

現象の数理

薩摩順吉

2007年4月26日

次回

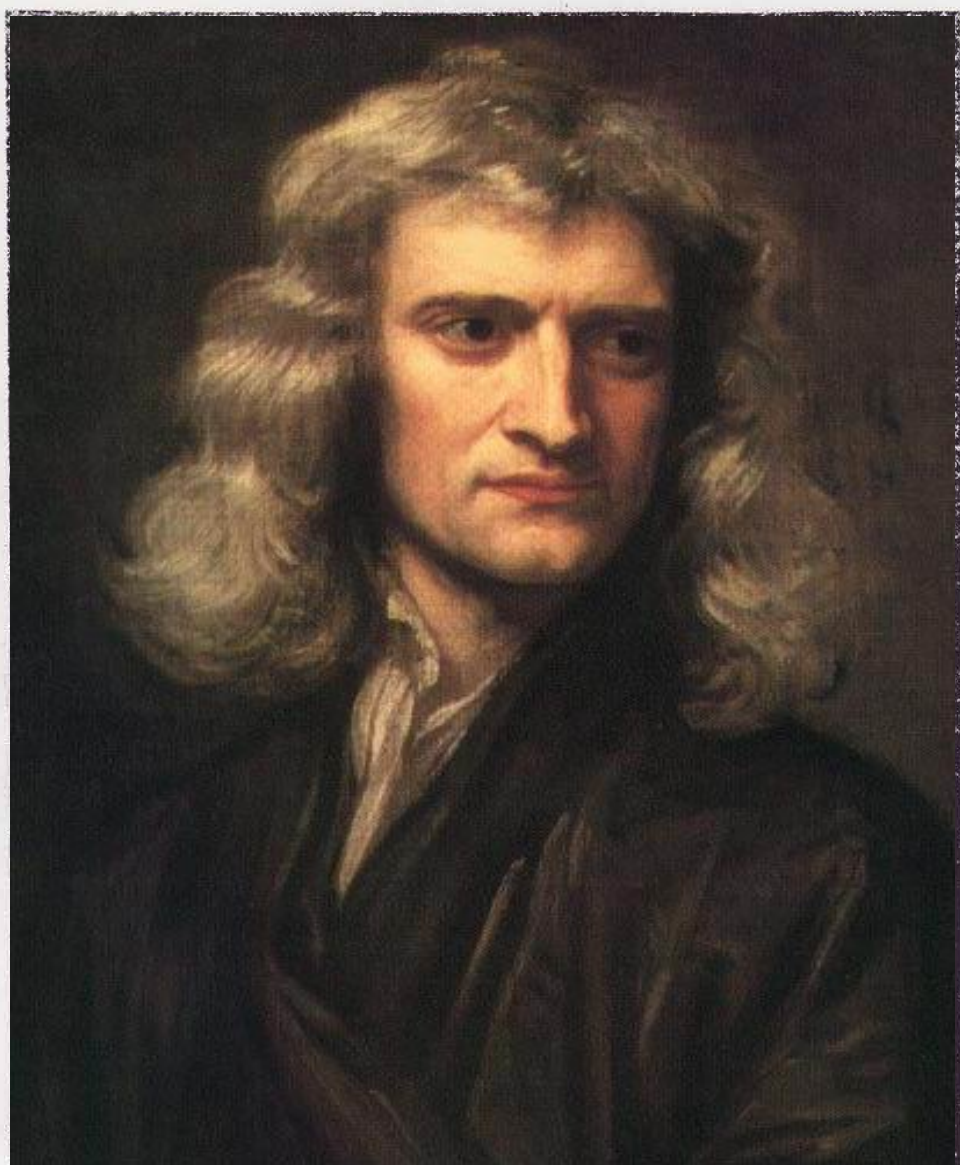
非線形の世界

5月10日

東大俯瞰講義

①

※:このマークが付してある著作物は、第三者が有する著作物ですので、同著作物の再使用、同著作物の二次的著作物の創作等については、著作権者より直接使用許諾を得る必要があります。



Newton (1642-1727)

+ Leibnitz (1646-1716)

微積分学の創始

$$\text{平均の速さ} = \frac{\text{あつた距離}}{\text{かかった時間}}$$

$$\bar{v} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ の極限で時刻 t における
(瞬間) 速度

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \frac{dx(t)}{dt}$$

微分



$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau + x(0)$$

積分

18世紀 「力学の世紀」



Euler (1707-1783)

Eulerの'公式' $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

+

Lagrange (1736-1813)

解析力学

19世紀「場の世紀」

流体

弾性体

熱

電磁気

...



Fourier (1768-1830)

拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Fourier 級数

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Johan Bernoulli (1667-1748)

弦の振動解

d'Alembert (1717-1783)

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

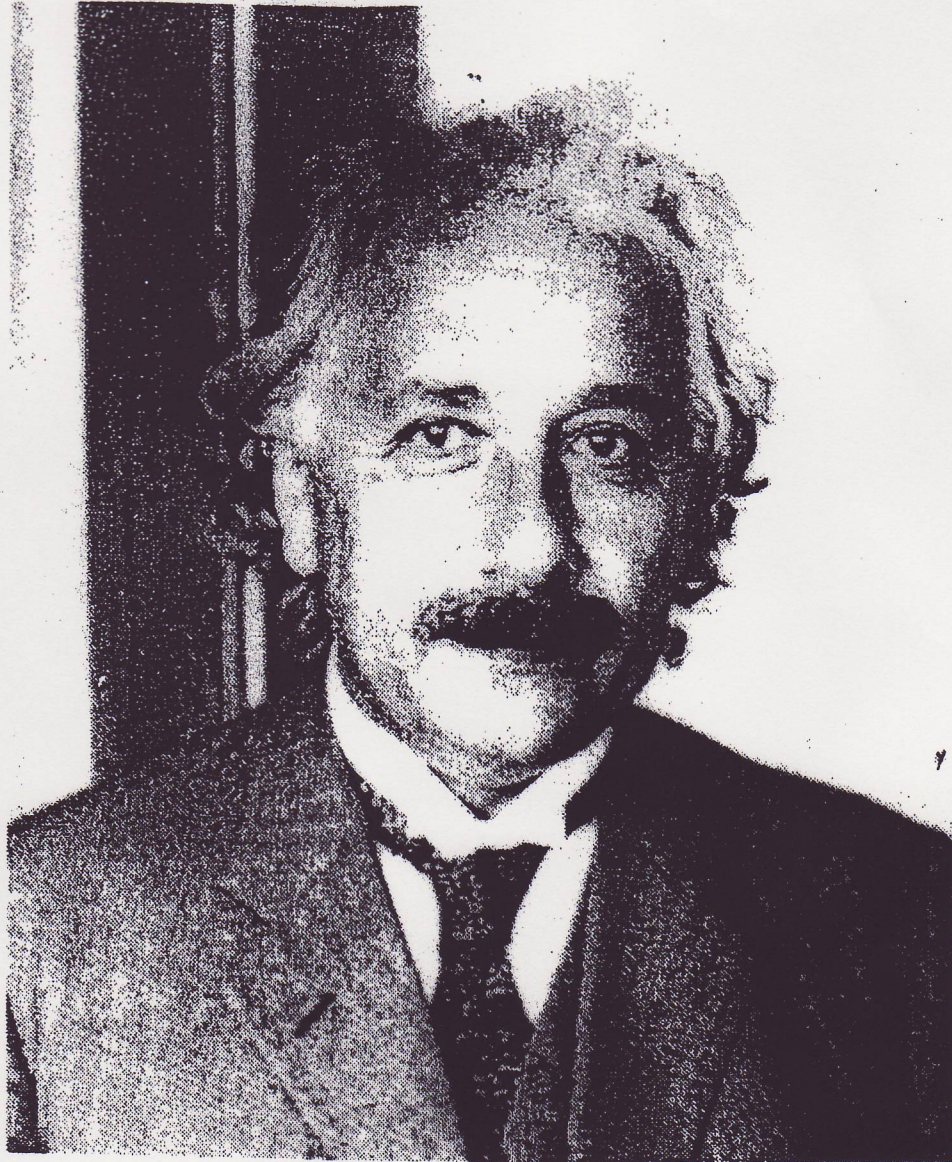
調和方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplace (1749-1827)

20世紀

代数,幾何の重要性



Einstein (1879-1955)

光量子

相対性理論

ブラウン運動

非線形の世界へ

Poincaré (1854-1912)

力学系の理論

Kowalevskaya (1850-1891)

非対称コマ

Painlevé (1863-1933)

$$\frac{d^2 w}{d\chi^2} = w^2 + \chi$$

Painlevé 超越関数

微分と差分

Malthus の法則

$u(t)$: 時刻 t の ねずみの数

$$u(t+\Delta t) - u(t) = \alpha \Delta t u(t)$$

$u(0) = u_0$ 初期値

α 増殖率

↑
差分方程式

解

$$u(\Delta t) = (1 + \alpha \Delta t) u_0$$

$$u(2\Delta t) = (1 + \alpha \Delta t) u(\Delta t)$$

$$= (1 + \alpha \Delta t)^2 u_0$$

...

$$u(n\Delta t) = (1 + \alpha \Delta t)^n u_0$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \alpha u(t)$$

微分方程式

解

$$\tau = n \Delta t, \quad n \rightarrow \infty, \quad \Delta t \rightarrow 0$$

(有限)

$$u(\tau) = \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{n} \tau \right)^{\frac{n}{\alpha} \tau} \right\}^{\alpha \tau} u_0$$

$$\rightarrow \underline{e^{\alpha \tau} u_0}$$

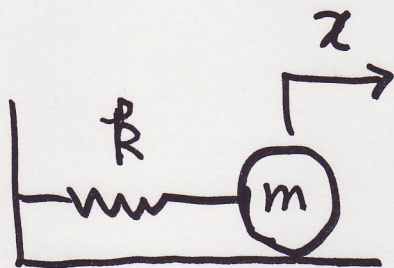
Rem. $\left(\frac{d}{dt} - \alpha \right) u = 0$ の解が

$$u = u_0 e^{\alpha t}$$

Newtonの運動法則

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

(例)



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

これは

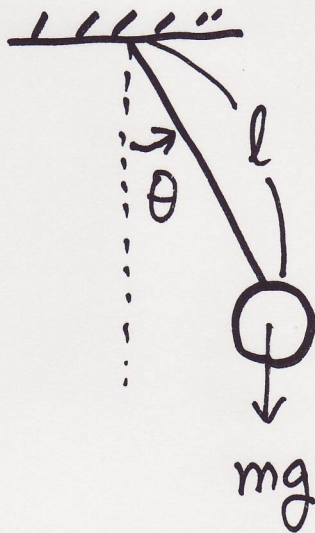
$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

解 $\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)x = 0$ より

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

$$= \tilde{C}_1 \cos \omega t + \tilde{C}_2 \sin \omega t$$

(1911) 2



$$m l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta$$

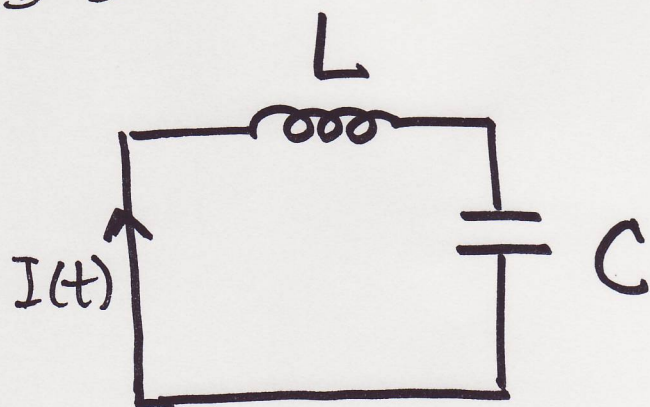
これを

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

$\theta \ll 1$ のとき

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

例 3



$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0$$

等価回路

3つの例はすべて同じ微分方程式で表される。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

線形方程式の特徴

1) 解の重ね合せが可能

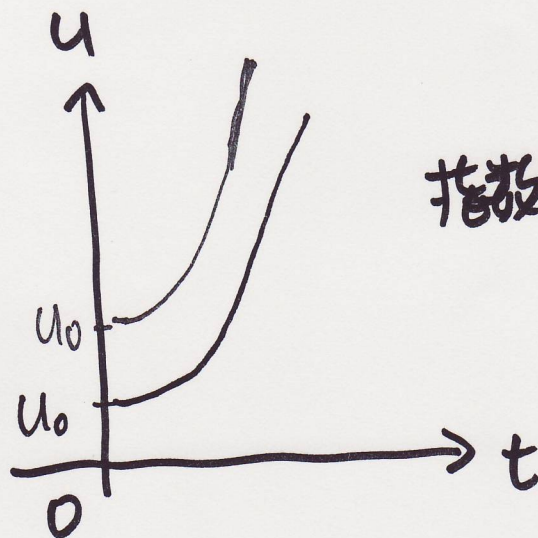
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

特解 $x = e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}$

2) 解の振舞いは初期値によらない

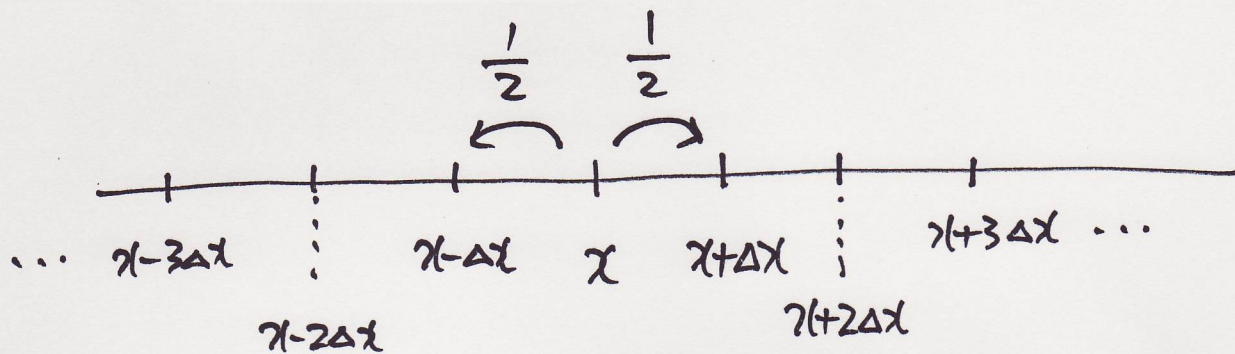
$$\frac{du}{dt} = \alpha u$$

解 $u = u_0 e^{\alpha t}$



指数関数的に増加

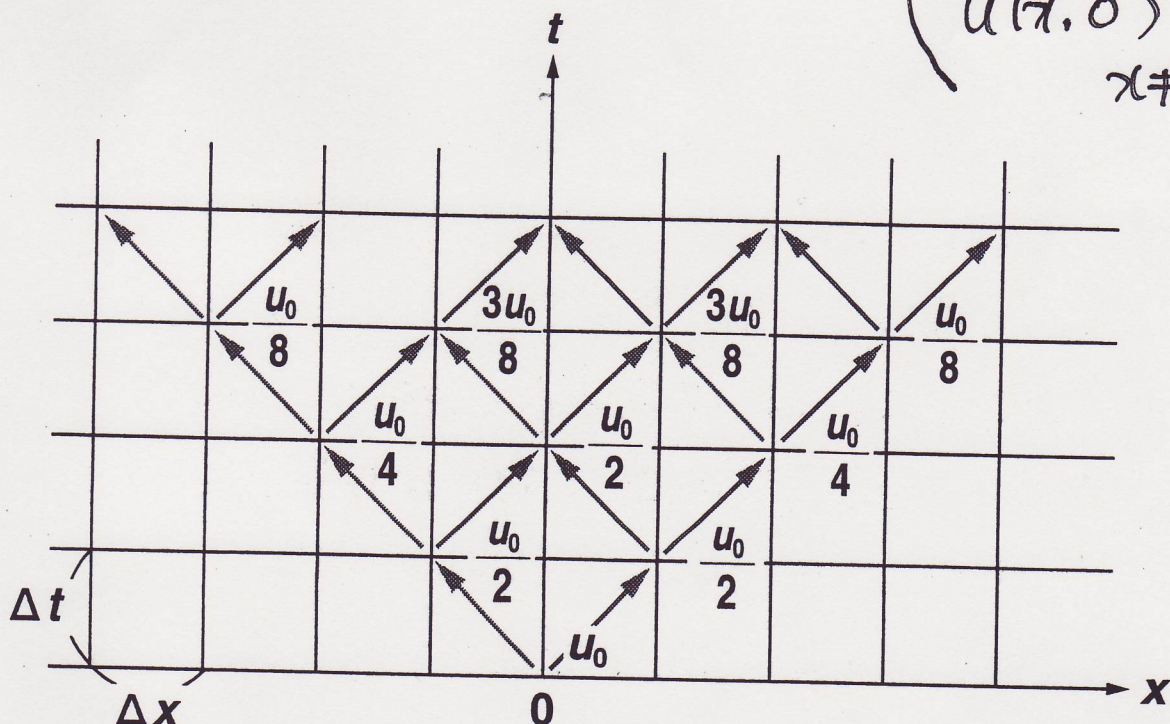
Random Walk (酔歩)



$$U(x, t+\Delta t) = \frac{1}{2} \left\{ U(x-\Delta x, t) + U(x+\Delta x, t) \right\}$$

初期値 (Initial Value)

$$\begin{cases} U(0, 0) = U_0 \\ U(x, 0) = 0 \quad x \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$



2項分布にしたがって発展

連続極限

Taylor展開

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Delta t + \dots$$

$$u(x \pm \Delta x, t) = u \pm \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots$$

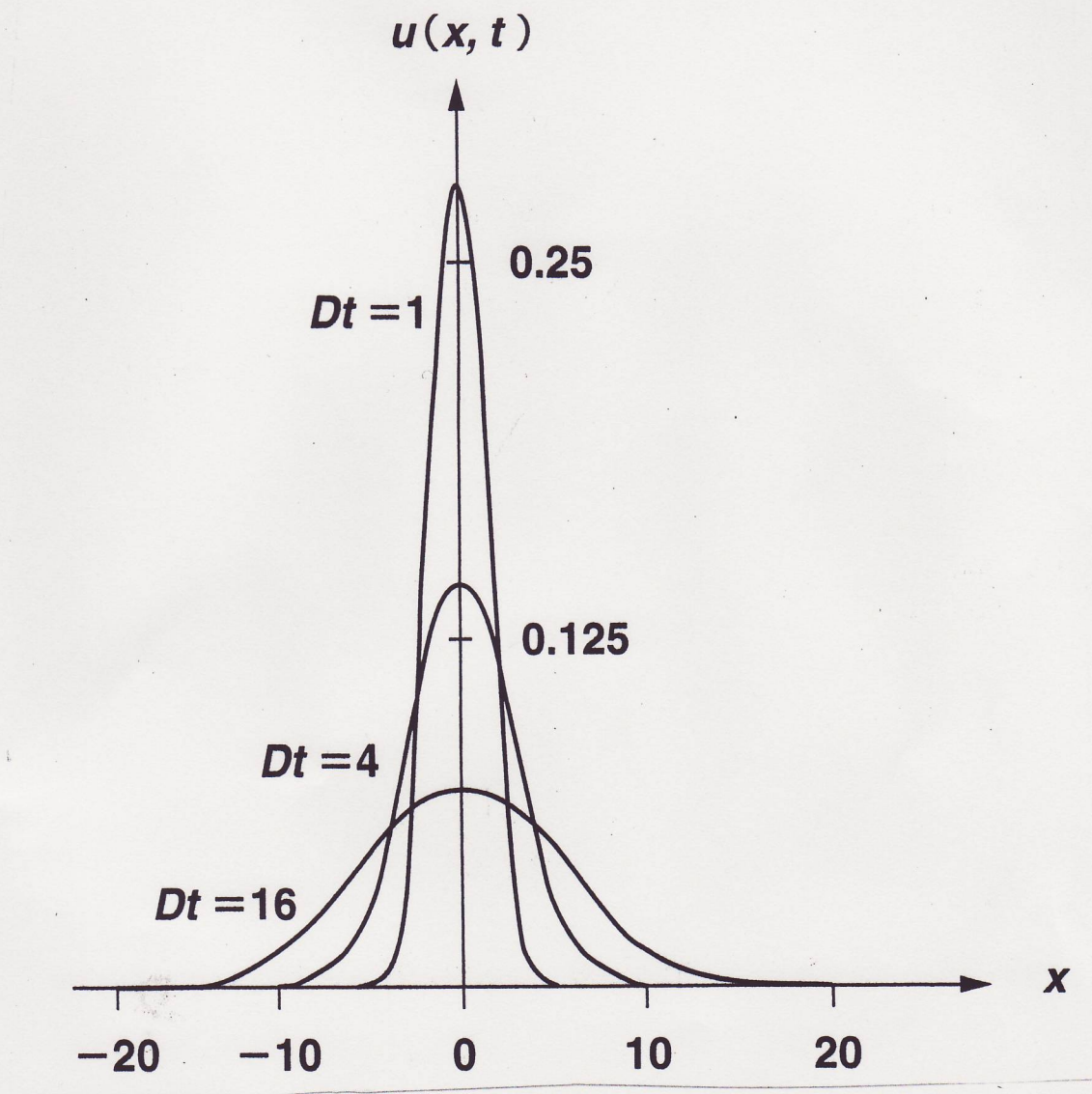
$\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ のとき

ただし $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = 2D$ (一定) とする.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

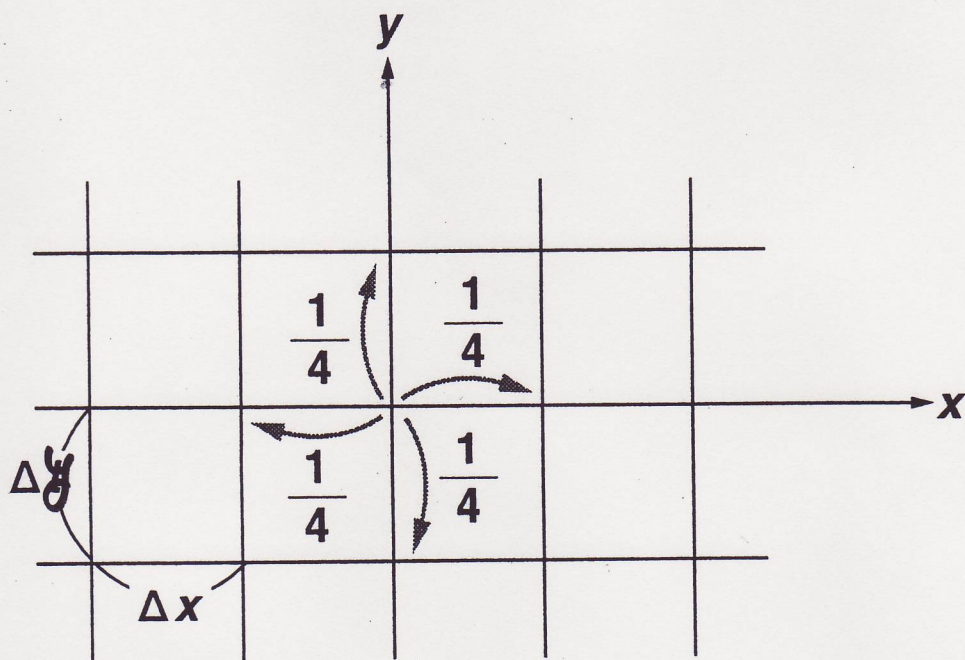
拡散方程式

拡散方程式の解



正規分布

2次元 Random Walk



$$u(x, y, t + \Delta t)$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ u(x - \Delta x, y, t) + u(x + \Delta x, y, t) \right. \\ \left. + u(x, y - \Delta y, t) + u(x, y + \Delta y, t) \right\}$$

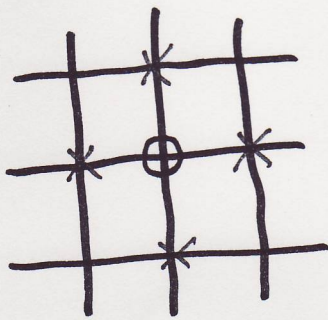
$\Downarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

2次元拡散方程式

u が t によらないとき

$$u(x, y) = \frac{1}{4} \left\{ u(x - \Delta x, y) + u(x + \Delta x, y) + u(x, y - \Delta y) + u(x, y + \Delta y) \right\}$$



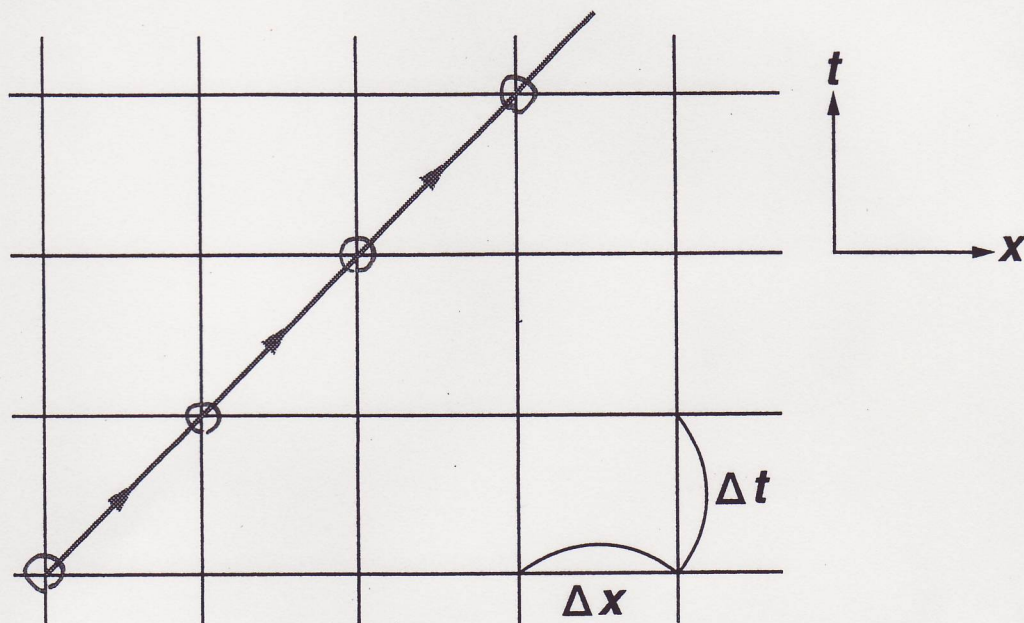
連続極限

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

調和方程式'

波動系

$$u(x, t + \Delta t) = u(x - \Delta x, t)$$



$\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ のとき

ただし $\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$ (一定) とする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{波動方程式'}$$

解 $u(x, t) = f(x - ct)$

左右に伝わる波

$$u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t)$$

$$= u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)$$

連続極限

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

波動方程式'