d}{dt} f(c(t)) \right]_{t=0}$$

お互いをどのくらい認知できているか。つまり、鏡にうつった像によってわかる自己の情報か、どのくらいあつかを要する。

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \xrightarrow{c} X \\ 0 \mapsto x_0 \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x_0 \mapsto 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

非退化

$$T_{x_0} X$$

「接ベクトル」の空間

$$T_{x_0}^* X$$

「余接ベクトル」の空間

↑
ベクトル空間

このとき

鏡にうつりあいで自己かあはる。

特に

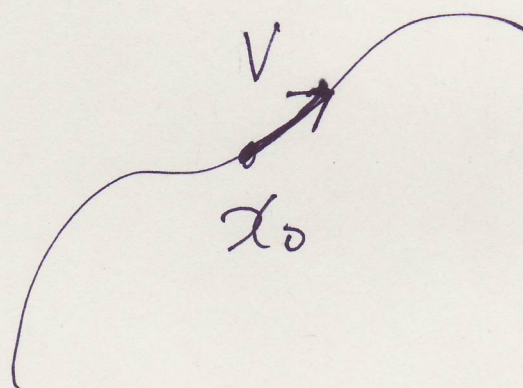
$$T_{x_0} X = \left\{ \varphi: T_{x_0}^* X \xrightarrow{\text{線形}} \mathbb{R} \right\}$$

右辺にはベクトル空間の構造が入る。
よって $T_{x_0} X$ はベクトル空間となる。

逆に (このベクトル空間構造をつかうと)

$$T_{x_0}^* X = \left\{ \alpha : \underbrace{T_{x_0} X}_{\substack{\psi \\ V}} \xrightarrow{\text{線形}} \mathbb{R} \right\}$$

x_0 を通る 微小な曲線の
方向をあらわす。



$T_{x_0}^* X$ の要素 (余接ベクトル) は、直観的には

微小曲線 $\longrightarrow$ 微小な数

という対応を与えている。

ベクトル場とは.

各点 x に $T_x X$ の要素 $V(x)$ が指定され.

対応 $x \mapsto V(x)$ が

(ある意味で) かわらかなもの

1次微分形式とは

各点 x に $T_x^* X$ の要素 $\alpha(x)$ が指定され

対応 $x \mapsto \alpha(x)$ が

(ある意味で) かわらかなもの.

ベクトル場の「本来の面目」

微分作用素

35

$$\left[\left\{ \begin{array}{c} R \xrightarrow{\quad} X \\ 0 \mapsto x_0 \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} X \xrightarrow{f} R \\ x_0 \mapsto r_0 \end{array} \right\} \longrightarrow R \right]$$

ベクトル場

V

関数

f

$\mapsto$

$(Vf)_x$

$\left(\begin{array}{l} x_0 \text{ において } V(x_0) \text{ を } f-f(x_0) \text{ に} \\ \text{作用させて数をつくる} \end{array} \right)$

つまり

$$\left\{ X \xrightarrow{f} R \right\} \xrightarrow{V} \left\{ X \xrightarrow{g} R \right\}$$

関数

$$f \mapsto g = Vf$$

ベクトル場 V による関数 f の微分

$$\left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \xrightarrow{c} X \\ 0 \mapsto x_0 \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x_0 \mapsto 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \right]$$

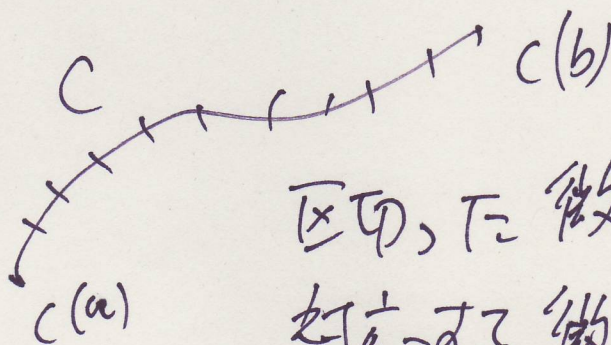
曲線

1次微分形式

$$c: [a, b] \rightarrow X$$

α

$$\mapsto \int_c \alpha$$



区切った微小曲線に
対応する微小数を
総和する

1次微分形式とは、曲線上で
積分されるための(?) 物

参考

ルジャンドル変換

- 線型計画問題 凸計画問題
(cf 「宝田」)

フェンシエル・モローの双対性定理

グー・タッカーの双対定理

- 解析力学の2通りの記述方法

 TX ... ラグランジュ形式 T^*X ... ハミルトン形式

ルジャンドル変換

- 熱力学・統計力学

“ TX ” 示量変数 (体積, エンタルピー...)

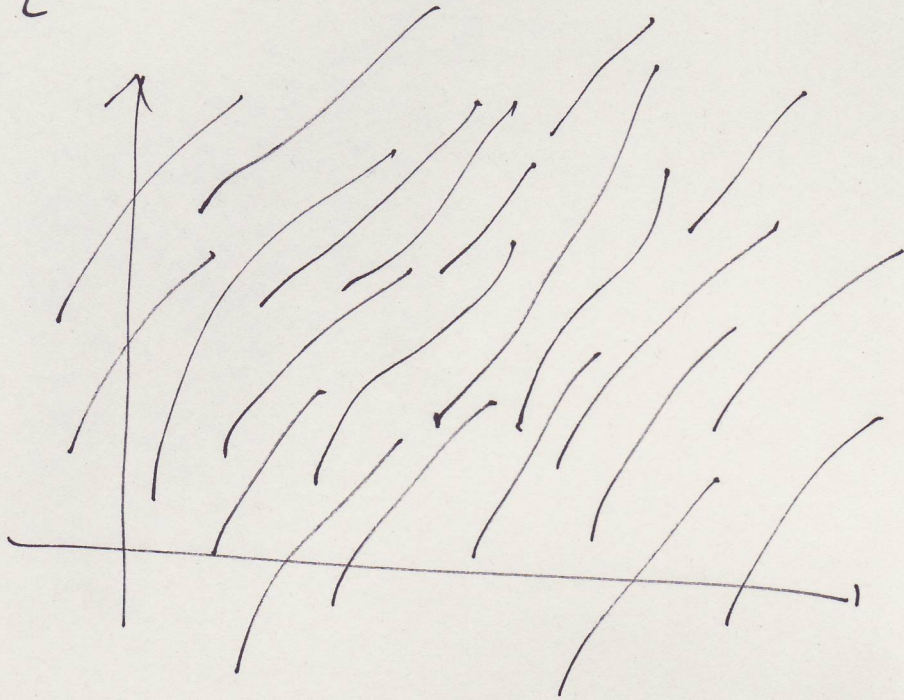
“ T^*X ” 示強変数 (圧力, 温度...)

- 数学: シンプレクティック幾何...

1次微分形式を 与え る ひとつの方法

平面上で

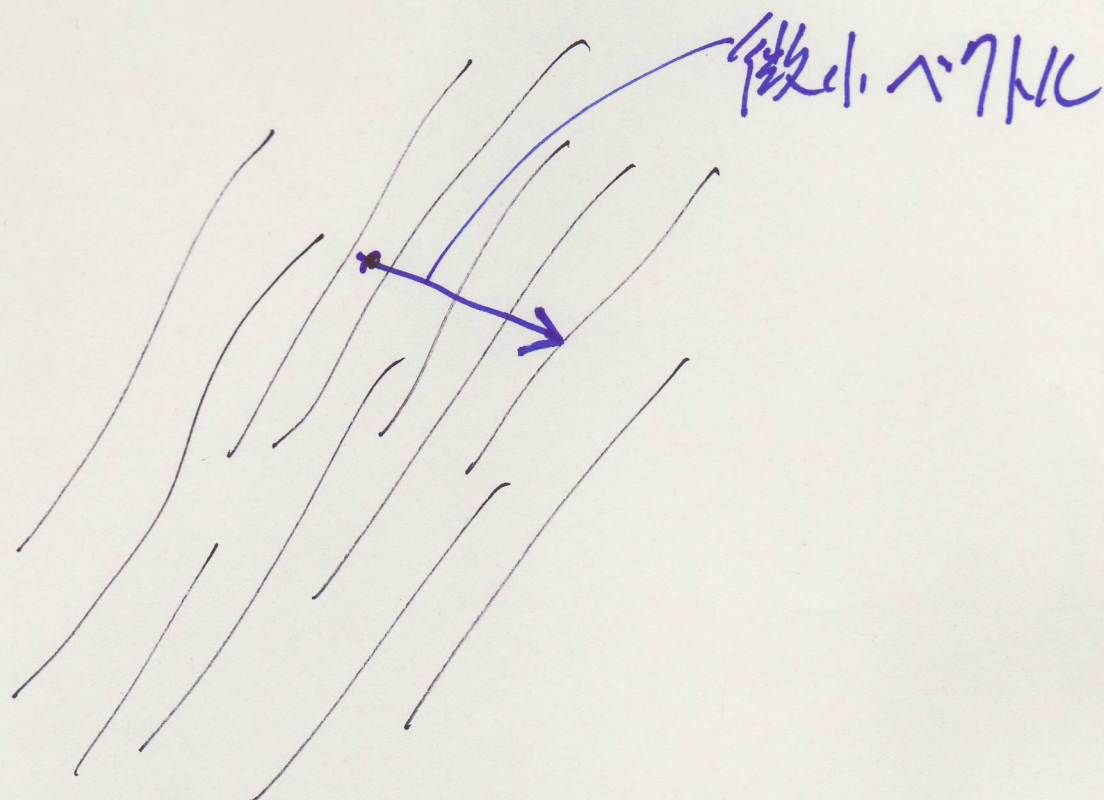
$$X = \mathbb{R}^2$$



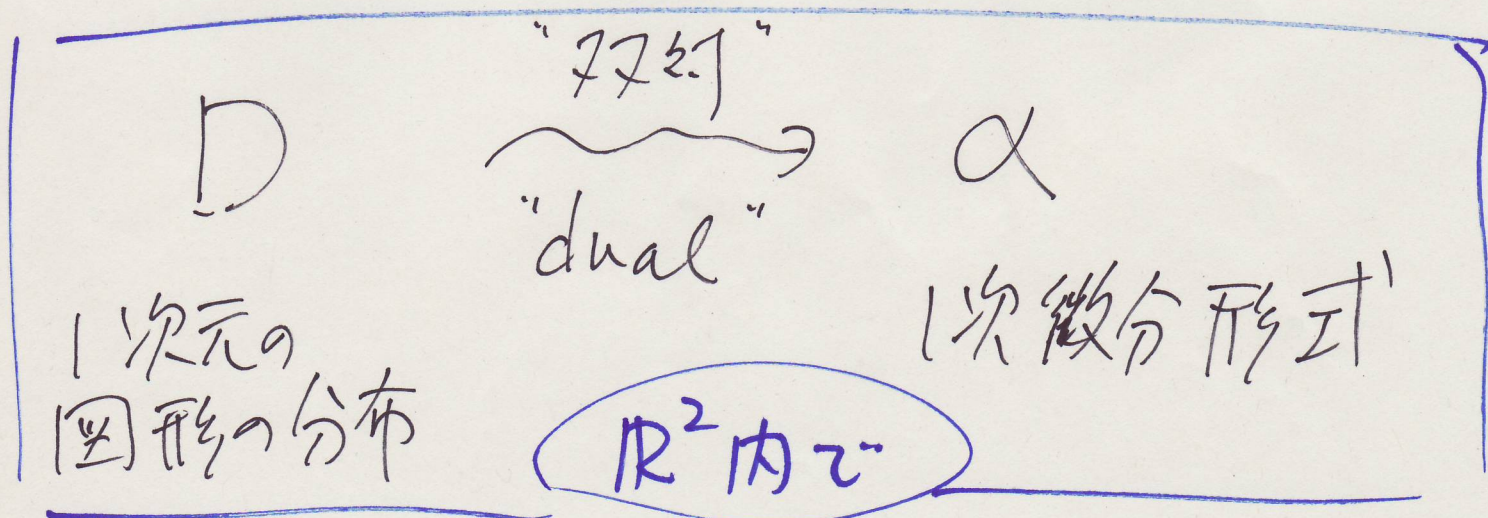
ある密度で、曲線が“連続的に”分布
 していたとする。(曲線には、始点と
 終点があつてよい.)

この分布を象徴的に D とかく。

* 「向き」についての考察が必要だが省略する。
 以下「お話」と思つて下さい。



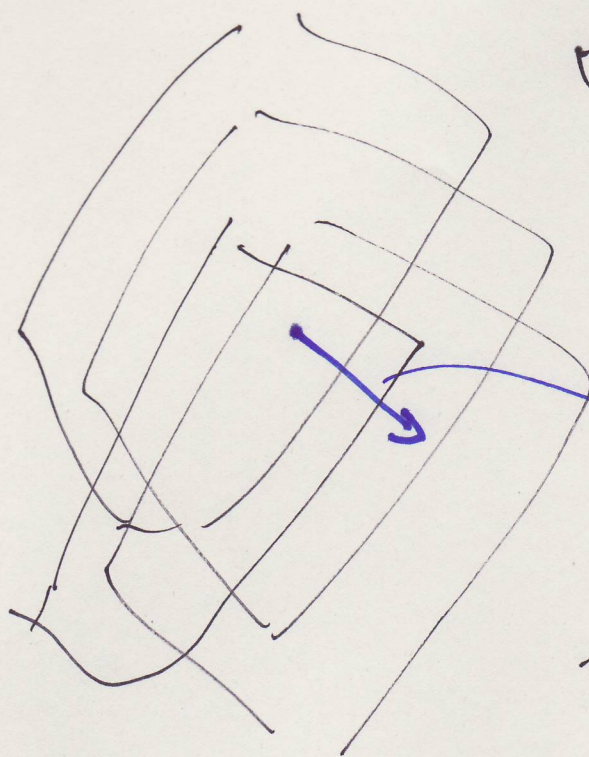
各微小ベクトルに対して.
 それが横切る D の曲線の
 “個数” を対応させる対応を
 α とおく



空間上で

1次微分形式を与えるには...

$$X = \mathbb{R}^3$$



曲面の“連続的分布”を

D とおく.

微小なワトル

やはり微小なワトルの
横切る D の曲面の
“個数”を考えると

D

“双対”
“dual” $\rightarrow \alpha$

2次元の
図形の分布

1次微分形式

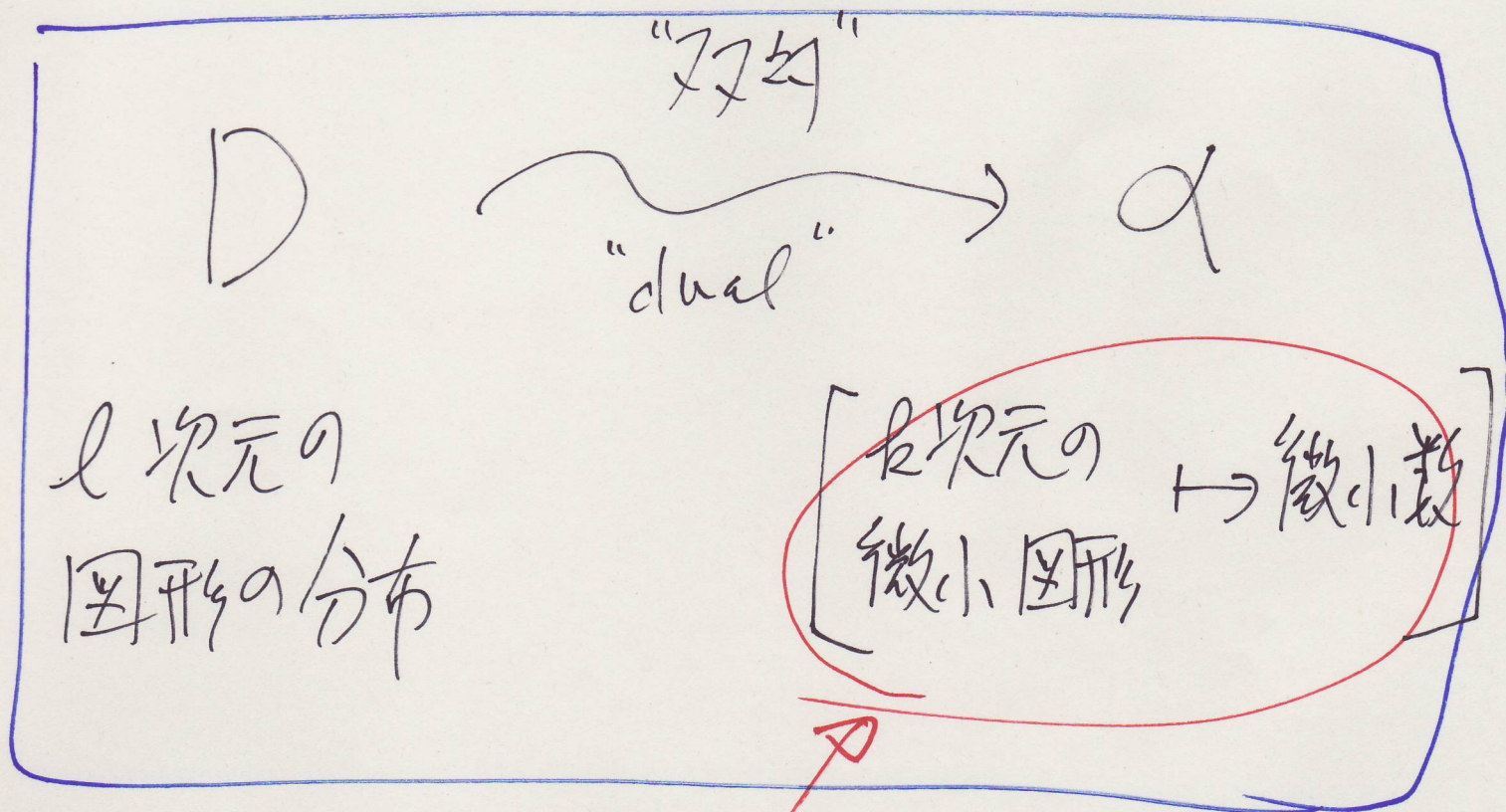
$\mathbb{R}^3$ 内で

長次微分形式

41

一般に $\left\{ \begin{array}{l} \dim X = n \\ n = k + l \end{array} \right.$

であるとき.

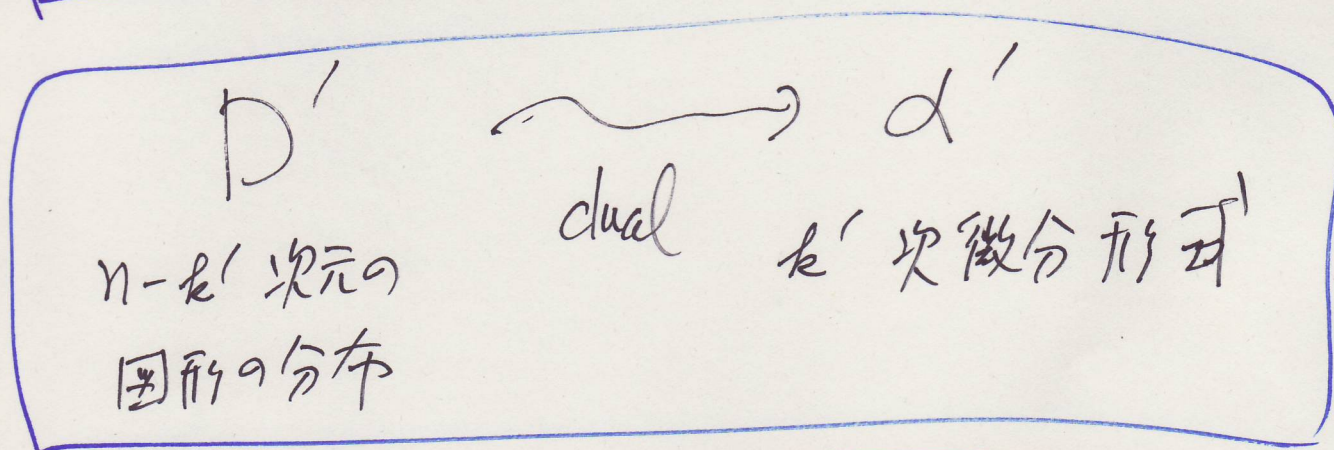
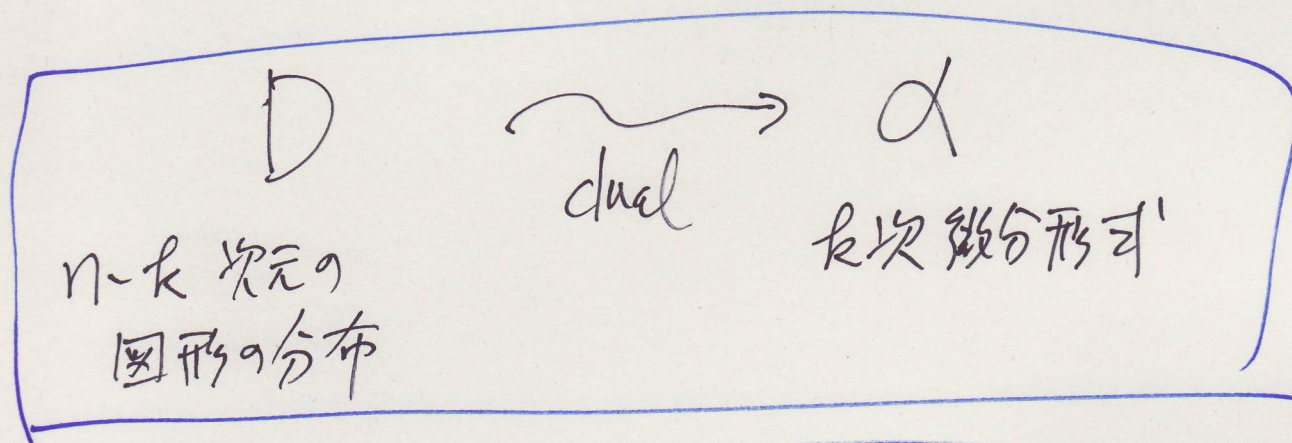


「長次微分形式」という.

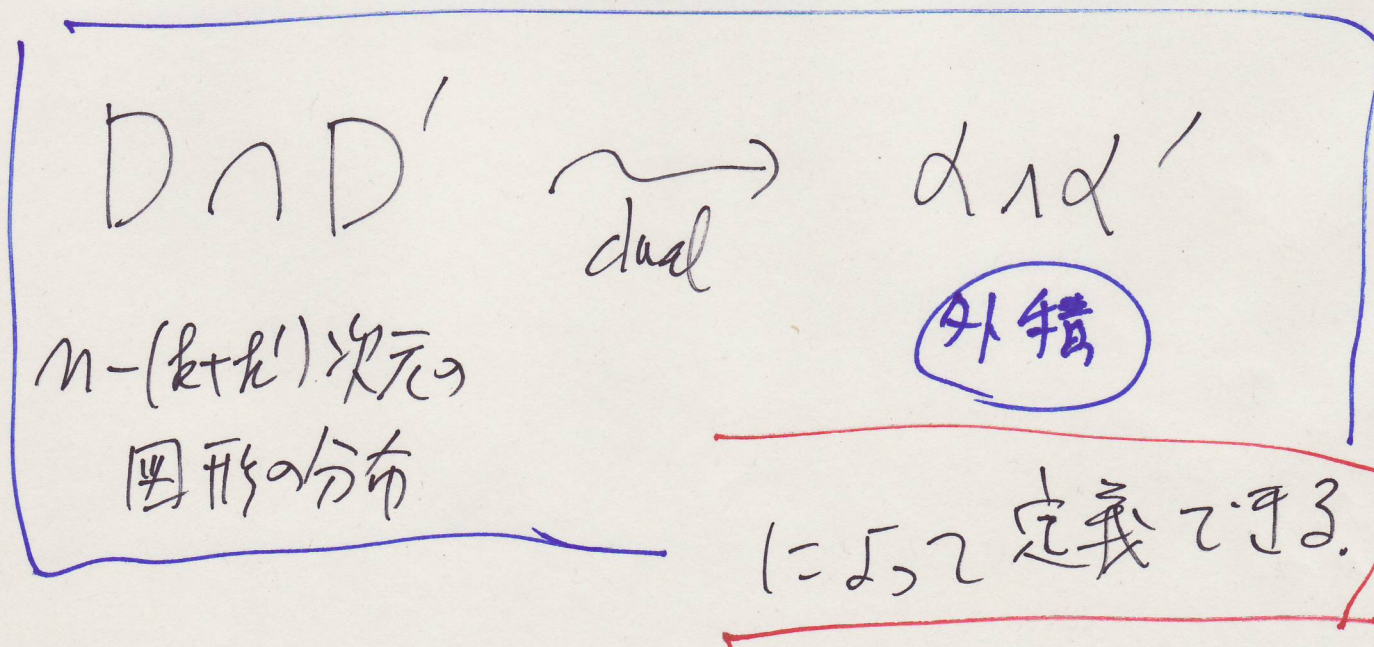
外積

42

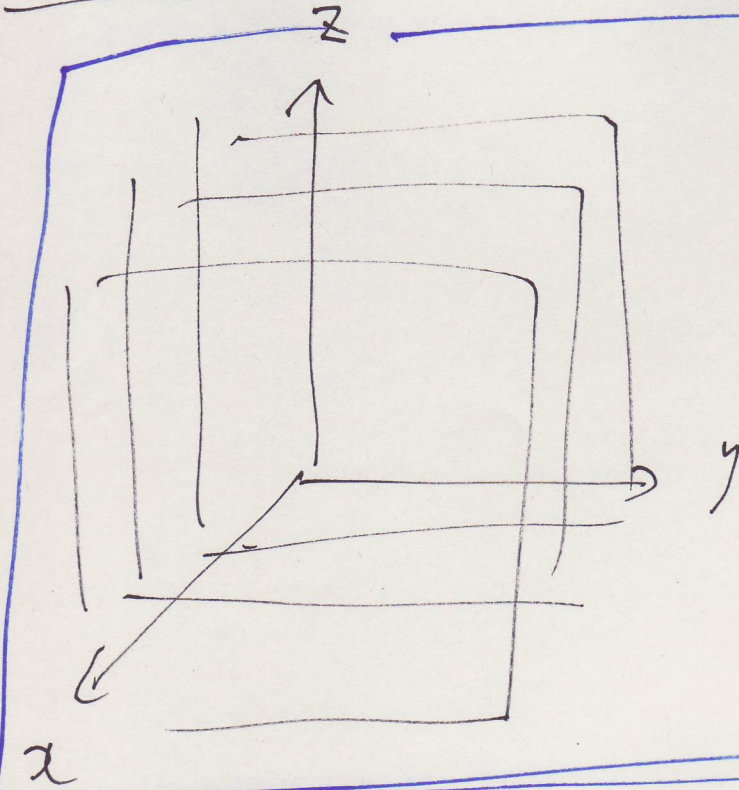
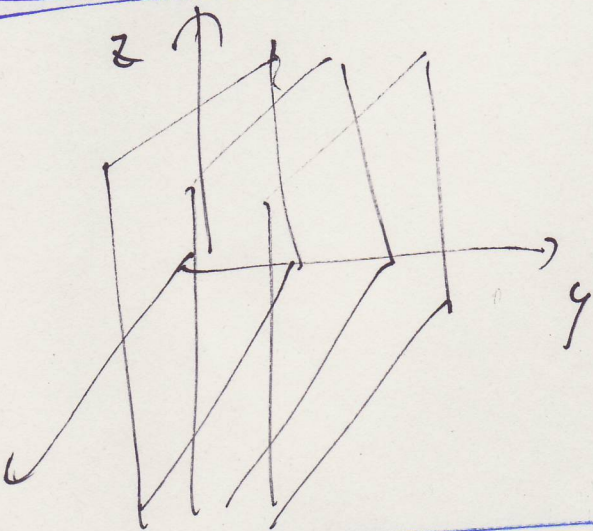
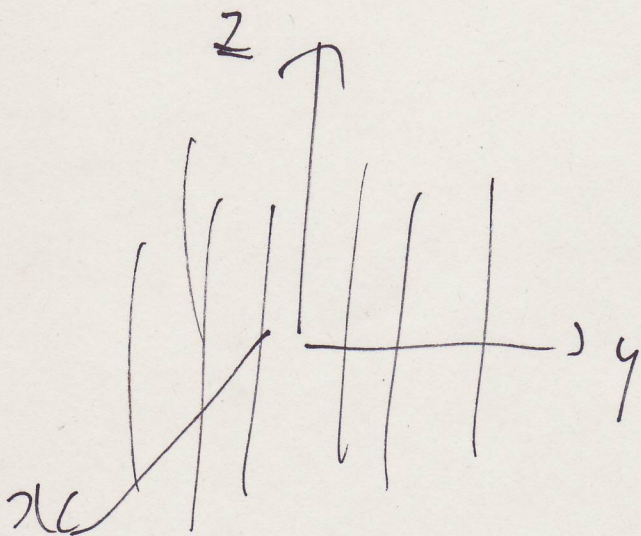
$\dim X = n$ の時.



このとき、 $k+k'$ 次微分形式 $d\alpha d\alpha'$ を



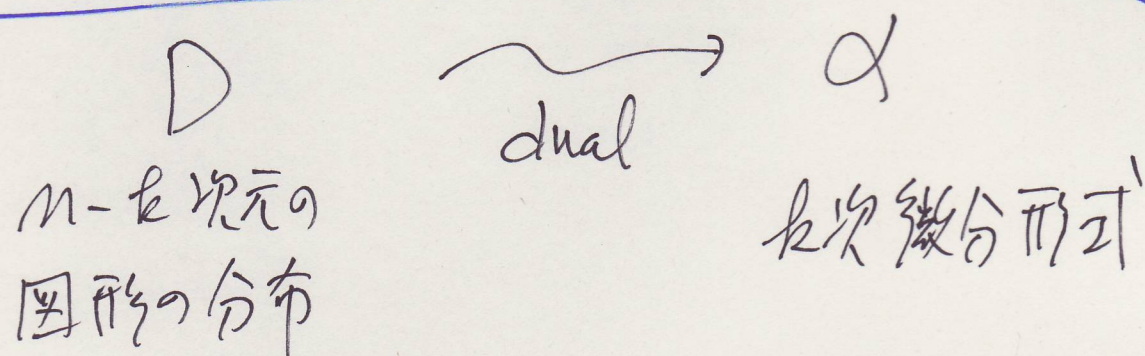
例

 dx 1次微分形式平面 $x=c$ の分布
に对应 dy 1次微分形式平面 $y=c$ の分布
に对应 dx, dy 2次微分形式直線 $\begin{cases} x=c \\ y=c \end{cases}$ の分布
に对应

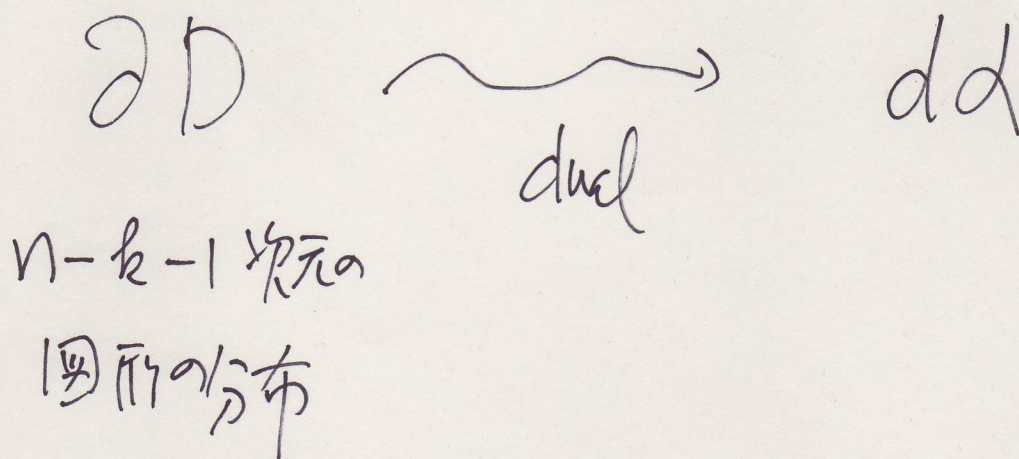
外微分

44

$\dim X = n$ の時

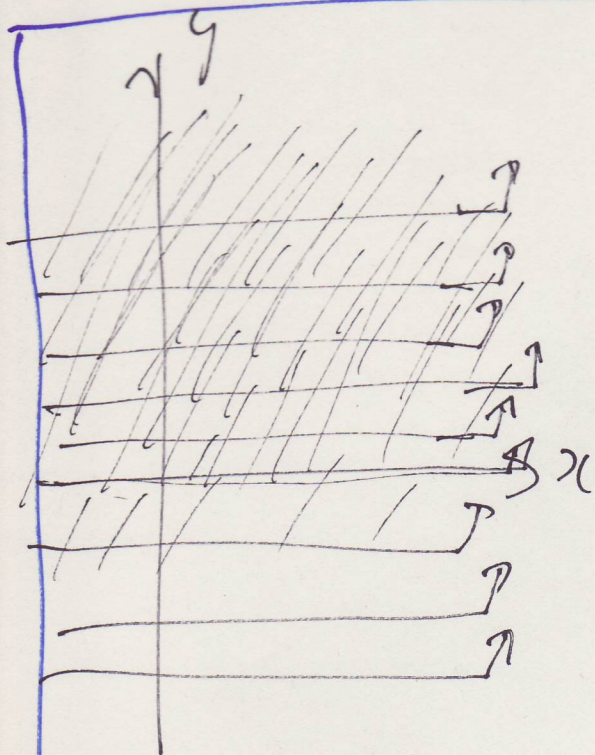


このとき、k+1 次微分形式 $d\alpha$ を

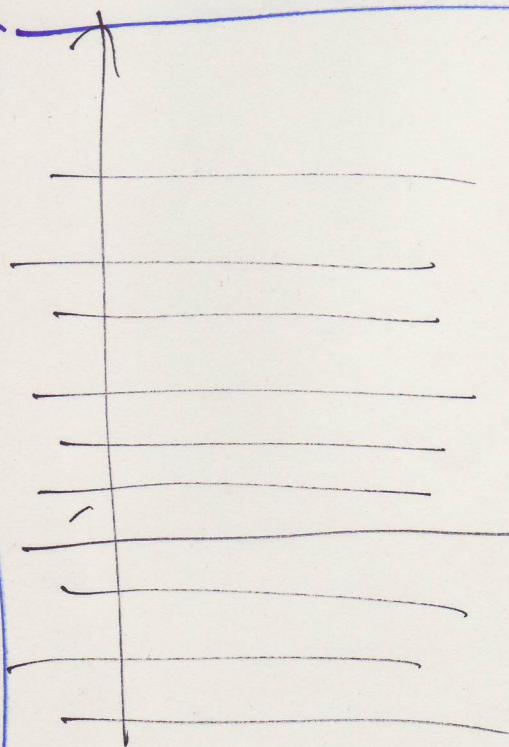


により定義される

例


 y : 関数 $(a) \mapsto b$

0次微分形式

 半平面 $y \geq c$ の分布に
対応。

 dy 1次微分形式

 直線 $y=c$ の
分布に対応。

$$\int_Y d\alpha = \int_{\partial Y} \alpha$$

① α が分布 D に対応して
 113 と仮定する。

$$\underbrace{\partial(D \cap Y)}_{\text{1次元}} = \underbrace{\partial D \cap Y}_{\text{左辺}} \cup \underbrace{D \cap \partial Y}_{\text{右辺}}$$

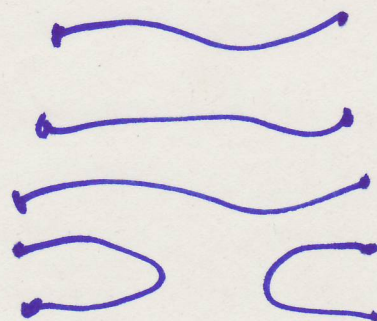
1次元

両端を

結んで113.

左辺

右辺



$$\frac{\exists \gamma \gamma^0 \cong \gamma \text{ " } IL-IL}{}$$

$$d(\alpha \wedge \alpha') = d\alpha \wedge \alpha' \\ \pm \alpha \wedge d\alpha'$$



$$D \rightsquigarrow \alpha$$

$$D' \rightsquigarrow \alpha'$$

$$\Rightarrow D \cap D' \rightsquigarrow \alpha \wedge \alpha'$$

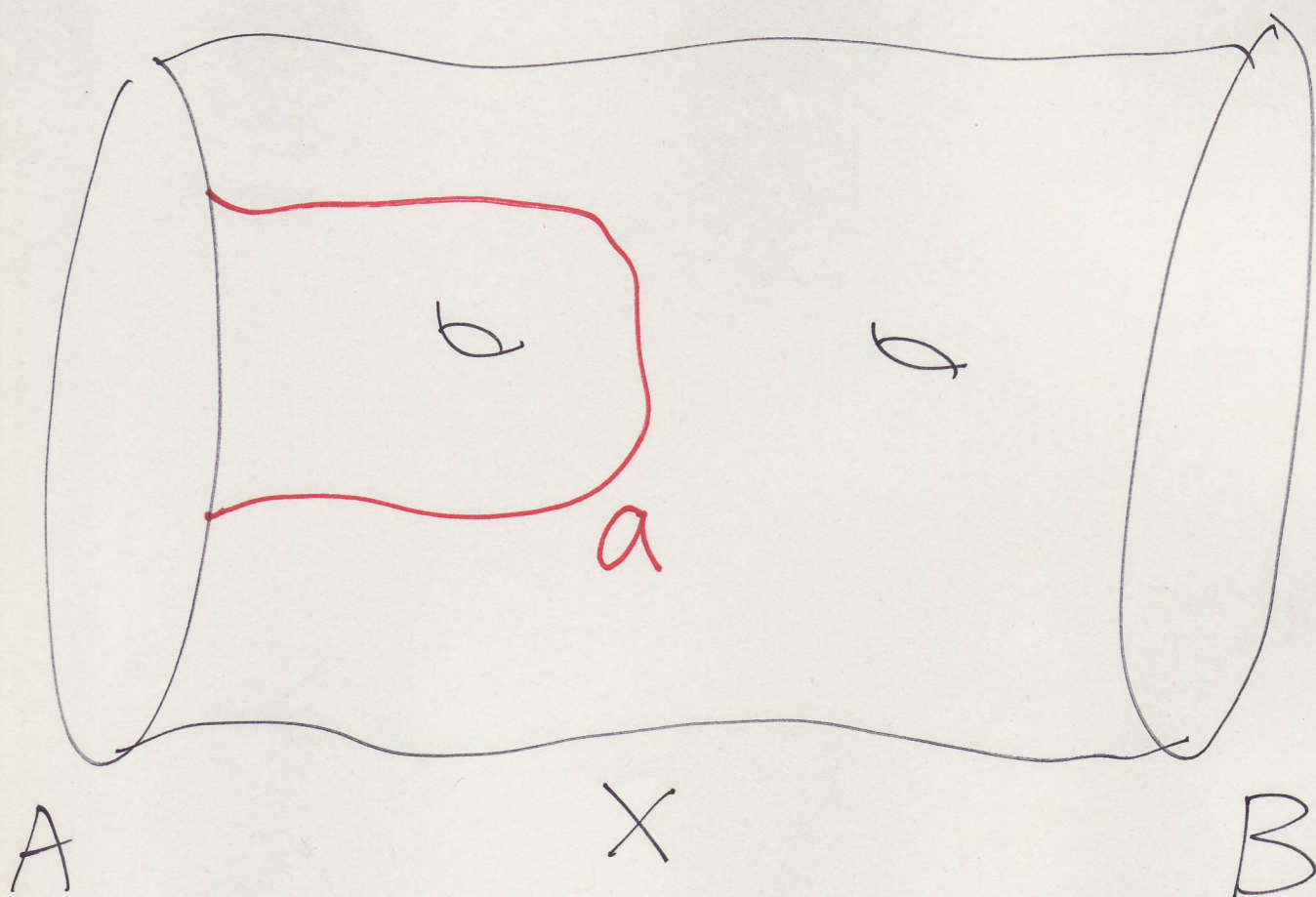
$$\partial(D \cap D') \rightsquigarrow d(\alpha \wedge \alpha')$$

$$(\overset{\parallel}{\partial D}) \cap D' \rightsquigarrow d\alpha \wedge \alpha'$$

$$\cup(D \cap (\partial D')) \rightsquigarrow \alpha \wedge d\alpha' //$$

以上の準備の下で...

48



$$\dim X = k + l$$

$$Z_k^{\mathbb{R}}(X, A) \times \left\{ \alpha \mid \begin{array}{l} \text{長次微分形式} \\ \bullet d\alpha = 0 \\ \bullet A \text{ の近傍で } 0 \end{array} \right\}$$

(重み $\mathbb{R}$, 向きあり)

$$\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a, \alpha \longmapsto \int_a \alpha$$

また、ストークスの定理から..

$$H_k(X, A; \mathbb{R}) = Z_k^R(X, A) / \sim$$

$$a \sim a' \iff \text{ある } b \text{ に対し} \\ \partial b = a - a'$$

$$H_{DR}^k(X, A) = \left\{ \alpha \mid \begin{array}{l} d\alpha = 0 \\ \alpha \text{ の } A \text{ の成分で } 0 \end{array} \right\}$$

ド・ラーム コホモロジー

$$\left\{ d\beta \mid \begin{array}{l} \beta: \\ A \text{ の } \\ \text{成分で } 0 \end{array} \right\}$$

とみると「互いの認識」は

$$H_k(X, A; \mathbb{R}) \times H_{DR}^k(X, A) \longrightarrow \mathbb{R}$$

にまで「落ちる」.

ド・ラームの定理

定理

$$H_k(X, A; \mathbb{R}) \times H_{DR}^k(X, A) \longrightarrow \mathbb{R}$$

は **双線型**

特に

$$\dim H_k(X, A; \mathbb{R}) = \dim H_{DR}^k(X, A)$$

がわかる。

一方 ポンカシ双対性の「R 版」が

あり

$$\dim X = k + l$$

定理 (ポンカシ双対性)

X が向きづけられていいる。

$$H_k(X, A; \mathbb{R}) \times H_l(X, B; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a, \quad x \quad \mapsto \quad " \# (a \cap x) "$$

は **非退化**

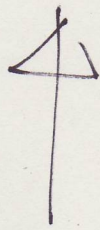
特に

$$\dim H_k(X, A; \mathbb{R}) = \dim H_l(X, B; \mathbb{R})$$

比較すると

($\dim X = k+l$
 X : 向きつけられている)

$$H_k(X, B; \mathbb{R}) \cong H_{DR}^k(X, A)$$



図形の情報



微分形式の情報

この同型は、さきほどの

$$D \xrightarrow{\text{dual}} \alpha$$

k 次元の図形の
分布

k 次元微分形式

に対応する写像である。

まとめ

- 双対性 を 幾何学において
考察すると

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ホモロジー群} \\ \text{コホモロジー群} \end{array} \right.$ が 結実した

- これらは.

カラゴリー $\left(\begin{array}{l} \text{空間の世界} \quad X \quad X \rightarrow Y \end{array} \right)$

ファレクター $\downarrow$

カラゴリー $\left(\begin{array}{l} \text{代数の世界} \quad H_*(X) \quad H_*(X) \rightarrow H_*(Y) \end{array} \right)$

2つの世界の間の橋をたしを
している。

幾何と代数的に調べる手段

[応用例 不動点定理]

となる

• ひきかえて、 $\left\{ \begin{array}{l} \text{ホモロジー} \\ \text{コホモロジー} \end{array} \right.$

は、代数、解析においても
現代数学の中で自由自在に
つかわれる(方法)となっている。

参考文献

・「高校生に贈る 数学ライフ」

日本評論社

・「微積分からトポロジーへ」

日本数学会 数学通信 第9巻第3号

2004年11月

<http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/>

~suriyoho/satsu.pdf