

幾何学的精神とその変容

—— トポロジーと多様体の概念を中心に ——

古田 幹雄

第1回

平面, 空間の内部の幾何学



曲面, 空間, 多様体 そのものの幾何学

第2回

双
対
性

対象

測子

認識手段

||

認識手段

測子

対象

||

幾何学における
ひとつの結実

$H_*(X; \mathbb{Z}_2)$

$H_{DR}^*(X)$

$H_*(X; \mathbb{R})$

(X : 多様体)

ポアンカレ双対性 : チェンについての性質

a と a' が:

交点数 に関して同一性質を持つ

$\Rightarrow$

a と a' の間に
チェンの膜を
はれる

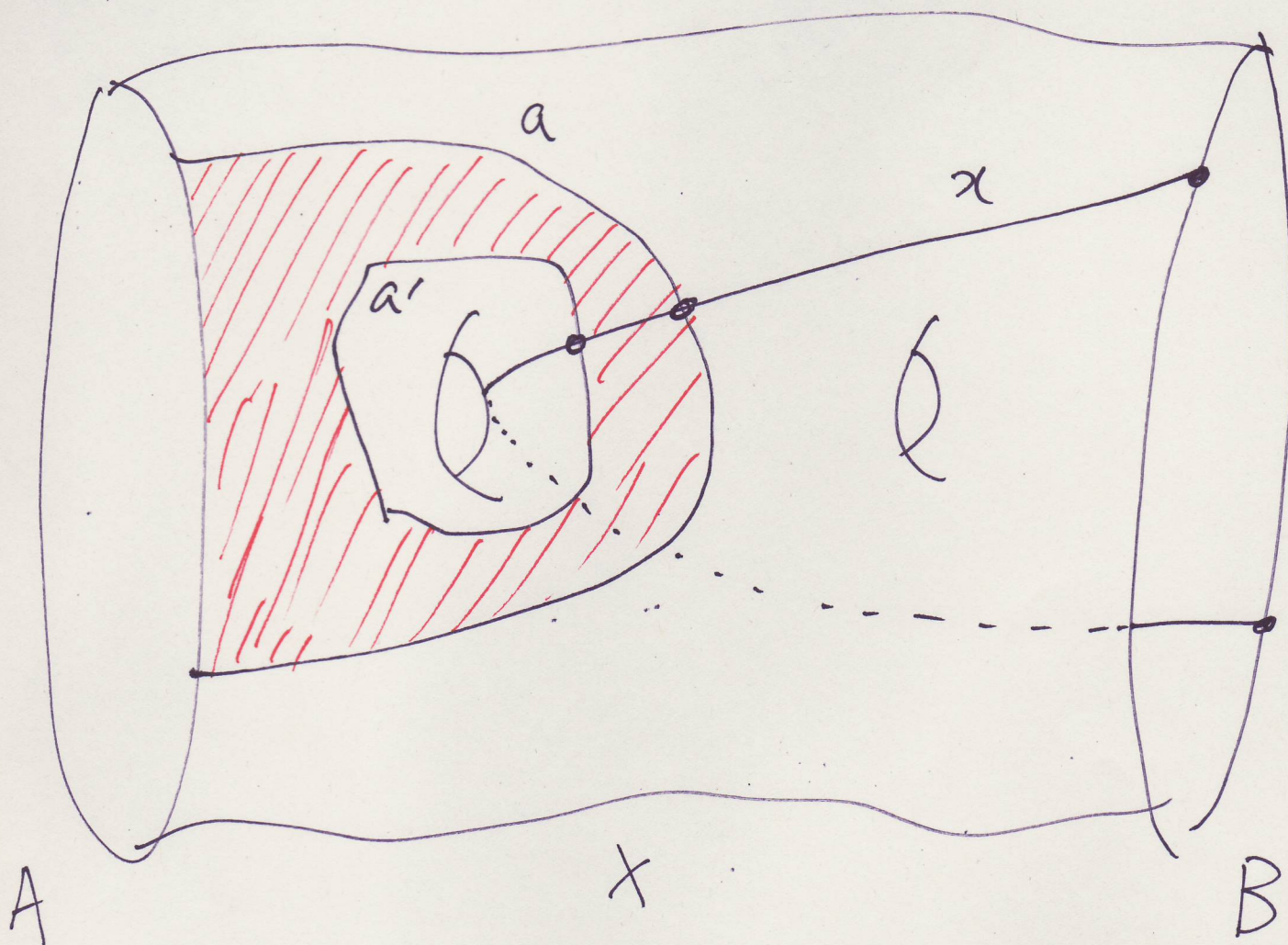
数値的・代数的性質

幾何学的帰結

前回の復習

$\dim X = 2$

3



$$Z_1(X, A) \times Z_1(X, B) \longrightarrow \mathbb{Z}/2$$

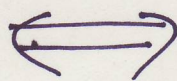
a

x

$\#(a \cap x) \bmod 2$

交点数を数える時に、1に不了して模断的にする

a と a' の間に
膜をはる子



ホムカ
双対性

任意の x に対して

$$\#(a \cap x) \equiv \#(a' \cap x) \bmod 2$$

ホップレカレ 双対性の 1113.2

4

$$H_1(X, A) \stackrel{\text{def}}{:=} Z_1(X, A) / \sim$$

$$H_1(X, A; \mathbb{Z}_2)$$

$$a \sim a' \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{膜をはる.}$$

$$\begin{array}{ccc} H_1(X, A) & \times H_1(X, B) & \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ [a] & [x] & \#(a \cap x) \bmod 2 \end{array}$$

この双線形写像は 非退化
(有限体 $\mathbb{Z}_2$ 上の)

すなわち.

$$\bullet [a] = [a'] \iff \#(a \cap x) \equiv \#(a' \cap x) \bmod 2$$

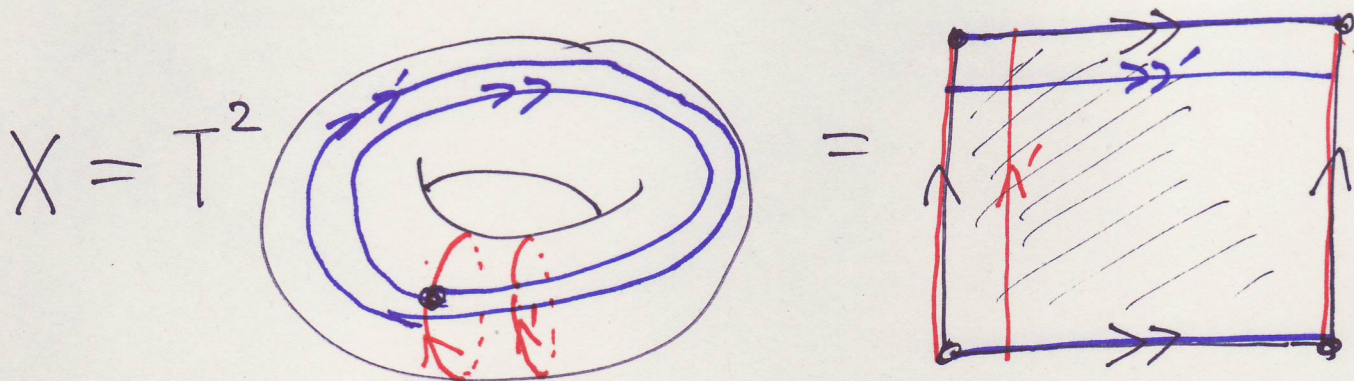
かつ

$$\bullet [x] = [x'] \iff \#(a' \cap x) \equiv \#(a' \cap x') \bmod 2$$

すなわち.

$H_1(X, A)$ と $H_1(X, B)$ とは 互いに
完全に認識しあっている.

$X = \text{トーラス}, A=B=\emptyset$ の場合



- $H_1(T^2; \mathbb{Z}_2)$ は $\mathbb{Z}_2$ 上の2次元のベクトル空間
- 生成元として $[\uparrow] = [\uparrow'']$, $[\rightarrow] = [\rightarrow']$ をとることからできる.

交点数	$\uparrow$ $\uparrow''$	$\rightarrow$ $\rightarrow'$
$\uparrow$ $\uparrow''$	$0 \pmod 2$	$1 \pmod 2$
$\rightarrow$ $\rightarrow'$	$1 \pmod 2$	$0 \pmod 2$

非退化性

行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod 2$ の行列式 $\neq 0 \pmod 2$

今回説明したいこと

「第2回」であられた概念：

- ホープレ双対性
[数値的・代数的性質 $\Rightarrow$ 幾何学的帰結]
- $H_*(X)$ [Xのあり性質を阜約する
ベクトル空間]

これから、

「第1回」で述べたような

「曲面、空間、多様体とその幾何学」

において、どのような展開を遂げたのか、

について説明したい。

1. $H_*(X)$ の使い方の例 代数トポロジー

2. 微分位相幾何学の誕生
 ———— エキゾチック環面の発見 ミルナー
 3. どうやってみつけたの？

4. $\partial(3次元) = 2次元$
 5. 特性数 同位理論
 6. 特性数の不思議な性質
 (7. 多様体の多様性) ルネ・トム

8. 最後に

$H_*(X)$ の使い方の例

8

幾何の世界

代数の世界

X

$H_*(X)$

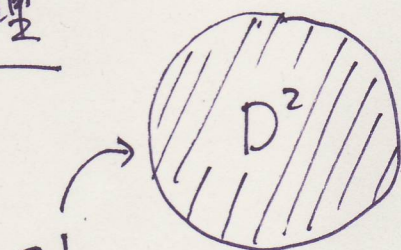
$X \xrightarrow{f} Y$

連続写像

$H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$

誘導写像

定理



$S^1 = \partial D^2$

次のような連続写像

$f: D^2 \rightarrow S^1$

は存在しない:

どの $p \in S^1$ についても $f(p) \neq p$

証明

使うこと. $\begin{cases} H_1(S^1; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \\ H_1(D^2; \mathbb{Z}_2) = \{0\} \end{cases}$

$S^1 \hookrightarrow D^2 \xrightarrow{f} S^1$

恒等写像

" H_1 "

$\mathbb{Z}_2 \rightarrow \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_2$

恒等写像

矛盾

□

ポアソンの問い

代数的に見て 3次元球面と

区別できない 3次元多様体は.

3次元球面と「同じ」ではないか?

ポアソンの予想

1904年 提出

3次元の「境界がなく」「コンパクト」な多様体が
「単連結」であれば. 3次元球面と「同相」.

X と Y が同相 $\iff$ 連続写像 $\begin{cases} X \xrightarrow{f} Y \\ Y \xrightarrow{g} X \end{cases}$

であって互いの逆となるものがある.

X が単連結 $\iff X$ の中の閉曲線には必ず
円板で膜かほれる.

(閉曲線. 円板は自己交叉してよい.)

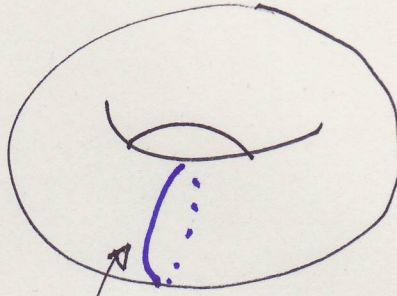
ポアンカレ予想の解決の歴史

10

- 2次元 ポアンカレ予想 (曲面の分類からわかる)



どんな閉曲線も
円板で膜かはれる



円板であったらとなかろうと。
2次元チェインの膜すらはれない

↑ この性質をもつ 境界がなくコンパクトな
曲面 (= 2次元多様体) は。
(2次元)球面しか存在しない。

- 5次元以上の ポアンカレ予想 スタール 1960
 - 4次元 ポアンカレ予想 フリードマン 1981
 - 3次元 ポアンカレ予想 ペレルマン 2002
- ↑ 本来のポアンカレ予想

ミルナーのエキゾチック球面

(1956)

• 普通の7次元球面 S^7 は.

8次元円板 D^8 の境界である

$$\underbrace{S^7}_{\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} \mid \sum x_i^2 = 1 \right\}} = \partial \underbrace{D^8}_{\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} \mid \sum x_i^2 \leq 1 \right\}}$$

• ミルナーは、2つの D^8 の境界の
一部をはりあわせた形をした
境界のある8次元多様体 Z^8 であらう

$$\Sigma^7 = \partial Z^8$$

が、普通の S^7 と そっくり のものをつくら

S^1 と Σ^1 は どう似て どう違うか 12

★ S^1 と Σ^1 とは 同相 である !!

$$S^1 \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{matrix} \Sigma^1$$

f と g は 連続 写像で互いの逆写像

となる. f, g が存在する.

★ S^1 と Σ^1 とは 微分同相 ではない !!

$$S^1 \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{matrix} \Sigma^1$$

f と g は なめらかな 写像で互いの逆写像

(座標表示すると
偏微分が
いくつでも可能)

となる. f, g は 存在しない

どうやって 証明するか?

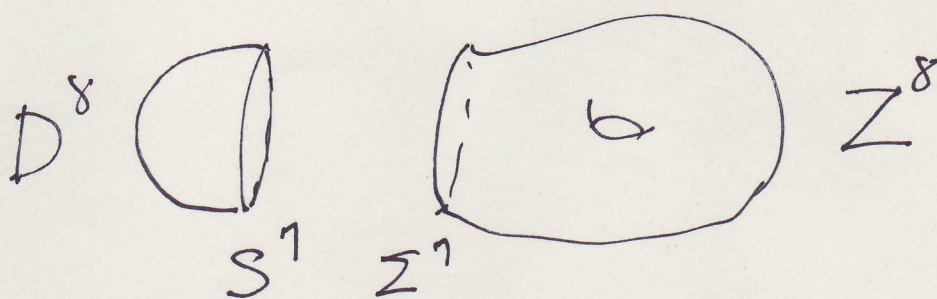
13

* S^1 と Σ^1 とは 同相 である

$\therefore$ 具体的に $S^1 \xrightleftharpoons[g]{f} \Sigma^1$ を
作る。 f と g は 連続 で 互いの逆

(実は f と g は 一点を除いてなめらか。
その一点がどうしてもなめらかにできない!)

* S^1 と Σ^1 とは 微分同相 ではない。



もし 微分同相 なら、
なめらかに はりあわせられる



この X の性質を調べ
矛盾を導く。

8次元多様体 X^8 のはらむ矛盾

ヒルツェブルフの符号数定理

(8次元の境界のない
コンパクトで向きのある
多様体 X に対して)

$$\sigma(X) = \frac{1}{45} (7 p_2(X) - p_1^2(X))$$

符号数

特性数

ミルナーの例の場合

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(X) = 1 \\ p_1^2(X) = 36 \\ p_2(X) : \text{整数} \end{array} \right. \Rightarrow 7 \nmid 81 \Rightarrow \text{矛盾}$$

□

符号数とは何の $\sigma(X)$

15

X^8 : コンパクト、境界なし、向きがある。

$$H_4(X; \mathbb{R}) \times H_4(X; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$H_4(X; \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間
基底 を 適当にとると

$$[a_1], [a_2], \dots, [a_m]$$

$$a_i, a_j \longmapsto \#(a_i \cap a_j)$$

行列

$$\begin{pmatrix} \#(a_1 \cap a_1) & \dots & \#(a_m \cap a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \#(a_1 \cap a_m) & \dots & \#(a_m \cap a_m) \end{pmatrix}$$

対称行列で、正負 (ホップカシ双対性)

$$\sigma(X) := \text{正の固有値の数} - \text{負の固有値の数}$$

ここまでのまとめ

ミルナーは、「同相」と「微分同相」が異なる概念であることを発見した

⇒ 多様体が微分同相であるとき「同じ」とみなす新しい幾何学の誕生

微分位相幾何
(微分トポロジー)

この関点で

n 次元球面と同相な多様体の個数

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
個数	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1	3

↑
ミルナーの最初の発見

これから説明したいこと

これまでのポイント

ミルナーは、ヒルツェブルフによる

の(X) = 「特性数による表示」
符号数

↑
 $H_*(X)$ の構造から
きまる数

(Xは
8次元)

という公式を利用した。

- * 特性数とは何か?
- * どうやって上の公式を
ヒルツェブルフは証明したのか

これを、8次元の代わりに2次元で説明する

向きあり $H_*(X; \mathbb{R})$ 向きを
仮定しない

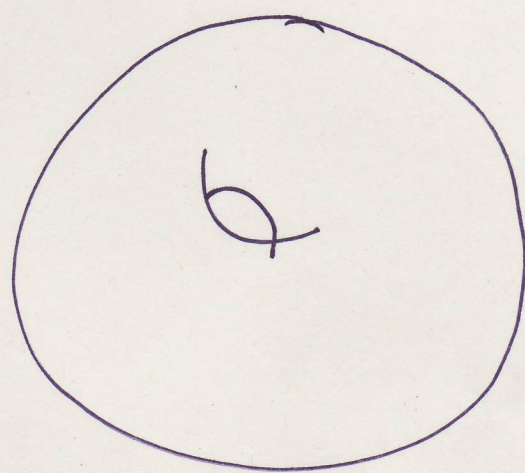
$H_*(X; \mathbb{Z}_2)$

閉曲面 = 境界のないコンパクトな
2次元多様体

境界あり

境界なし

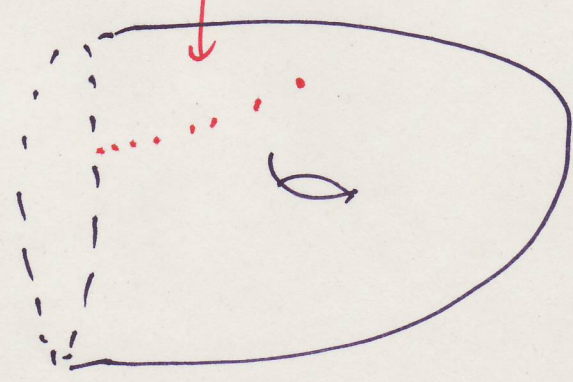
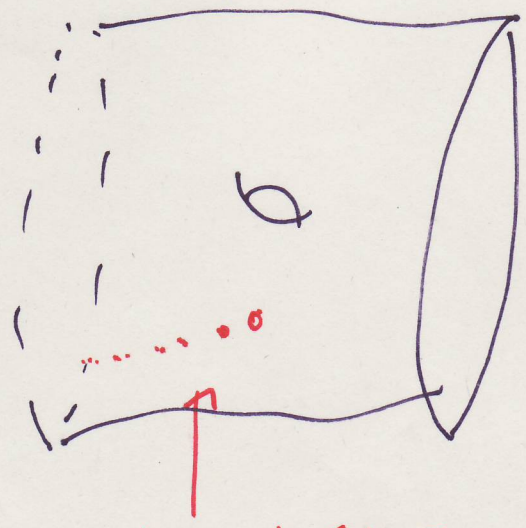
コンパクト



非コンパクト

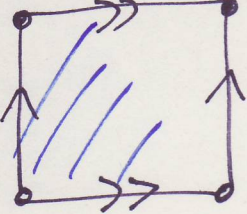
境界

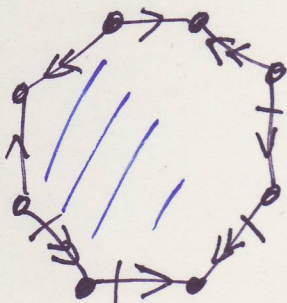
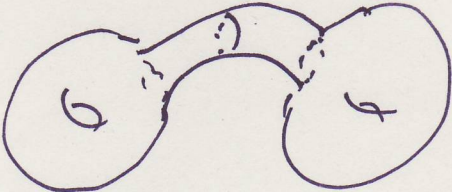
収束部分列を
もたない

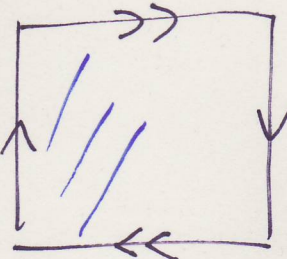
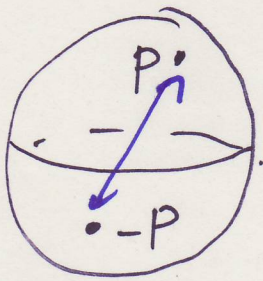


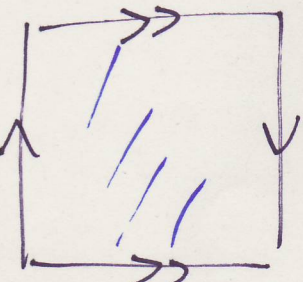
収束部分列を
もたない

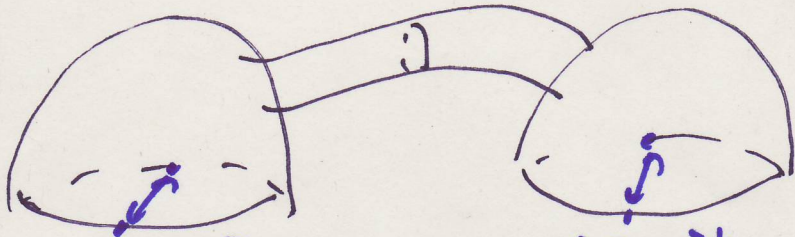
閉曲面の例

①  =  トラス T^2

②  =  $T^2 \# T^2$

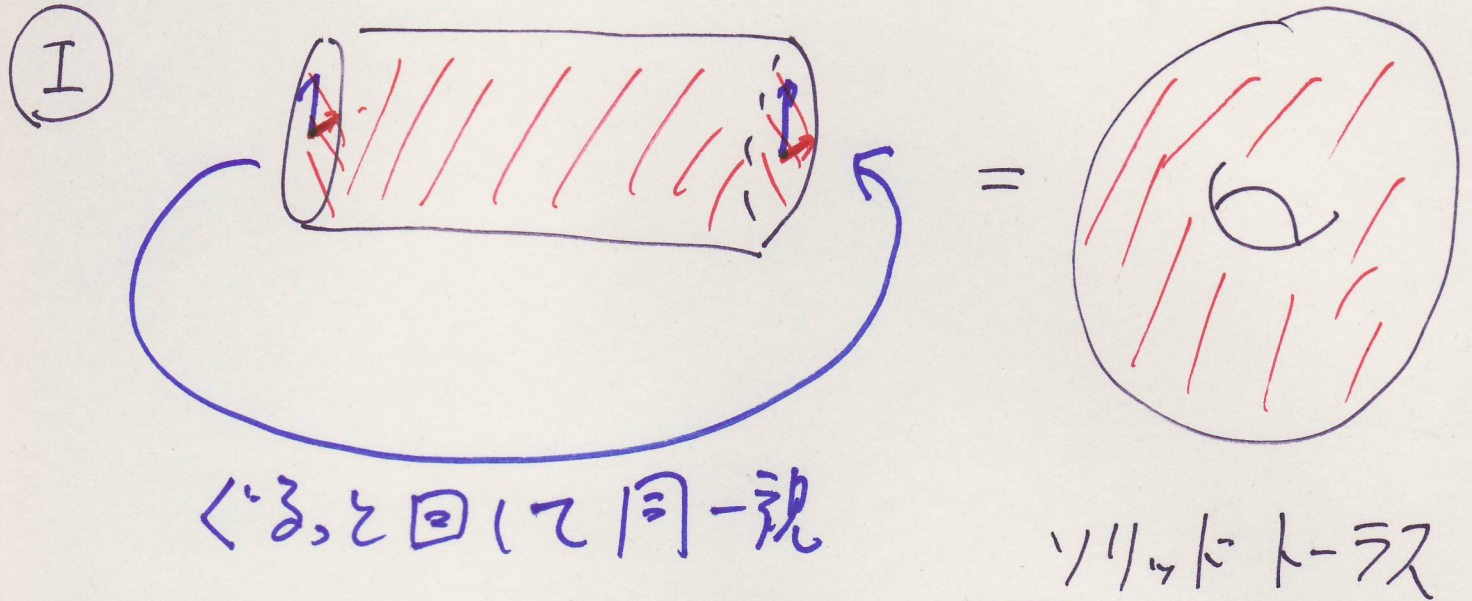
③  =  =  射影平面 RP^2
同一視 同一視

④  =  クラインの壺

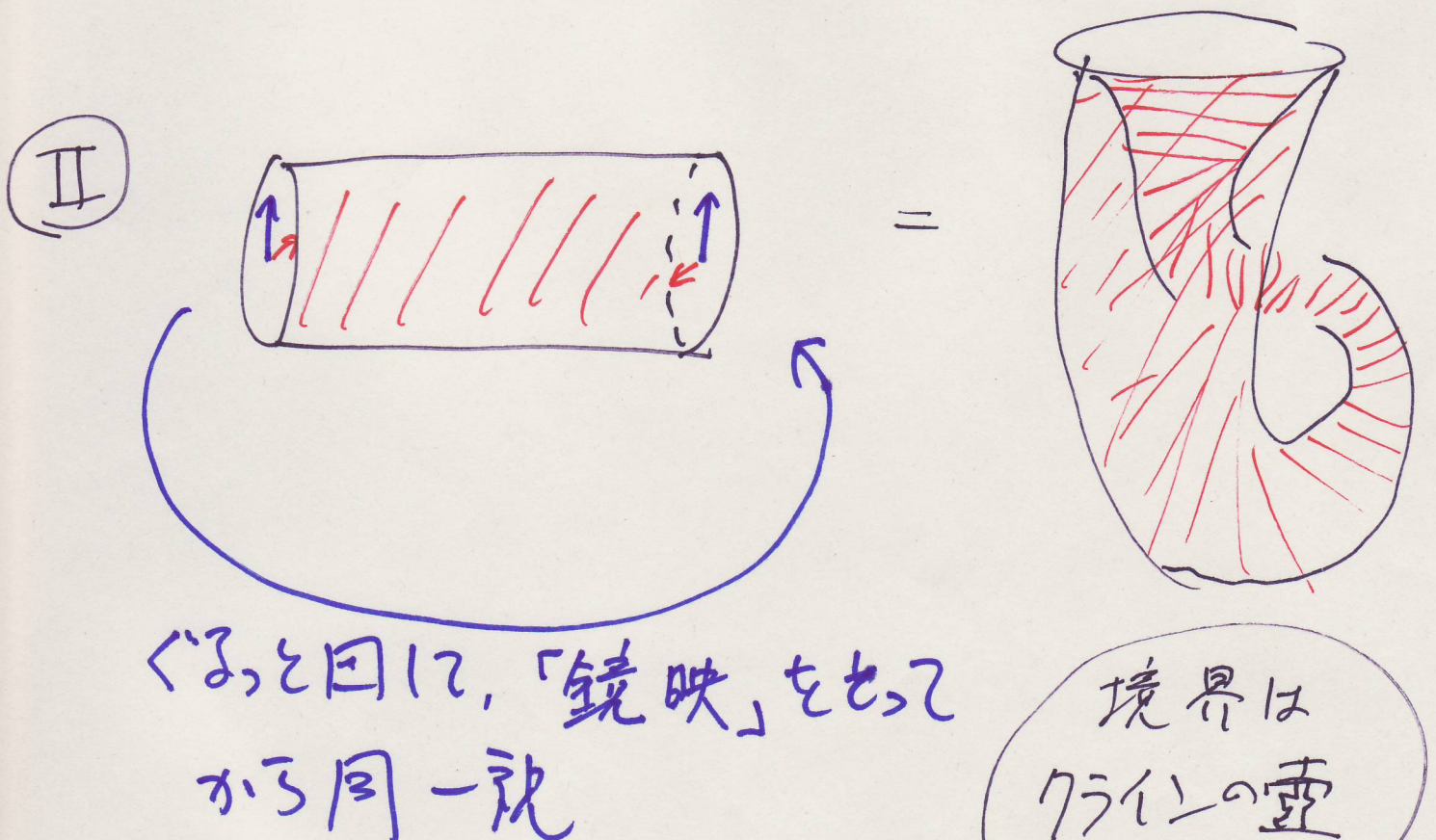
⑤  $RP^2 \# RP^2$
同一視 同一視

実は ④ = ⑤ (ひとつも2枚のメビウスの帯をはりあわせたもの)

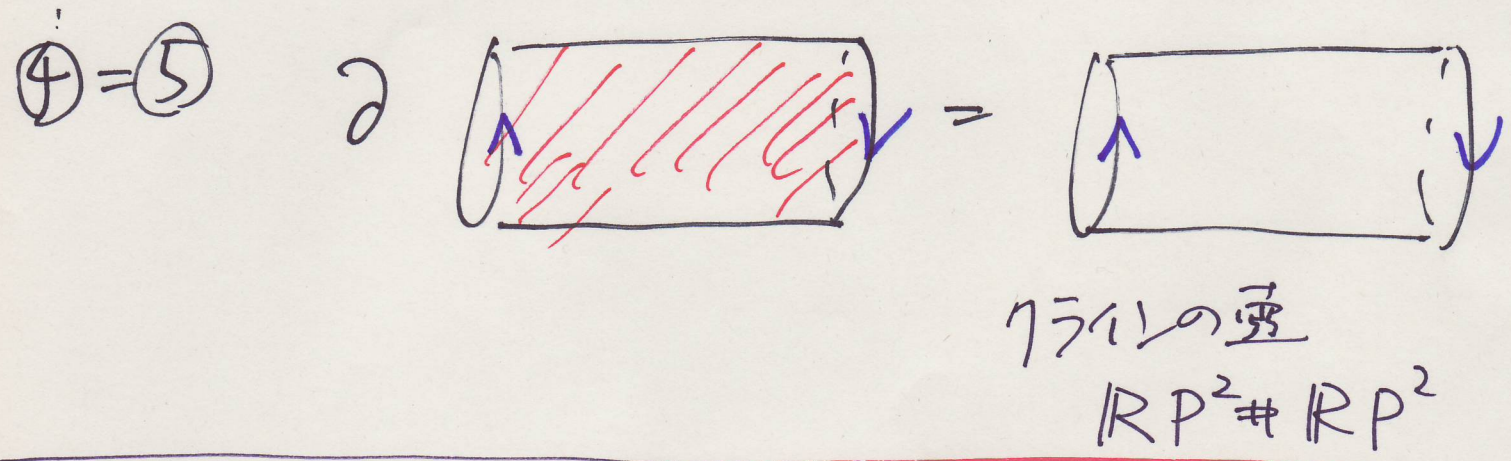
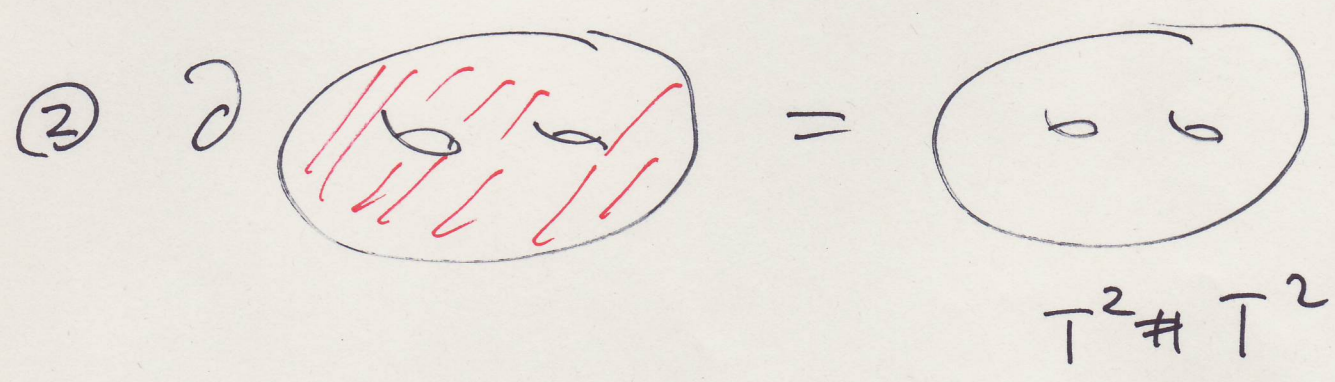
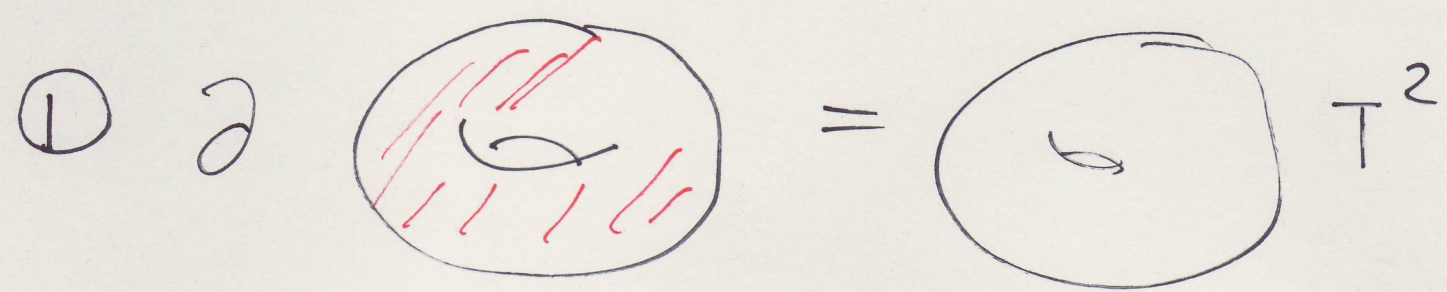
境界のある 3次元コンパクト多様体の例



境界はトーラス



「閉曲面の例」の中で: 3次元コンパクト
多様体の境界として かけるもの



問題 ③の  $\mathbb{R}P^2$ は どうか??
同一視

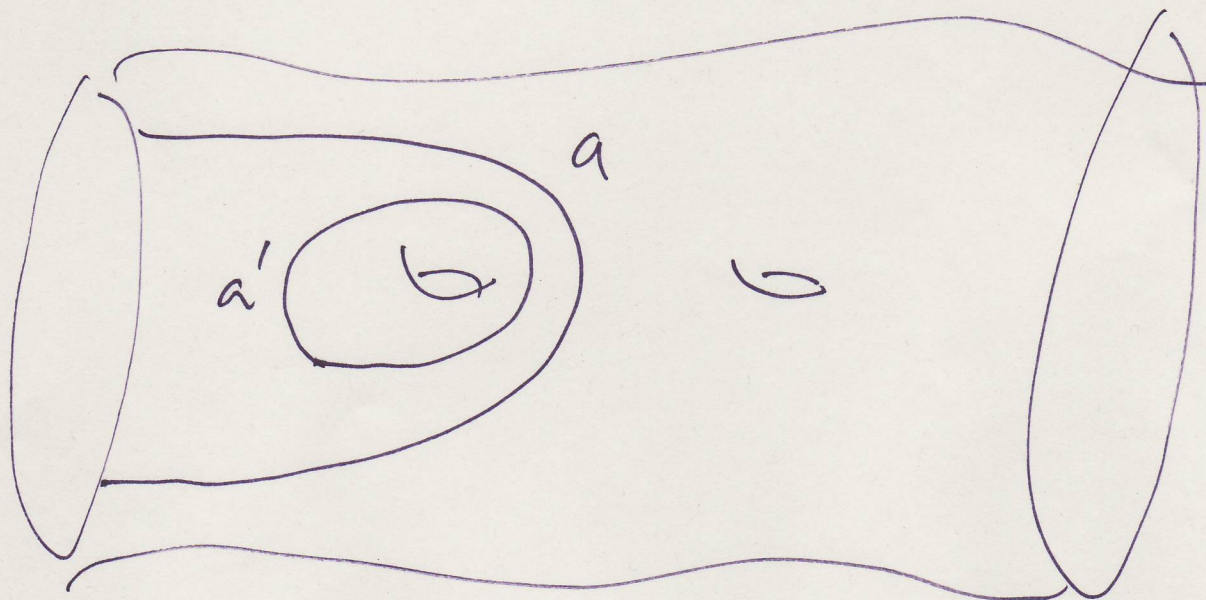
... 結論かという

44
合

不可能!!

RP^2 は境界と12かけない!!

上の問と答は 次の問と答に似る



問 a と a' の間に膜をはれるか?

||

問 a と a' は ある膜の境界か?

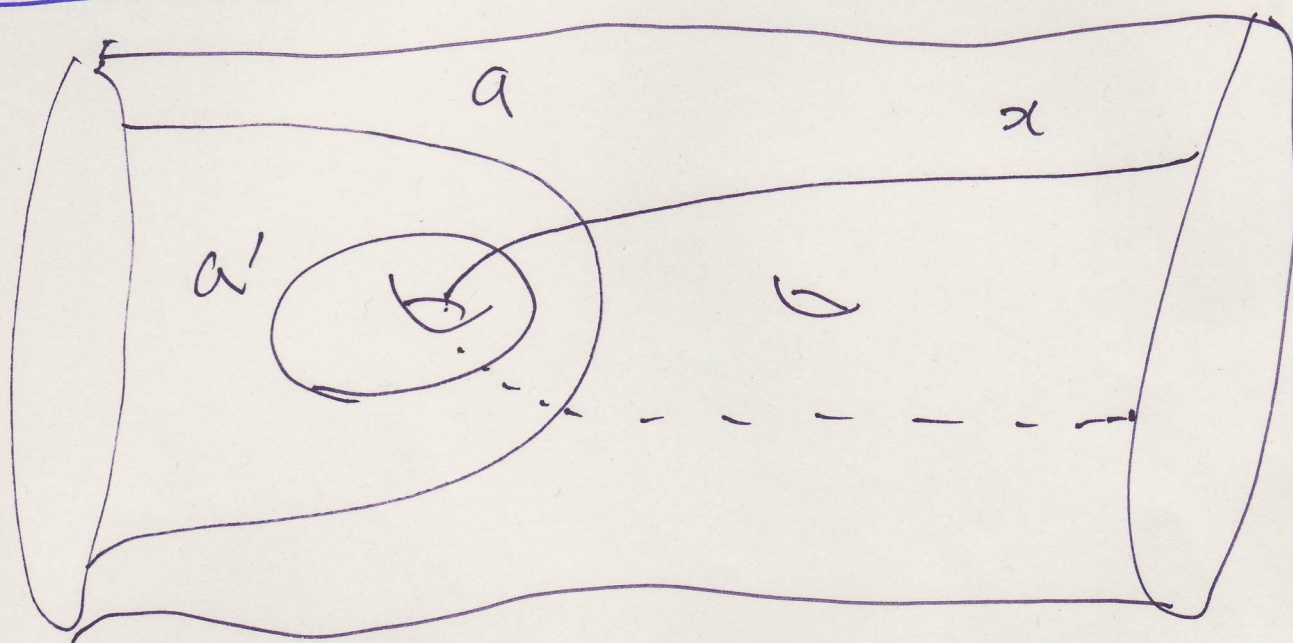
答 1

(必要条件)

$\exists!$, ある α に対して

$$\#(a \cap \alpha) \not\equiv \#(a' \cap \alpha) \pmod{2}$$

であれば不可能.



答 2

(十分条件)

$\exists!$, どの α に対しても

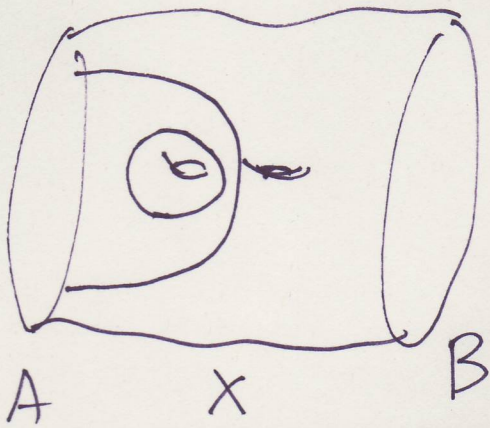
$$\#(a \cap \alpha) \equiv \#(a' \cap \alpha) \pmod{2}$$

であれば可能

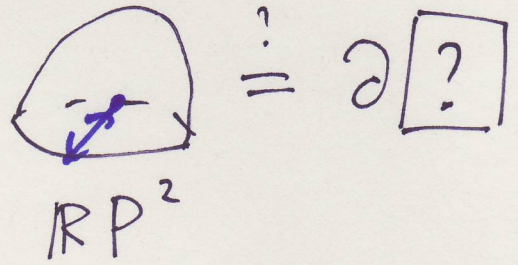
[ホップレカレ双対性]

今回の問いと 前回の問いとの相違 24

前回

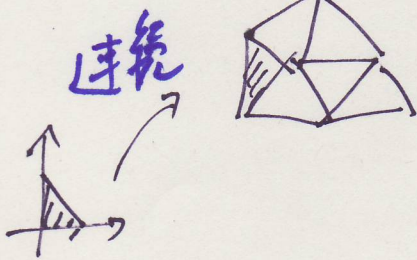


今回

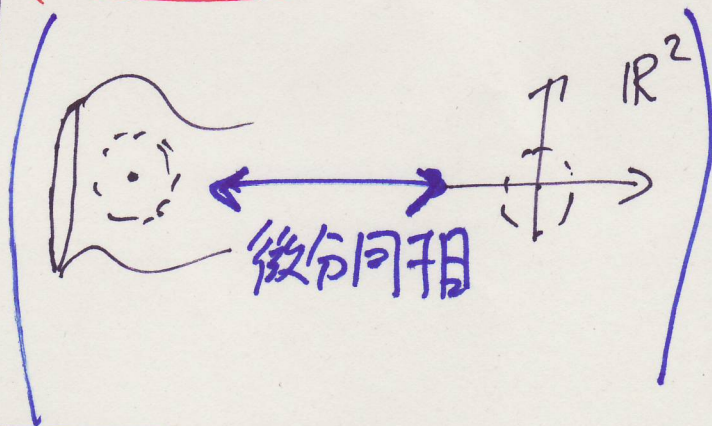


対象

チェインとその境界



多様体とその境界



世界

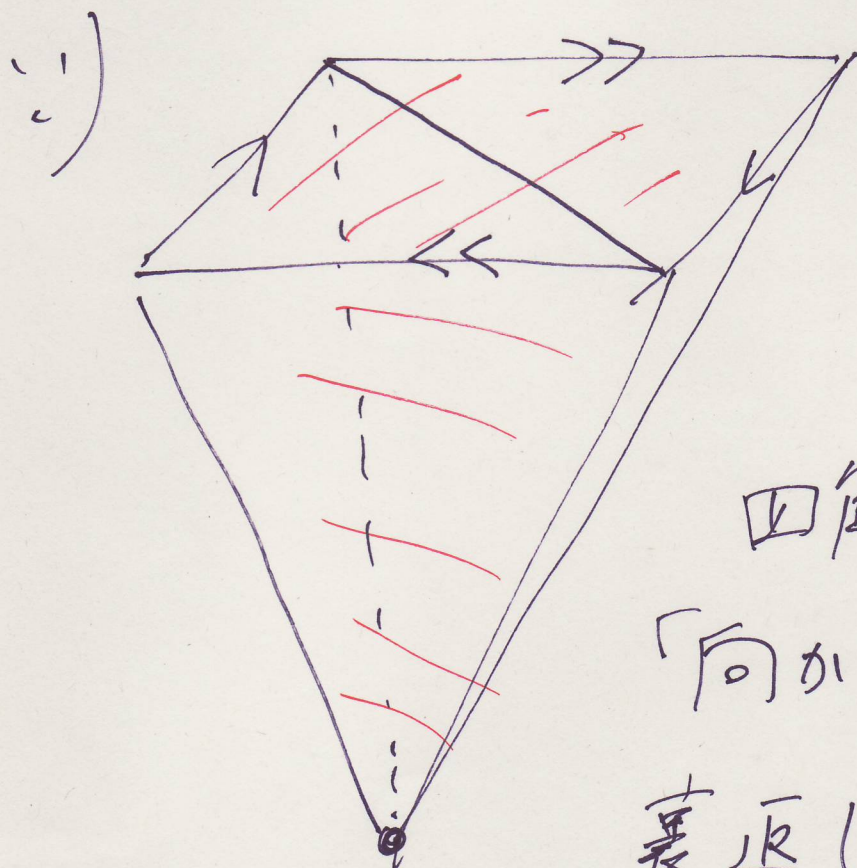
ひとつの多様体 X の内部にある対象を考える。
いわば、 X が世界

ありとあらゆる対象のすべての可能性を考える。

実は $\mathbb{RP}^2$ は “3次元 コンパクト チェイン” の

境界 になら なっている

今回の問題は
より精密な
問題であると
いえる。



四角錐の

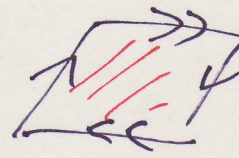
「向かい合う面」を

裏返しにしてはりつけよ。

⇒ できあがった図形は

2個の三角錐から成る。

多様体
ではない!!

その境界は  $= \mathbb{RP}^2$

□

「今日の問題」に

- ・境界とにかける 必要条件
- ・境界とにかける 十分条件

があり、両者の一致を示すことにより、問題は完全に解かれる。

以下、必要条件について説明し、

それが実は十分条件でもあることは、

言明のみにとどめる。

(ポアンカレ双曲性の説明でもそうだった。
ド・ラームの定理)

交点数のかわりに与えるもの : 特性数^{2.7}

$\mathbb{R}P^2$ が ∂Z の形にかけないことの
証明の方針

step 1 閉曲面 X に.

特性数 $w_1^2(X) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

を対応させる.

step 2 $X = \partial Z$ であるなら

$$w_1^2(X) = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

であることを証明する.

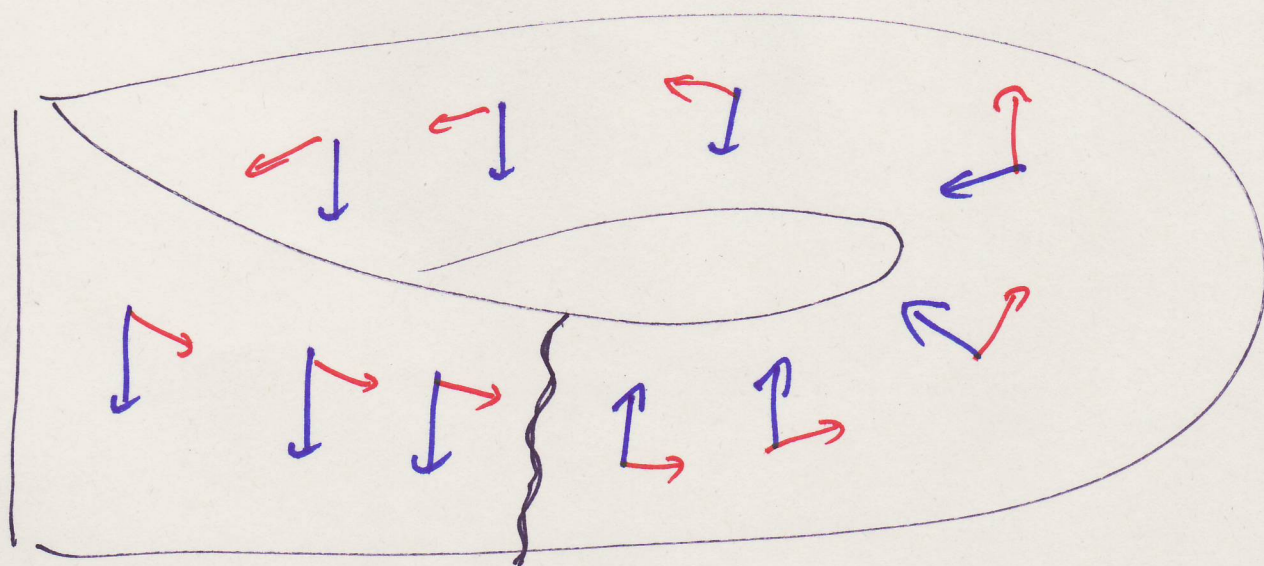
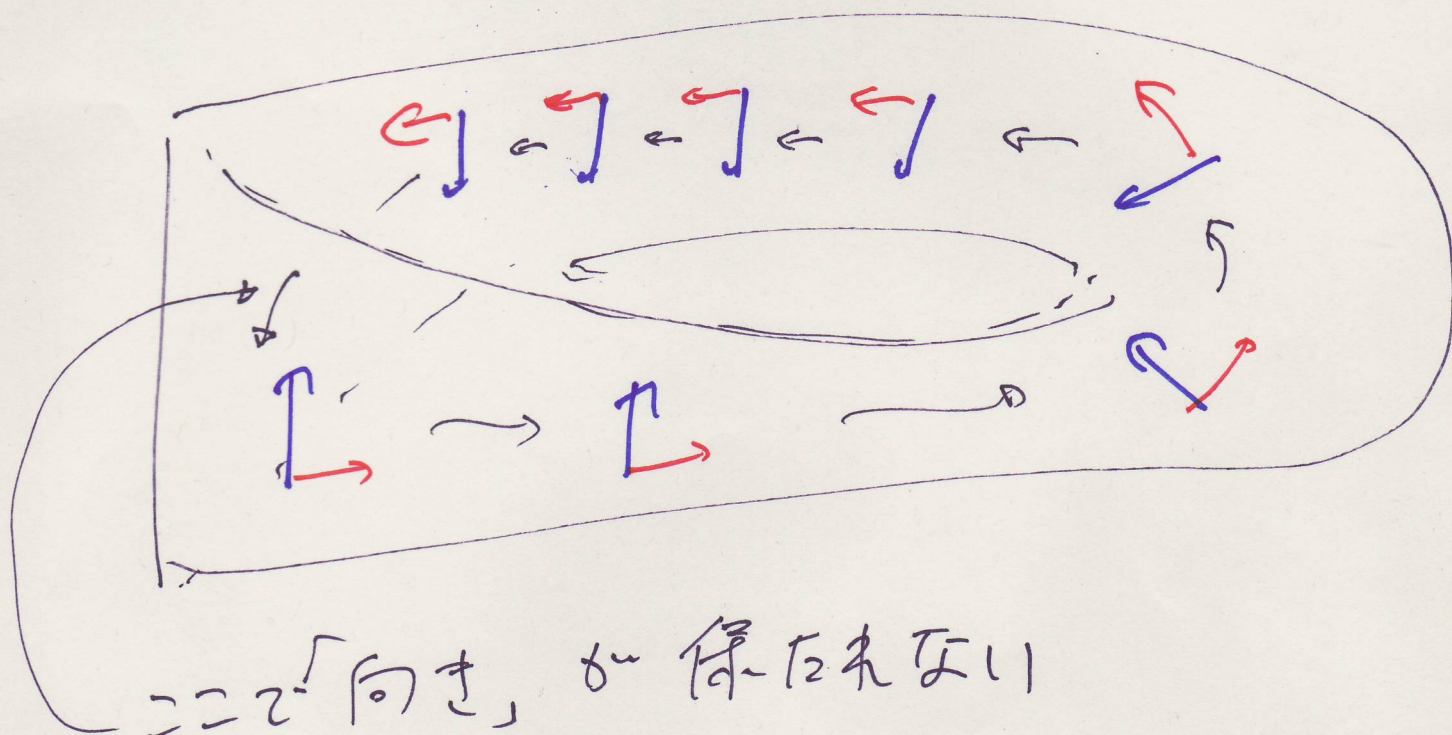
step 3 $w_1^2(\mathbb{R}P^2) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

をチェックする

□

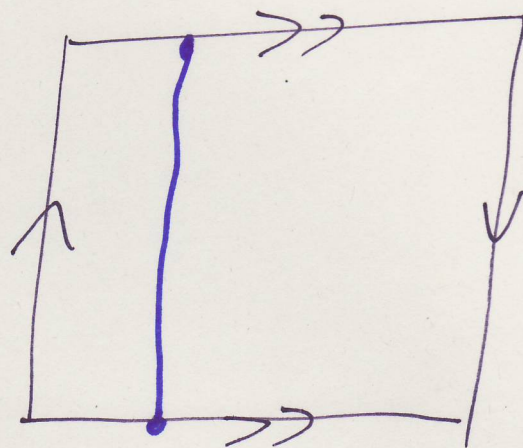
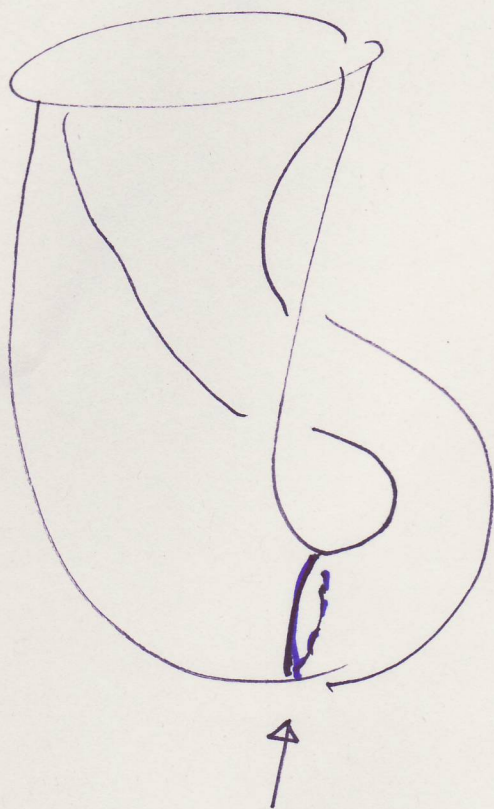
向きをいれるための障害はどこだ？

メビウスの帯の場合



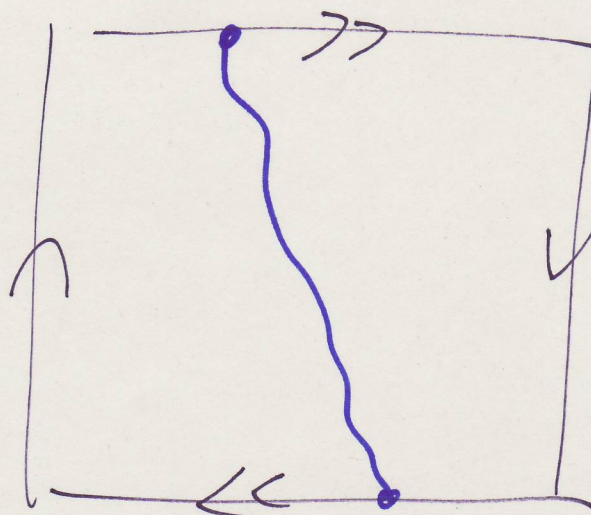
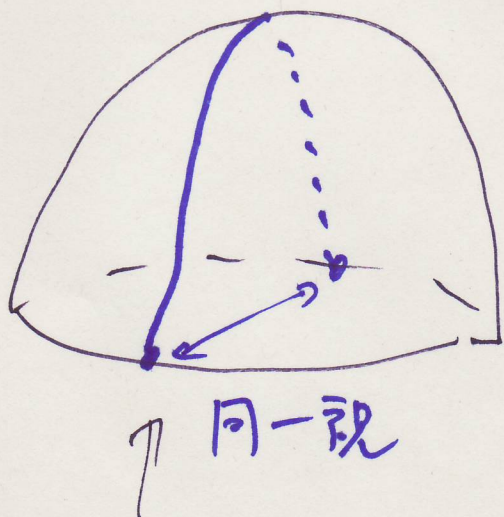
↑
ここでも向きが保たれない

クラインの $\frac{1}{25}$ の場合



ここを切ればいい

射影平面の場合



ここを切ればいい

$$w_1^2(x) \in \mathbb{Z}/2 \text{ の定義}$$

切り口の両側は逆の向きか入っているようにとる。

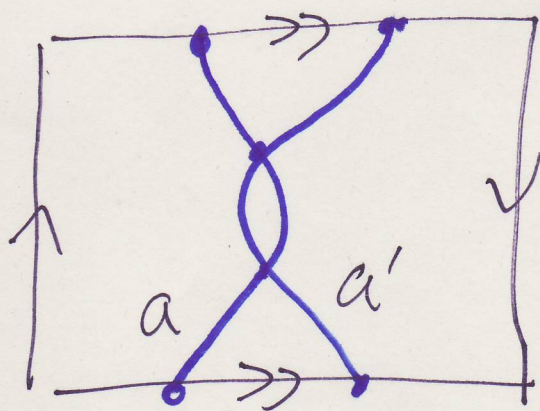
「向きか入るような切り口」を

2通りとる。 a, a' としよう。

その2つの「切り口」の交点の
個数 mod 2 が $w_1^2(x)$

$$w_1^2(x) = \#(a \cap a') \bmod 2$$

7ライルの壺

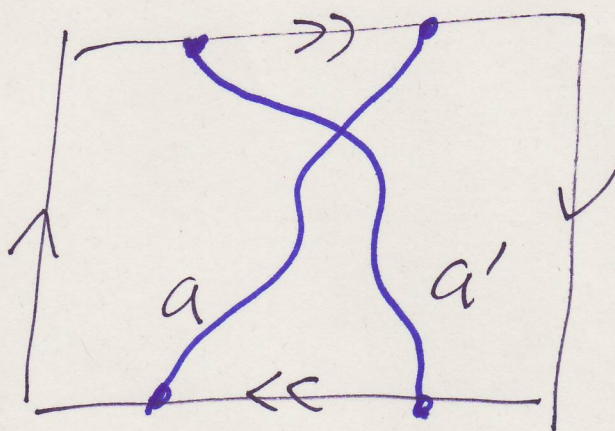


$$\#(a \cap a') = 2$$

$$w_1^2(\text{7ライルの壺}) \equiv 0$$

$$\in \mathbb{Z}/2$$

射影平面



$$\#(a \cap a') = 1$$

$$w_1^2(\mathbb{RP}^2) \equiv 1 \in \mathbb{Z}/2$$

$w_1^2(X)$ の性質

31

(1) まず, $\#(a \cap a') \bmod 2 \in \mathbb{Z}/2$

は, a, a' の取り方によらず決まる。

—— だからこゝろ, X のみに依存する
よ, $\mathbb{Z}$ 記号 $w_1^2(X)$ が正当化
される。

(2) $X = \partial Z$ のとき

$$\#(a \cap a') \bmod 2 = 0$$

即ち, $w_1^2(X) = 0 \in \mathbb{Z}/2$

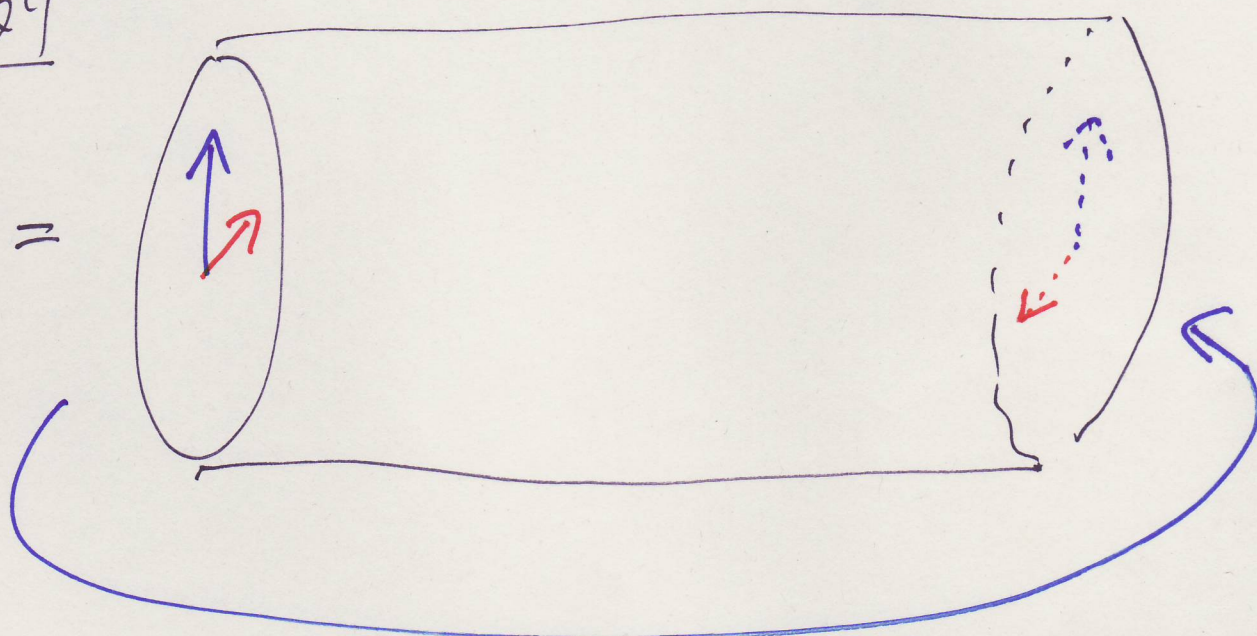
実は (1) と (2) の証明は似ている。

ここでは (2) だけを説明する。

$$X = \partial Z \text{ のとき}$$

例

$Z =$

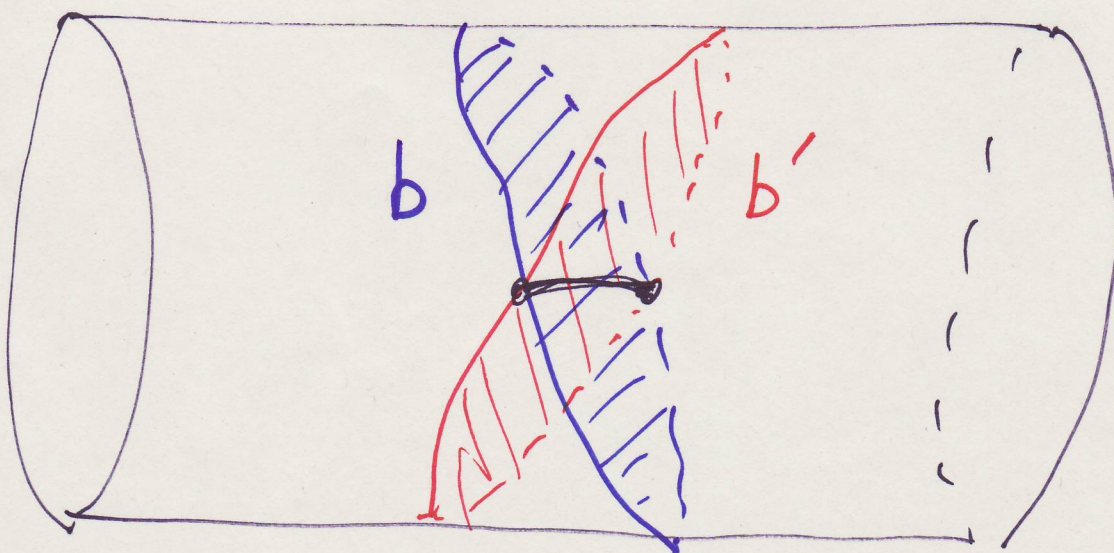


鏡映をとってから「はりあせ」

Z に切断面をいれて、

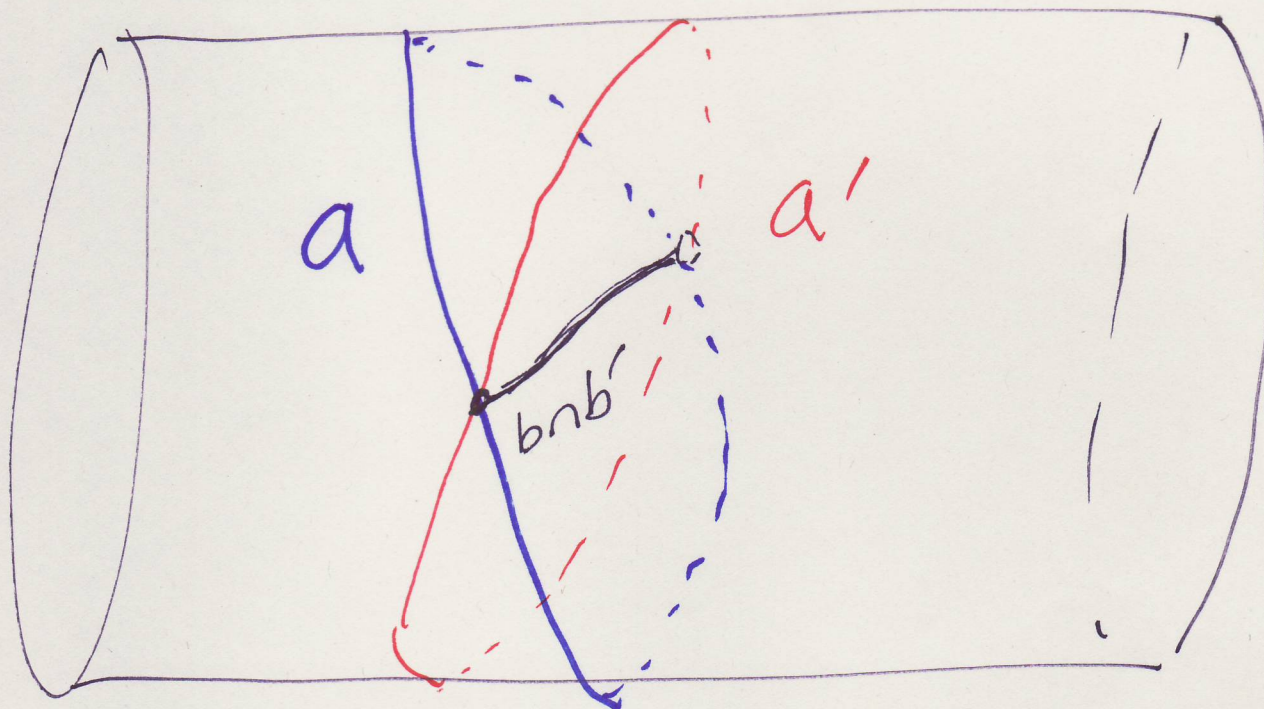
向きづけ可能にする 切り方を

2通りとる。 b, b' とおく



$$a = \partial b$$

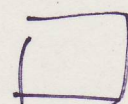
$$a' = \partial b'$$



$$\partial(b \cap b') = a \cap a'$$

↑
1次元. よって
境界は偶数個

証明終



境界となる必要条件がわかった!

34

その逆は成り立つだろうか?

(幾何学的な、より深い問い)

答 Yes

特に 閉曲面の分類定理と

用いれば、「Yes」はすぐわかる。

分類



S^2



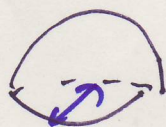
T^2



$T^2 \# T^2$



$T^2 \# T^2 \# T^2$



$\mathbb{R}P^2$



$\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$



$\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$

• 分類表を見る。

$$\bullet w_1^2(\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_{\text{奇数個}}) = 1 \in \mathbb{Z}/2$$

奇数個

$$\text{よって } \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_{\text{奇数個}} \text{ は}$$

奇数個

∂Z の形 にはけな。

• それ以外の閉曲面 X に対しては

$X = \partial Z$ となる Z を具体的に
作りこみかてする。

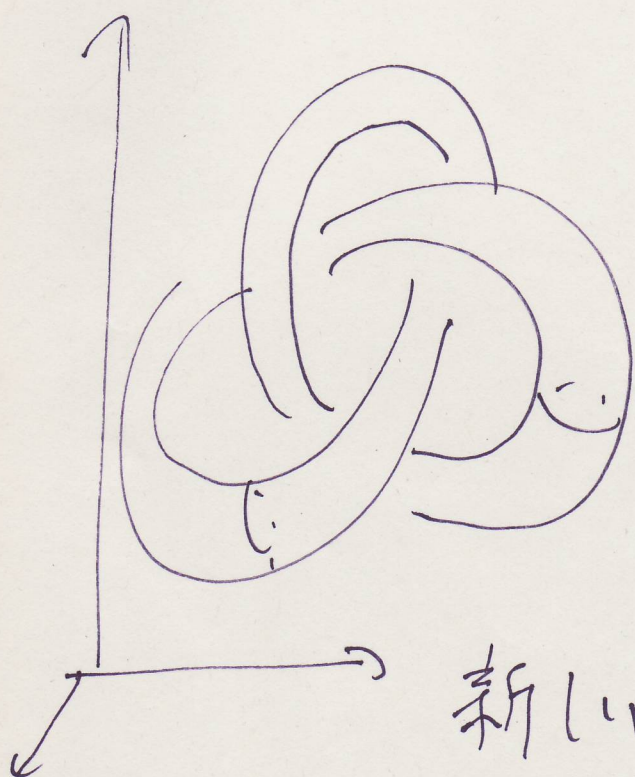
——— このようにして閉曲面 X に対して。

定理 $w_1^2(X) = 0 \iff X = \partial Z$ となる Z が
存在する

高次元の場合はいかが?

多様体を枚挙することは
事実上不可能である。

例 3次元多様体は、少なくとも
結び目の多様性 ほとんどの
多様性を持つ

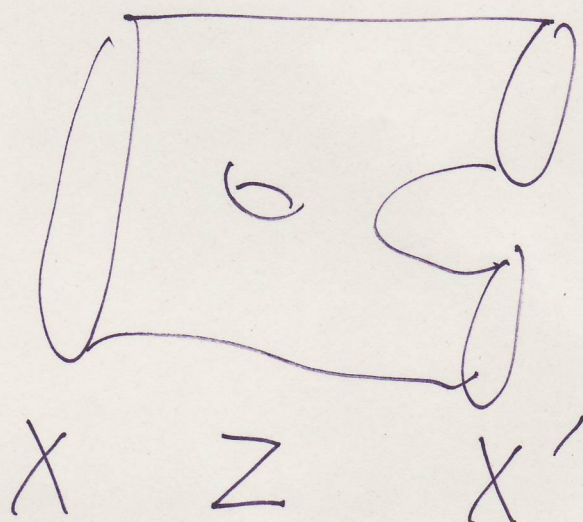


$\mathbb{R}^3$ から結び目の
近傍を切り取り、
別のやり方で
もう一度はりあせると
新しい 3次元多様体となる。

発想の逆転 : $\mathcal{M}$ の同境理論

・多様体を荒く分類しよう!

・ $X \sim X' \iff$ ある Z に対して



とかけろ.

$$\partial Z = X \cup X'$$

・同値類を $[X]$ とおく

・ $\Omega_n := \{ \text{n次元閉多様体} \} / \sim$

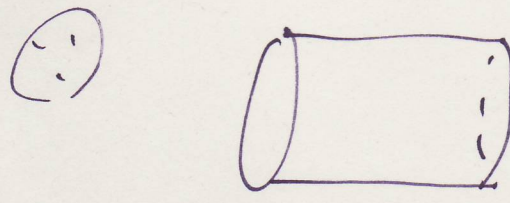
・ 足し算

$$[x] + [x'] = [x \cup x']$$

$$[\emptyset] + [\emptyset] = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

例 34

$$[x] + [x] = [\emptyset] \quad \text{i.e.} \quad 2[x] = 0$$

()

$$\partial(X \times [0, 1]) = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$$

$\Omega_n = \{[x]\}$ は 有限体 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の
 n -7 トル空間 になる

注 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ は 環になる $[x] \cdot [z] = [x \times z]$

トム. りんたー. その他の人々による

深い考察の結果 示した点

$$\Omega_n \times \left\{ \begin{array}{l} \text{特性数の} \\ \text{"すべて"の可能性} \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{Z}/2$$

(*)

$$[X], \quad w_1^2 \longmapsto w_1^2(x)$$

上の双線形写像が連続で、
非退化である。

$$\Omega_0 \cong \mathbb{Z}/2 \quad \Omega_1 \cong \langle 0 \rangle \quad \Omega_2 \cong \mathbb{Z}/2 \quad \Omega_3 \cong \langle 0 \rangle$$

(*) 正値には「すべて」ではなく、適当な
部分をとる必要がある。

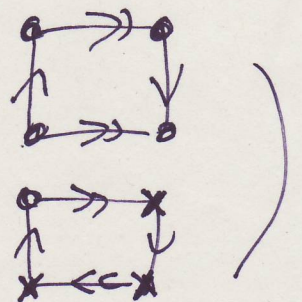
2次元の場合に戻って……

$w_1^2(x)$ の不思議な性質

	S^2	 T^2	 $T^2 \# T^2$	 $\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$
$w_1^2(x)$	0 mod 2	0 mod 2	0 mod 2	1 mod 2	0 mod 2
$\dim H_1(x; \mathbb{Z}/2)$	0	2	4	1	2
オイラー数	2	0	-2	1	0
$\dim H_1$ or オイラー数 mod 2	0 mod 2	0 mod 2	0 mod 2	1 mod 2	0 mod 2

多角形分解定理

$$\text{オイラー数} = \text{点の数} - \text{辺の数} + \text{面の数}$$



実は

X : 閉曲面 のとき

定理

$$\text{オイラー数} \equiv w_1^2(X) \pmod{2}$$

$H_*(X, \mathbb{Z}/2)$ と
関係した量

特性数

これは、ヒルツェブルグの符号数定理

符号数 = 特性数による
表示.

$$\sigma(X^8) = \frac{1}{45} (7 p_2(X^8) - p_1^2(X^8))$$

と 平行的な定理 と考えられる。

Ω_* を利用した 証明

- 閉曲面の場合 (2次元の場合) には、分類がわかっているので、個別にこの定理をたしかめることは不要。
- また、直接の証明も可能である。
- しかし、次のような、 Ω_2 の構造を利用した証明も可能である。

step 1

$$\Omega_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

$$[X] \longmapsto [X \text{ の オイラー-数 }] \bmod 2$$

は 準同型 ($\mathbb{Z}_2$ 上の 線型写像)

step 2

$$\Omega_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

$$[X] \longmapsto w_1^2(X)$$

も 準同型 ($\mathbb{Z}_2$ 上の 線型写像)

step 3

両者が Ω_2 の基底上で一致する。

ヒルベルトによる符号数定理の証明 42

• 向き付けられた間多様体に対して、

Ω_n の類似物を構成し、 $\Omega_n^{\mathbb{Z}}$ とおく。

$$\begin{aligned} \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega_n &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [x] &\longmapsto o(x) \end{aligned}$$

は準同型 (環として)

• 「特性数」をうまく与えおいて
ある準同型

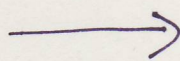
$$\begin{aligned} \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega_n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [x] &\longmapsto L(x) \end{aligned}$$

を作ります

• トムスの同境界理論を用いて、 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ の
環としての生成元の上で一致をとりつける

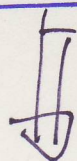
まとめ

ポアソナリによる
一連の議論



ベクトル空間
 $H_*(X; \mathbb{Z}_2)$
とて結果

ホモロジー群

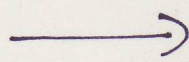


この $H_*(X; \mathbb{Z}_2)$ を道具としてつかえる

例 $\cdot$ $S' \hookrightarrow D^2 \xrightarrow{f} S'$ の非浮反


不動点定理 (実は上から死に出る)

「同境」の問題



ベクトル空間

Ω_*
とて結果

同境群

この Ω_* を道具としてつかえる

例 個々の多様体に対する符号数定理

幾何学

..... 部分同士のつながり方を見ながら、
全体を見渡すこと

何か部分で、何か全体なのか。

..... 時と場合によって様々に変容し、
出発点からは想像もつかない
超大域的な考察が
くり返されてくることがある。