

非線形の世界

薩摩順吉

東京大学俯瞰講義

2007年5月10日

①

†:このマークが付してある著作物は、第三者が有する著作物ですので、同著作物の再使用、同著作物の二次的著作物の創作等については、著作権者より直接使用許諾を得る必要があります。

高橋三六堂 神奈川沖
波裏



Logistic eq.

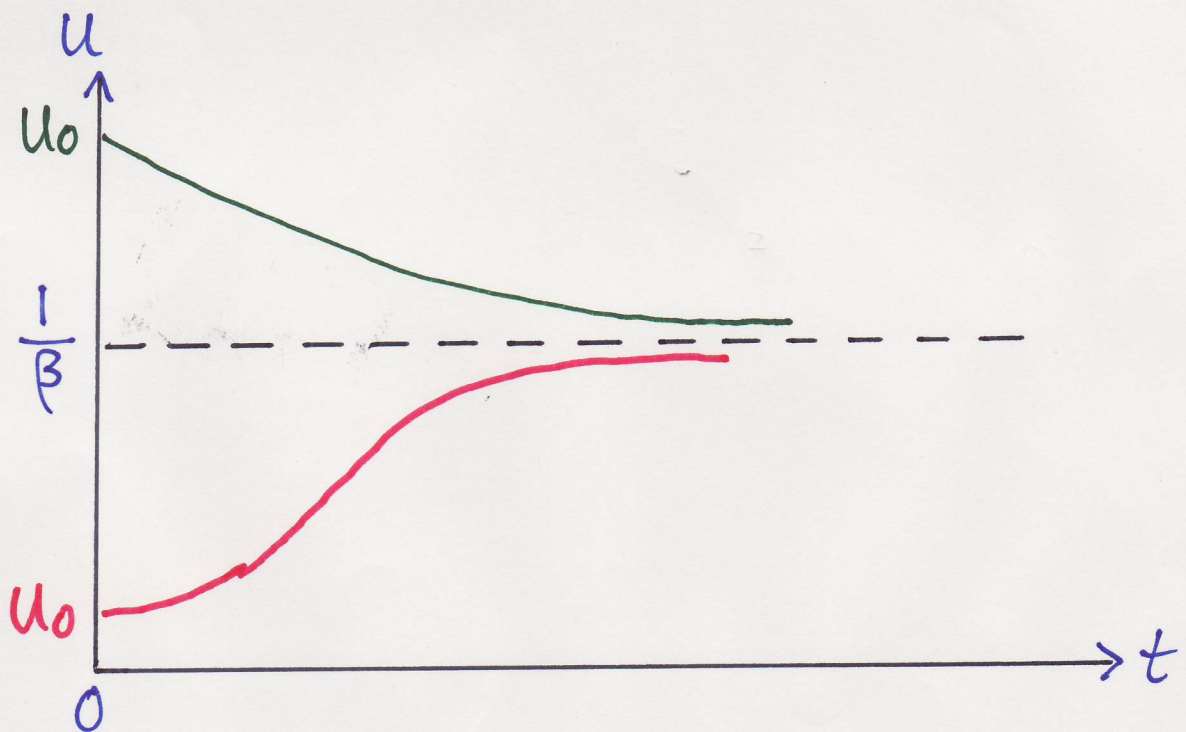
$$\frac{du}{dt} = \alpha (1 - \beta u) u$$

$$u(0) = u_0 \text{ 初期值}$$

α : 増殖率 β : 混雑定数

解

$$u(t) = \frac{u_0}{\beta u_0 + (1 - \beta u_0) e^{-\alpha t}}$$



素朴な差分化

$$u(t+\Delta t) - u(t)$$

$$= \alpha \Delta t \{ 1 - \beta u(t) \} u(t)$$

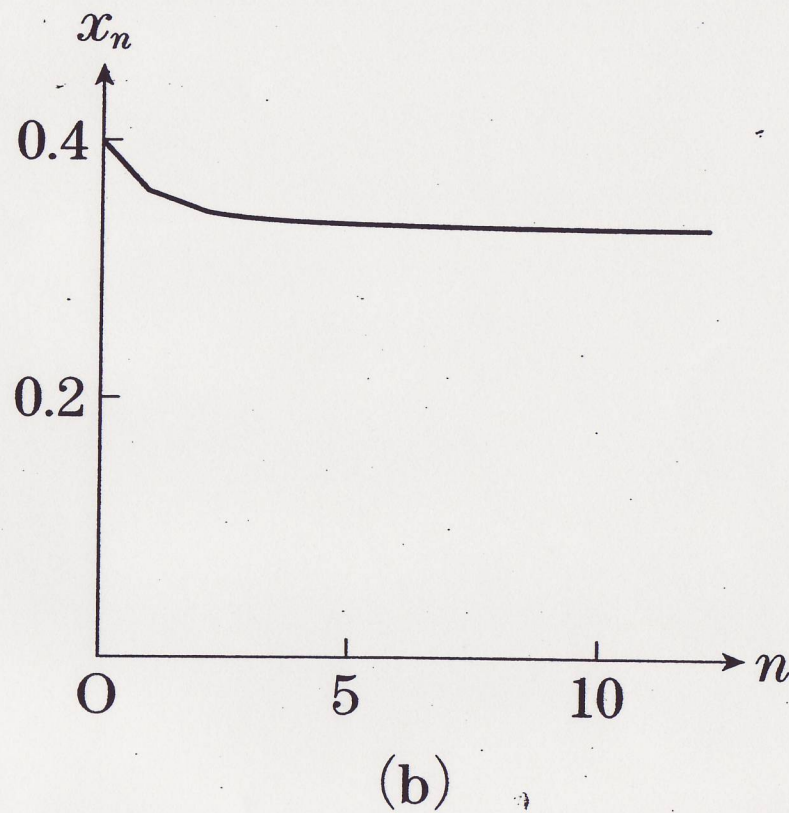
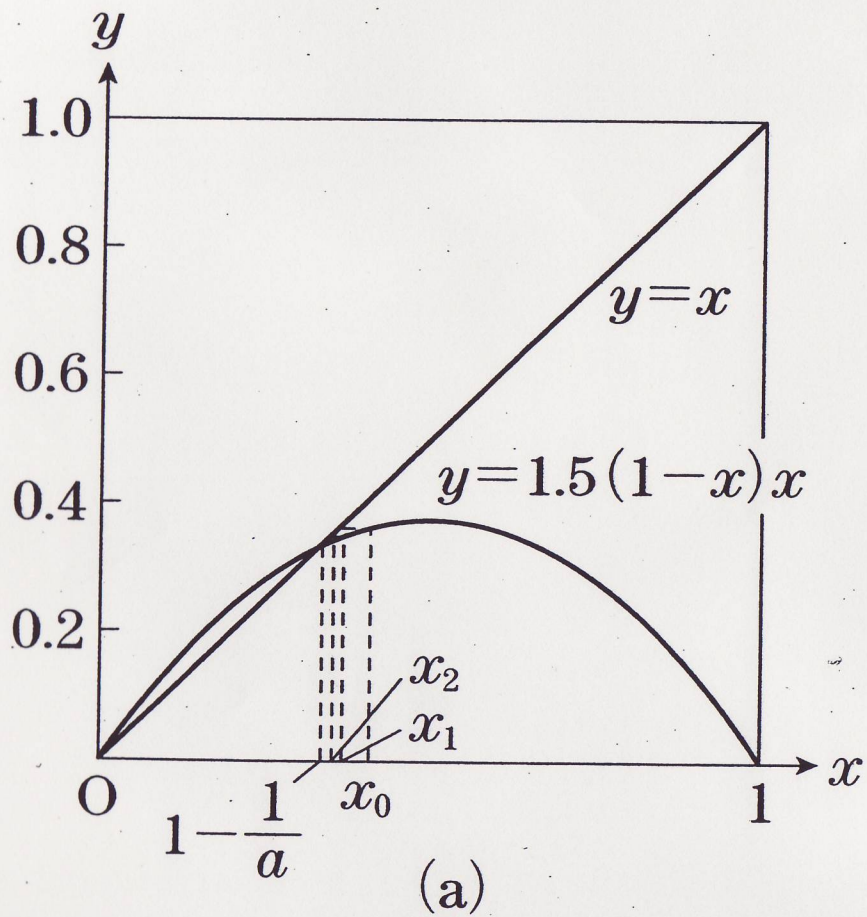


$$x_n = \frac{\alpha \beta \Delta t}{1 + \alpha \Delta t} u(n \Delta t)$$

$$a = 1 + \alpha \Delta t, \quad t = n \Delta t$$

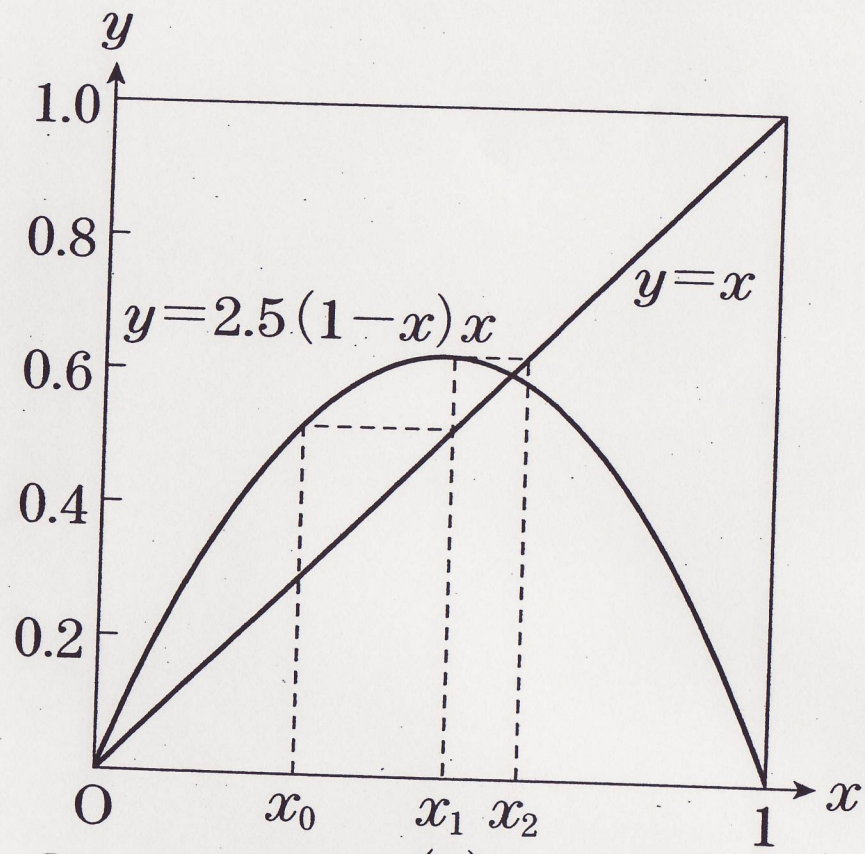
$$x_{n+1} = a (1 - x_n) x_n$$

logistic 写像

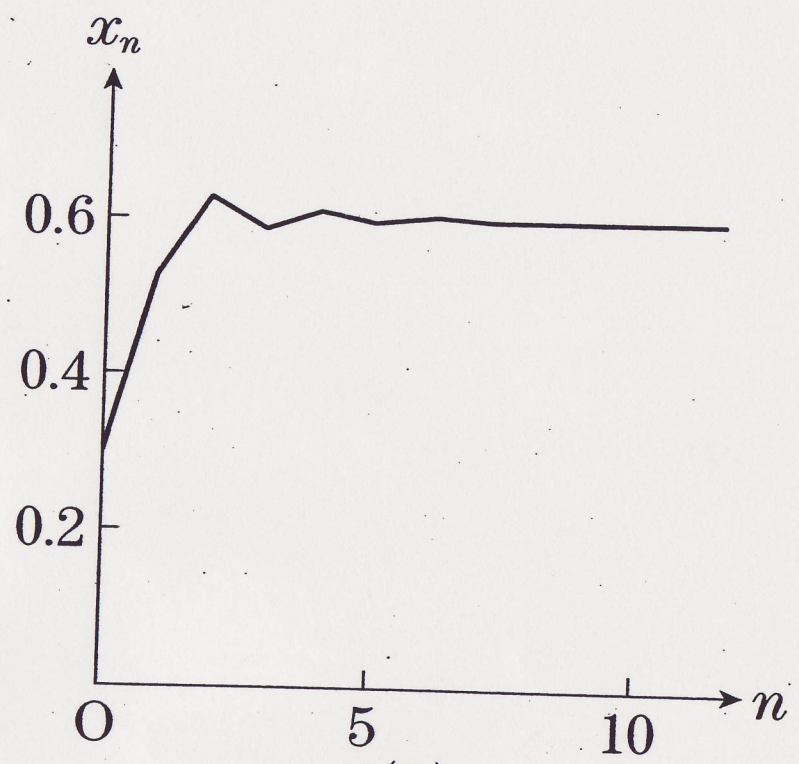


$y = f_a(x)$ のグラフと x_n の変化 ($a = 1.5$)

$$a = 1 + \alpha \Delta t$$

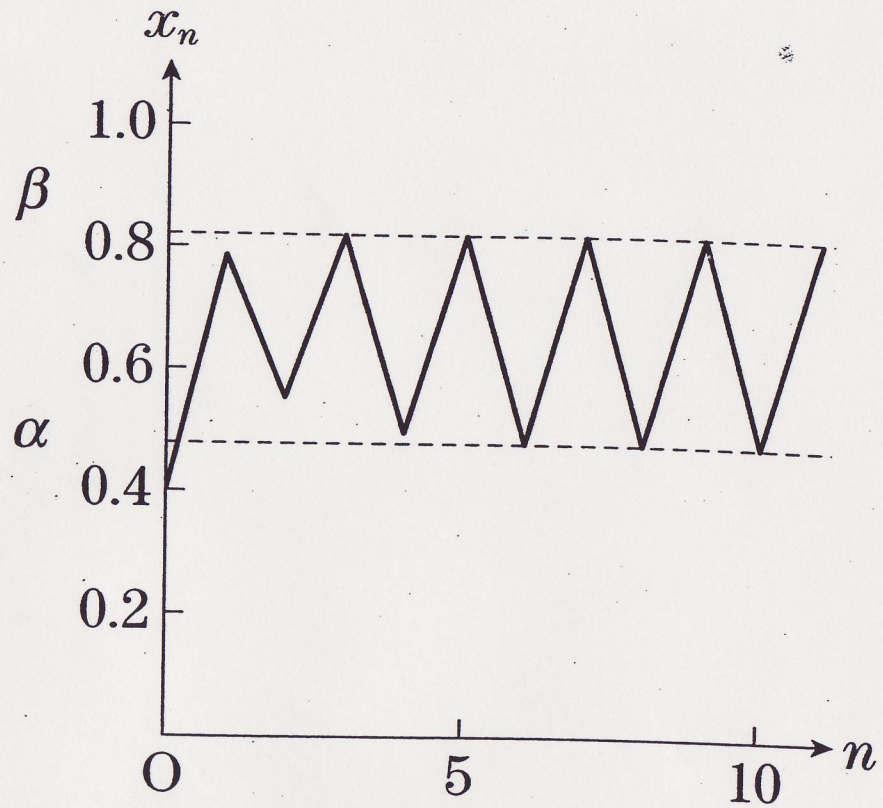
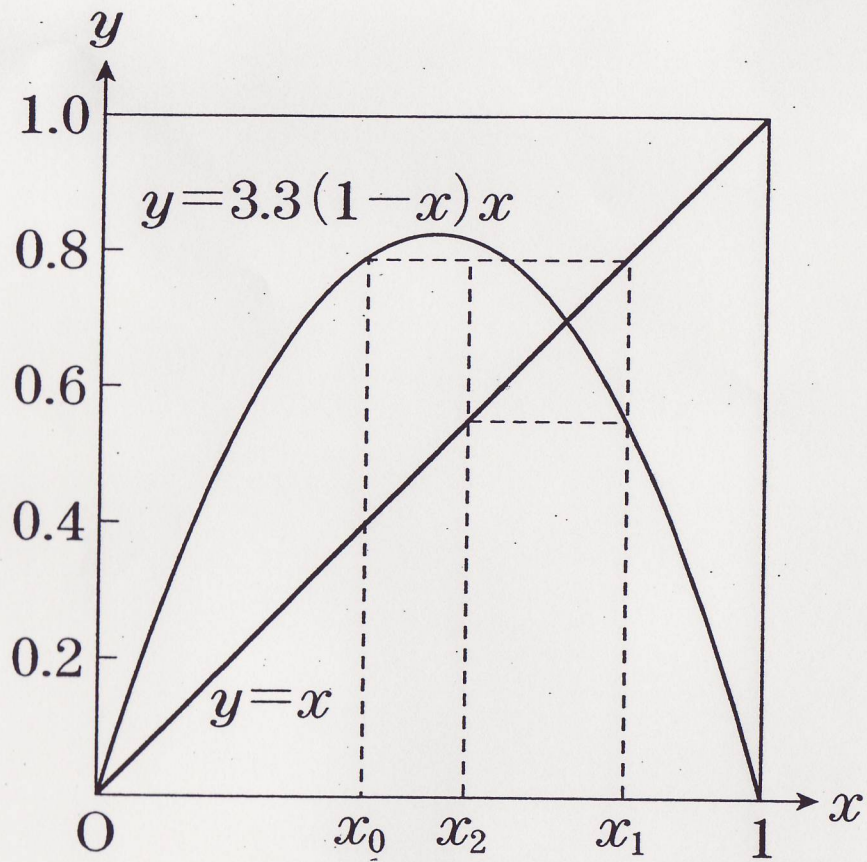


(a)

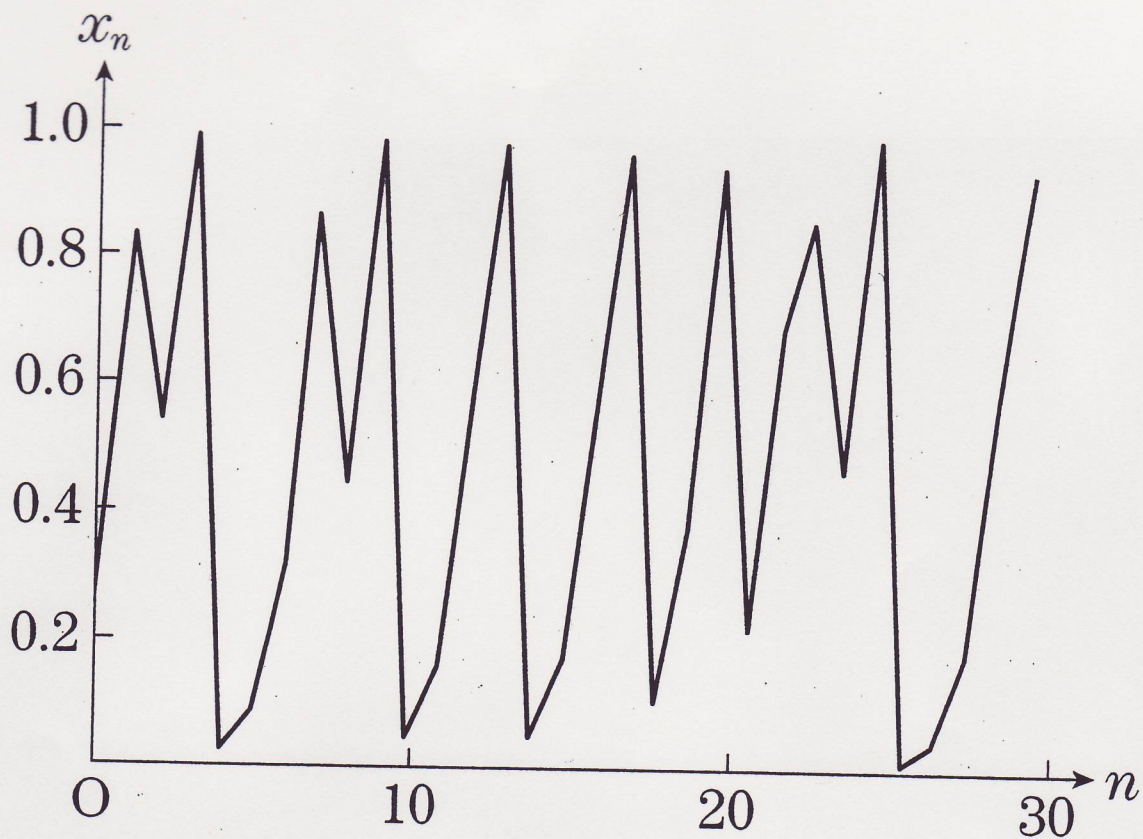


(b)

$y = f_a(x)$ のグラフと x_n の変化 ($a = 2.5$)



$y = f_a(x)$ のグラフと x_n の変化 ($a = 3.3$)



カオス状態 ($a = 4.0, x_0 = 0.3$)

- x_0 のとり方でどんな周期をもつ軌道も現れる。また周期をもたない軌道も現れる。
- x_0 を少しでも変えると軌道の様子は変化する。

May (1974)

ジャパ^o = -z' アトラクタ -

上田 (1973 (1961))

Duffin eq.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x^3 = B \cos t$$

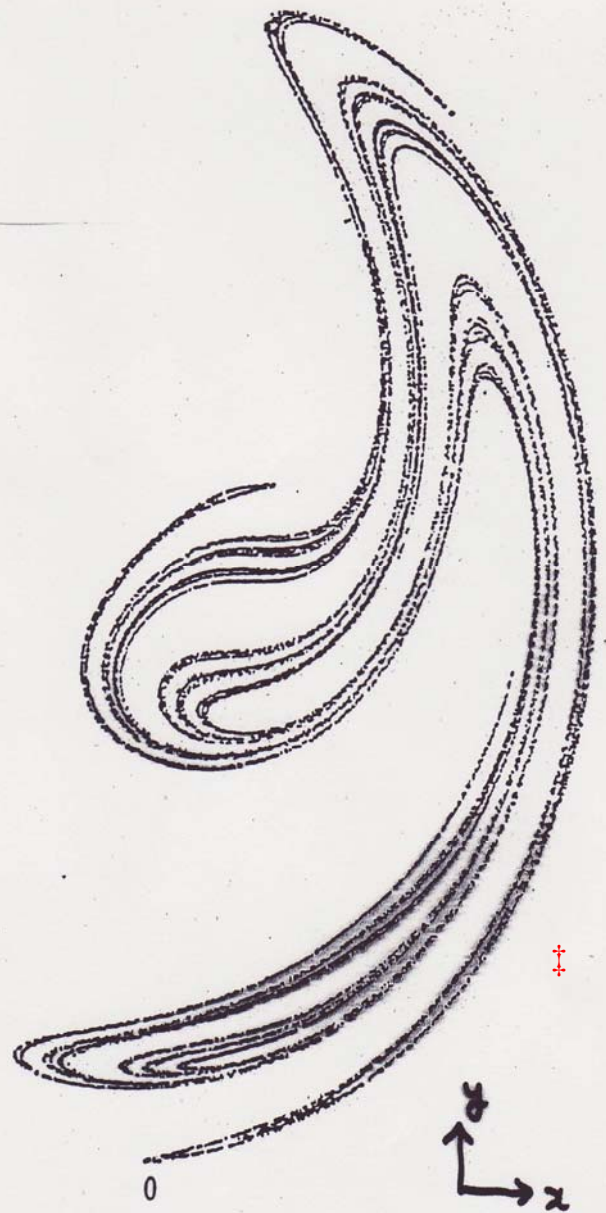
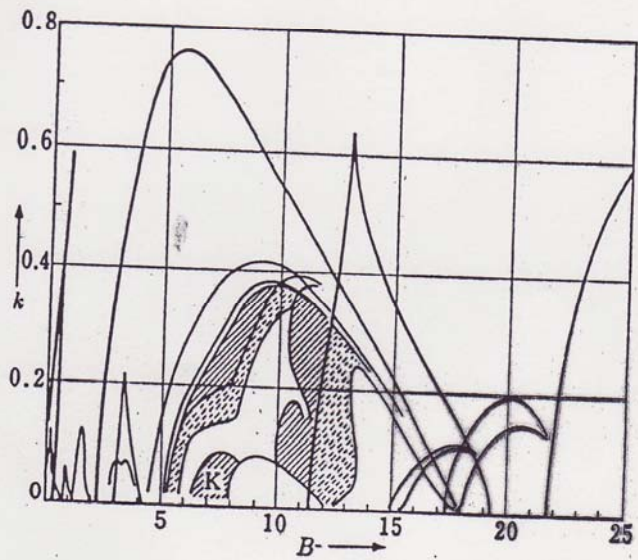
$$\downarrow \quad \frac{dx}{dt} = y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = -k y - x^3 + B \cos t \\ \frac{dx}{dt} = y \end{array} \right.$$

$$[x(0), y(0)] \rightarrow [x(2\pi), y(2\pi)] \rightarrow$$

$$\dots \rightarrow [x(2n\pi), y(2n\pi)]$$

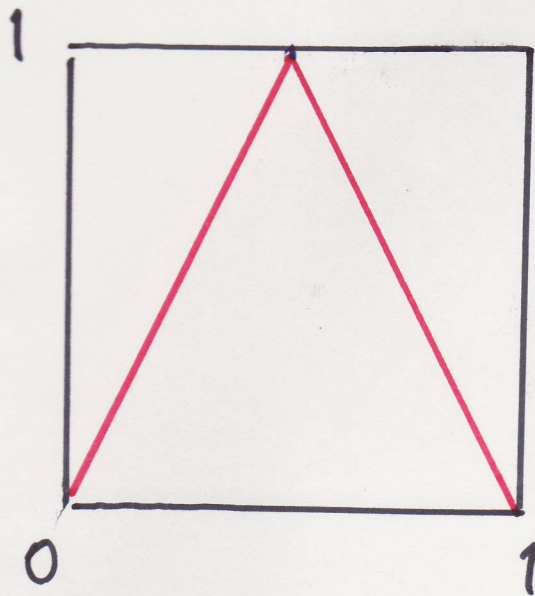
2次元写像



右, B 上の図の
 斜線部にあるとき,
 軌道は右図のポ
 ラクターに収束

“ヤバニース”
 ポラクター

カオスとフラクタル



テント型写像

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2x_n & 0 < x_n < 0.5 \\ 2(1-x_n) & 0.5 < x_n < 1 \end{cases}$$

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0), \dots$$

x_1, x_2, \dots と不規則軌道が生じる。

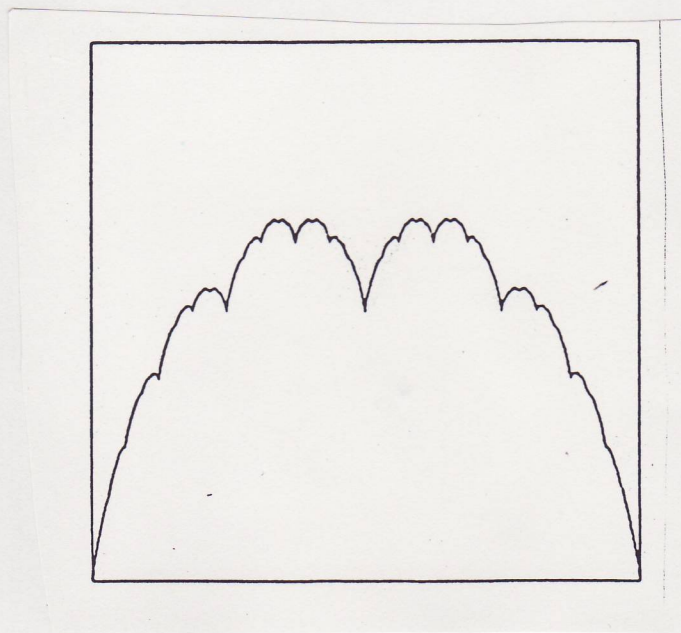
カオス

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f^n(x)$$

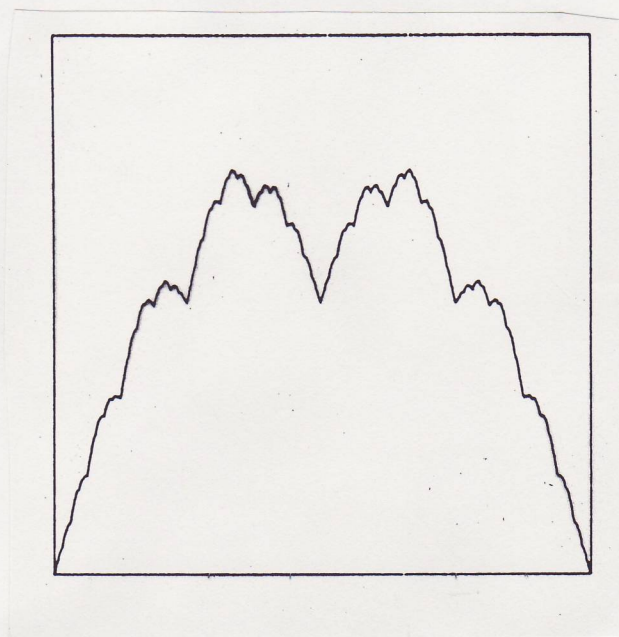
高木関数

連続だがいたるところ微分不可能な関数

高木関数



Weierstrass 関数



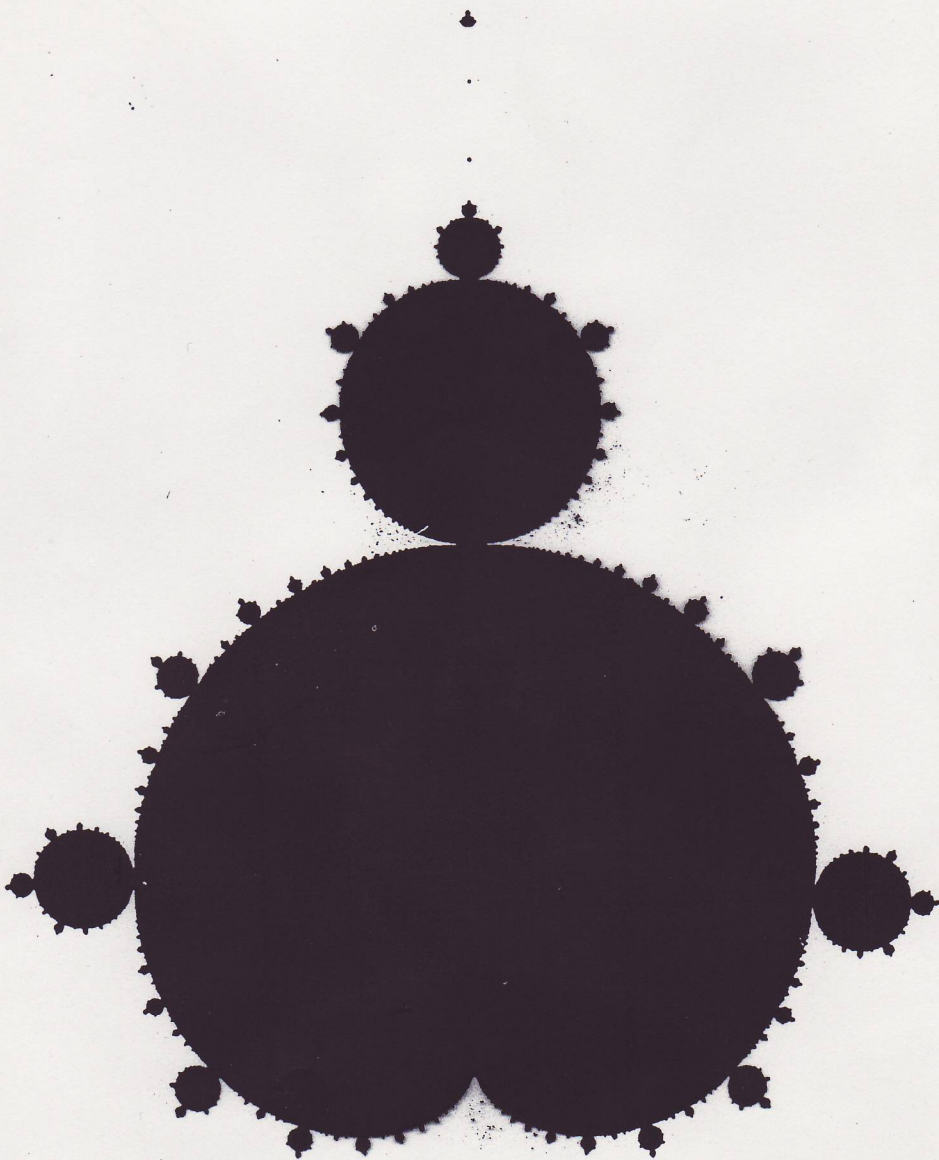
$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(\pi f^{(n)}(x))$$

マンデルブロ

Mandelbrot

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + \mu, \quad z_n = x_n + iy_n$$

z_0 を原点とし, $n \rightarrow \infty$ 時 $|z_n| \rightarrow \infty$ と
ならない μ の集合



Logistic eq. の $\Delta t \rightarrow 0$ の差分化

$$u(t+\Delta t) - u(t)$$

$$= \alpha \Delta t \{ 1 - \beta u(t) \} u(t+\Delta t)$$



$$w(t) = \frac{1 - \beta u(t)}{u(t)}$$

möbius 変換

$$w(t+\Delta t) - w(t) = -\alpha \Delta t w(t)$$

解

$$w(n\Delta t) = (1 - \alpha \Delta t)^n w(0)$$

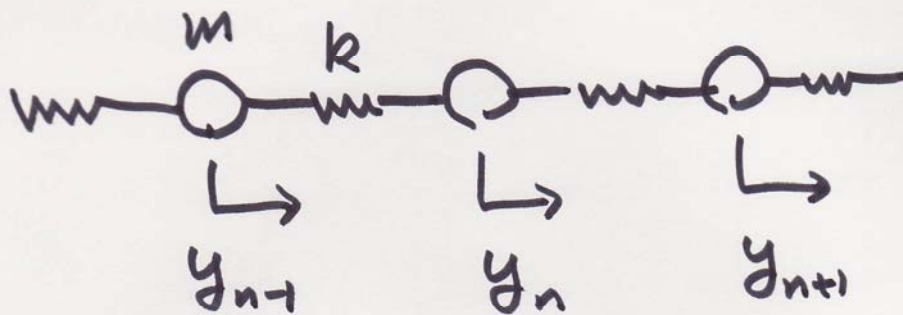
OR

$$u(n\Delta t) = \frac{u_0}{\beta u_0 + (1 - \beta u_0)(1 - \alpha \Delta t)^n}$$

$$u_0 = u(0)$$

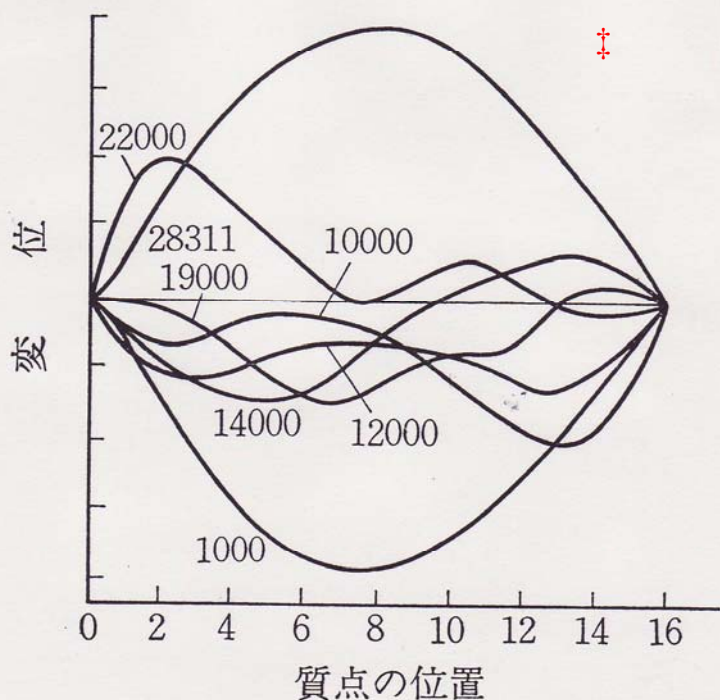
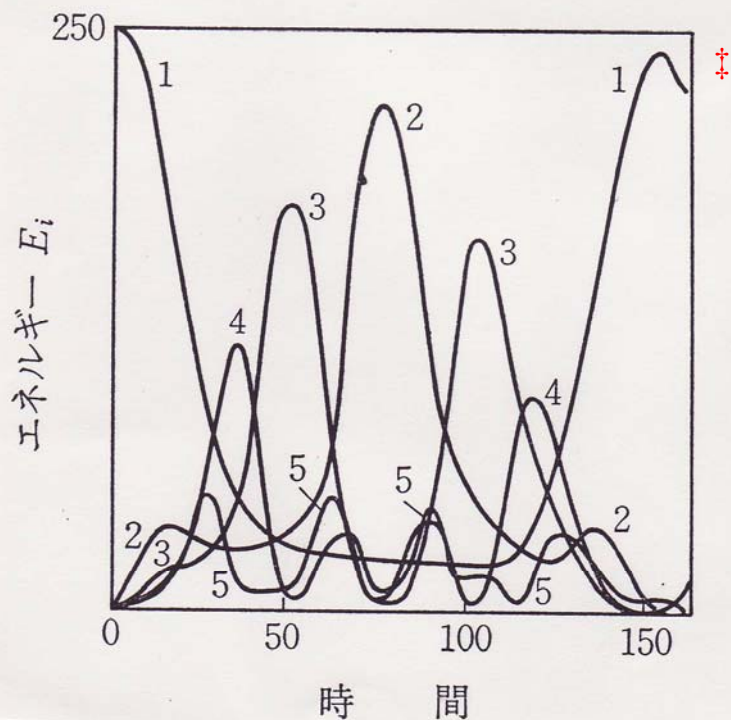
Fermi, Pasta, Ulam の問題

(1950年頃)



$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = k \left\{ (y_{n+1} - y_n) + \alpha (y_{n+1} - y_n)^2 \right\} - k \left\{ (y_n - y_{n-1}) + \alpha (y_n - y_{n-1})^2 \right\}$$

再帰現象



Zabusky, Kruskal (1965)

Fermi 達の格子を近似した kdV 方程式
の数値計算

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Soliton (Solitary-ton) の発見

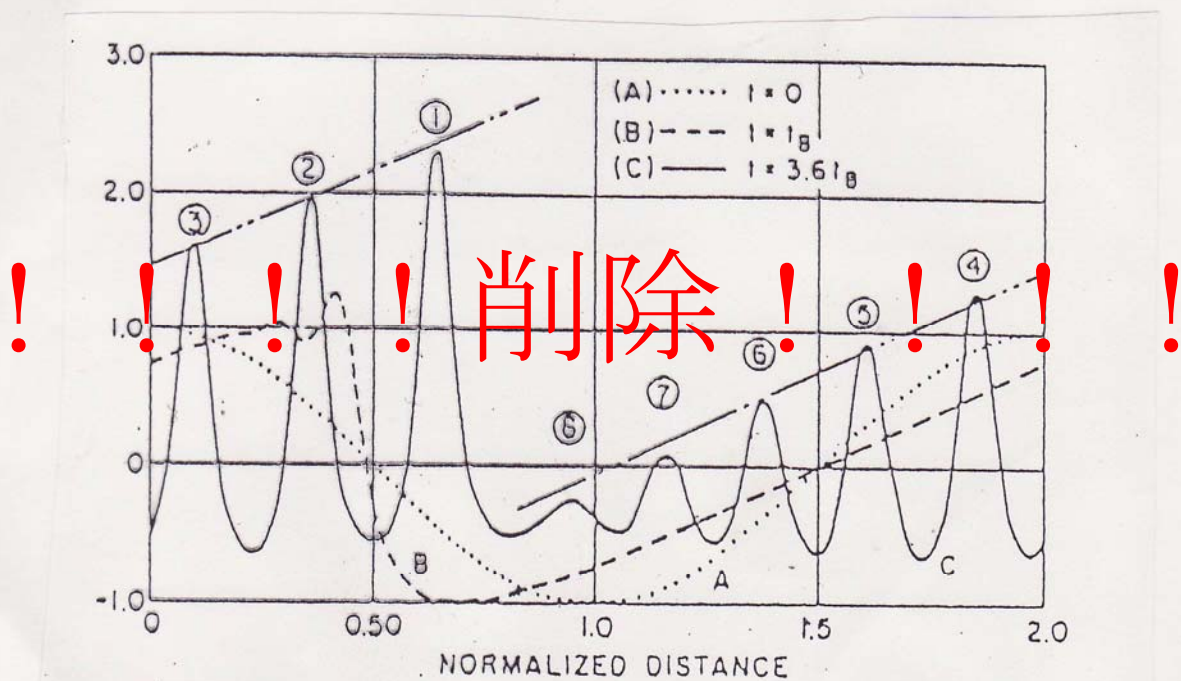
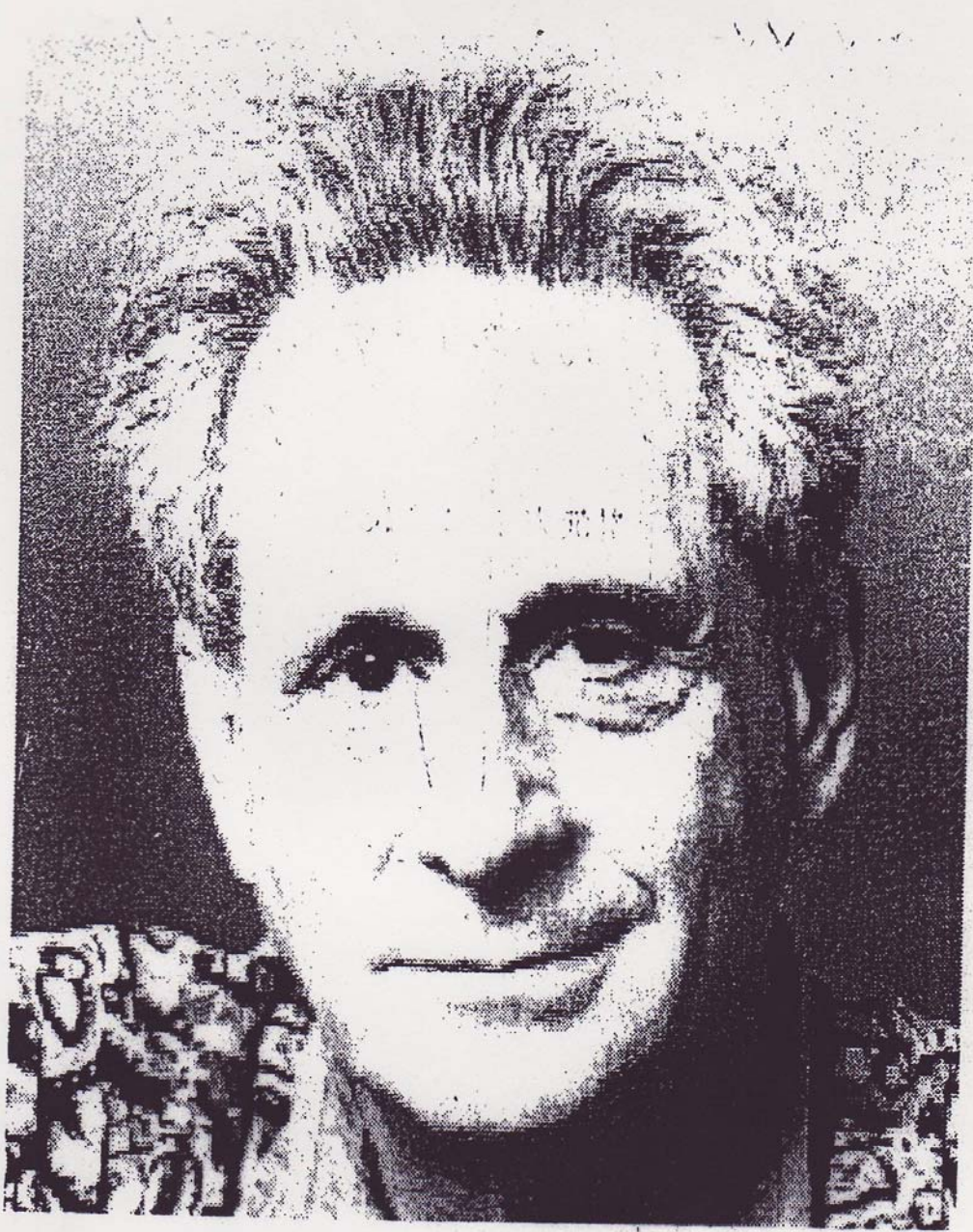


FIG. 1. The temporal development of the wave form $u(x)$.



†

Kruskal (1925 - 2006. Dec. 26)

Miura 変換 (1967)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$



$$u = v^2 \pm \sqrt{6} i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Riccati 方程式'

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$$

- ・ 無限個の保存量の存在
- ・ 初期値問題を厳密に解く

逆散乱法 の 発見

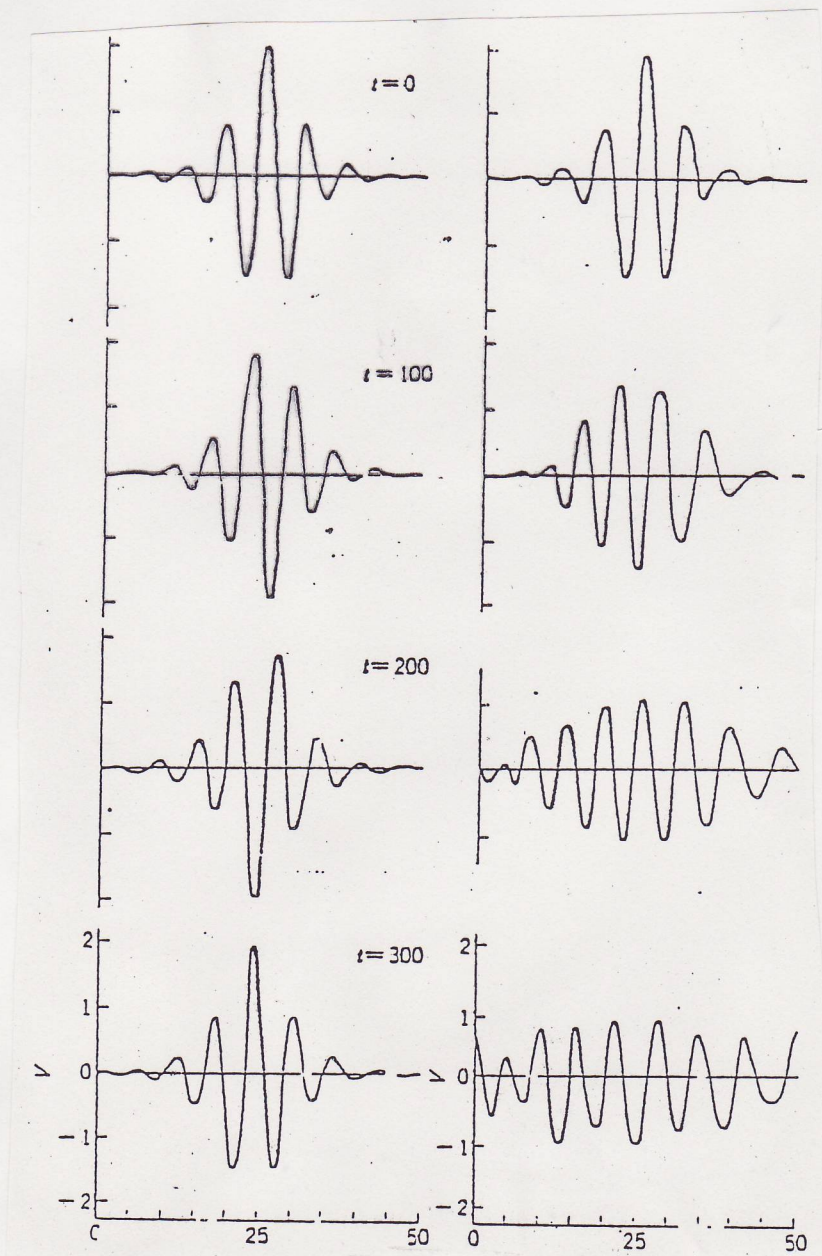
Gardner, Greene, Kruskal, Miura

非線形 Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u$$

非線形

線形



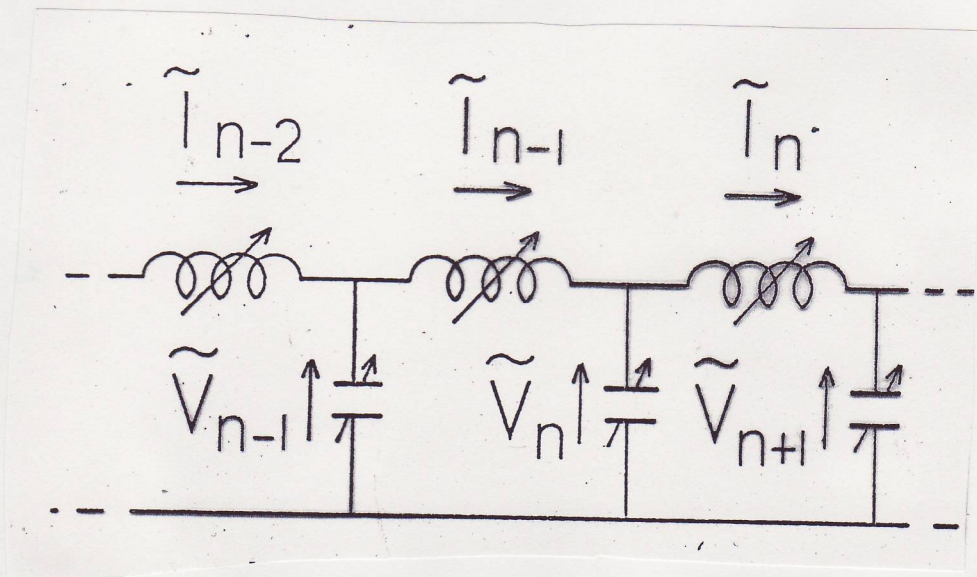
戸田格子 (1967)

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} = e^{-y_n + y_{n-1}} - e^{-y_{n+1} + y_n}$$

$$\updownarrow \quad V_n = e^{-y_n + y_{n-1}} - 1$$

$$\frac{d}{dt} \log(1 + V_n) = I_{n-1} - I_n$$

$$\frac{d}{dt} I_n = V_n - V_{n+1}$$



Kadomtsev - Petviashvili (KP) eq.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

著作権処理の都合で、この場所に挿入されていた図版を省略させていただきます。

無限次元可積分への拡張

・ 広田の方法

・ τ 函数の理論

⋮

応用・三輪方程式

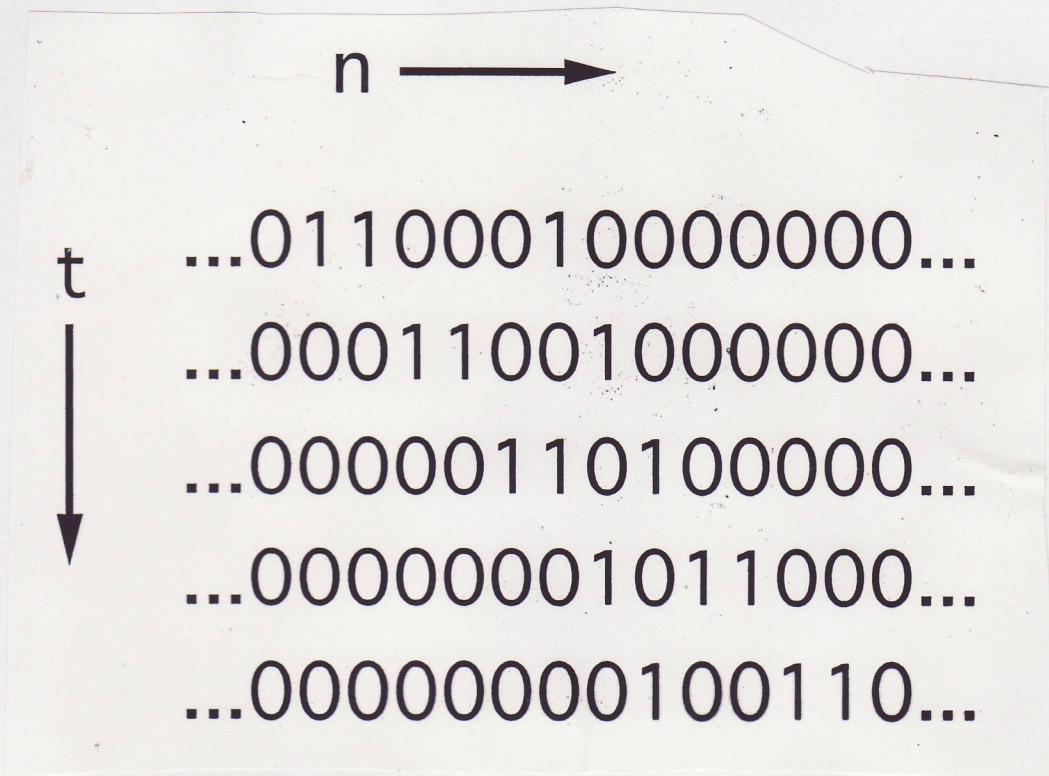
$$\tau_n(l+1, m+1) \tau_n(l, m)$$

$$- \tau_n(l+1, m) \tau_n(l, m+1)$$

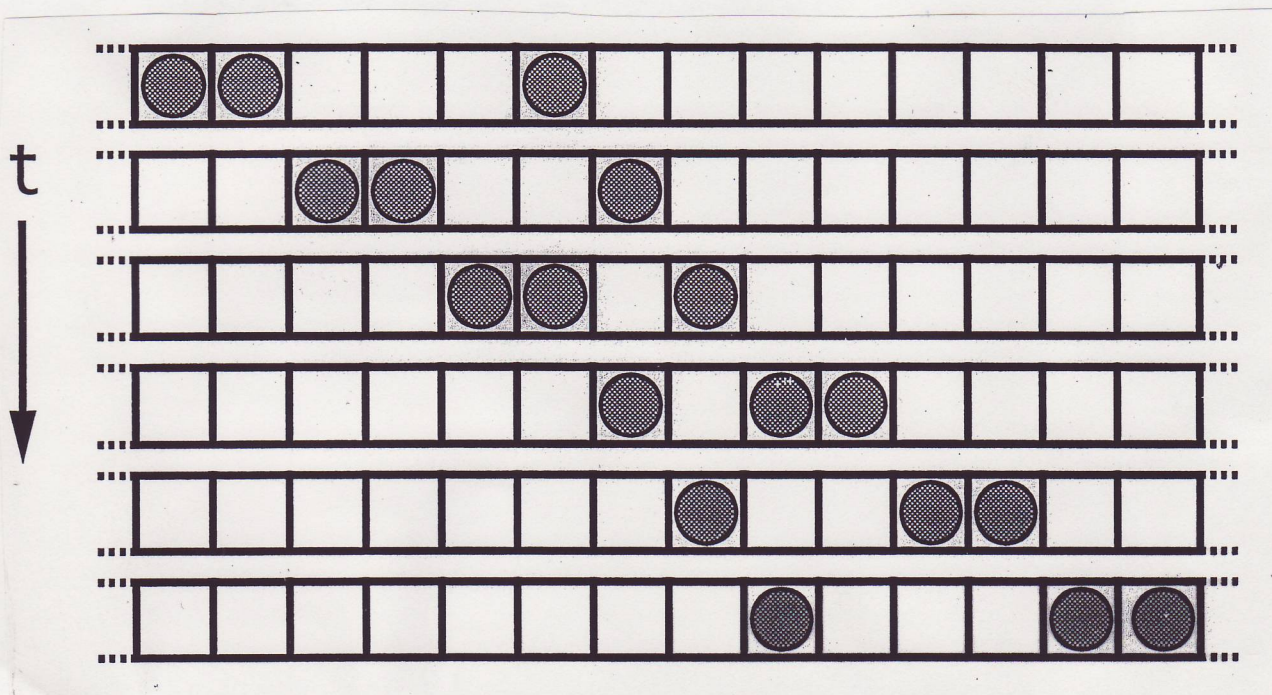
$$= ab \left\{ \begin{aligned} &\tau_{n+1}(l, m+1) \tau_{n-1}(l+1, m) \\ &- \tau_n(l+1, m+1) \tau_n(l, m) \end{aligned} \right\}$$

超離散系

ソリトンセルオートマトン



箱玉系



超離散極限

微分 eq.

$k dV$ eq.



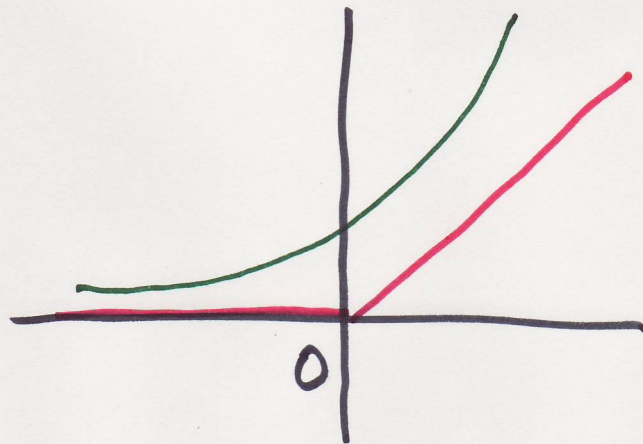
連續極限

差分 eq.

Lotka-Volterra 型 差分 eq.

超離散極限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \left(e^{\frac{a}{\varepsilon}} + e^{\frac{b}{\varepsilon}} \right) = \max(a, b)$$

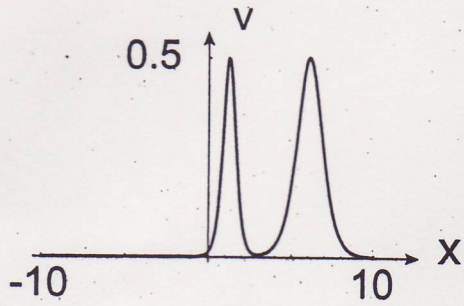


超離散系

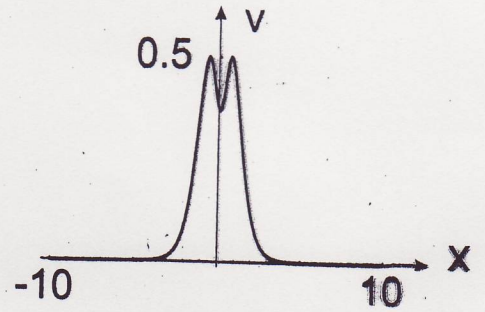
相主系

車流

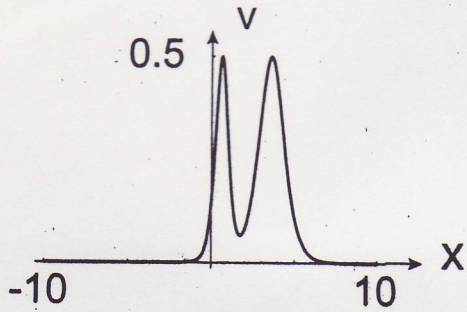
$t = -20$



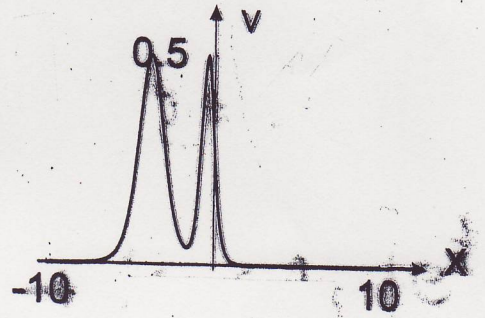
$t = 2$



$t = -10$

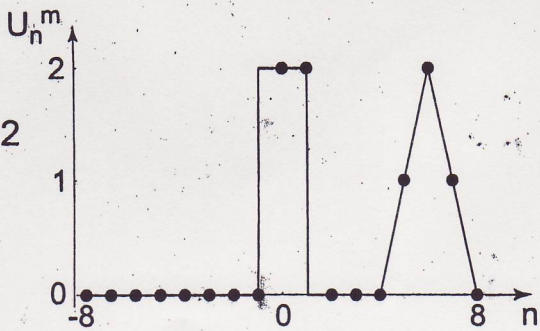


$t = 15$

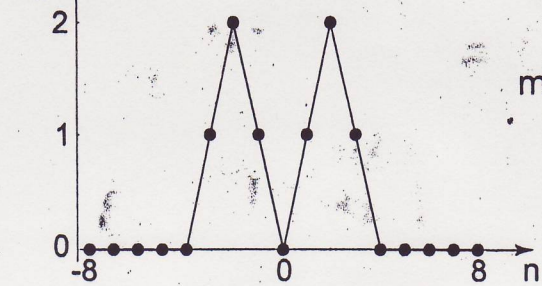


超離散

$m = -2$

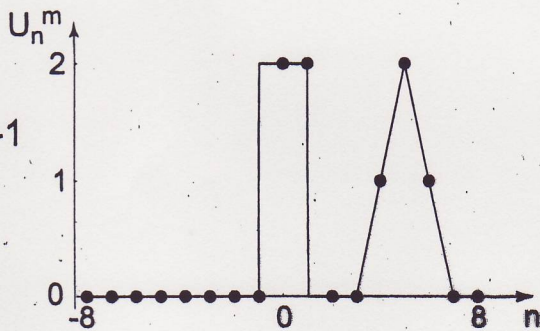


U_n^m

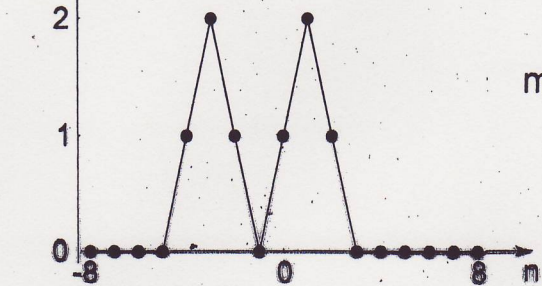


$m = 2$

$m = -1$

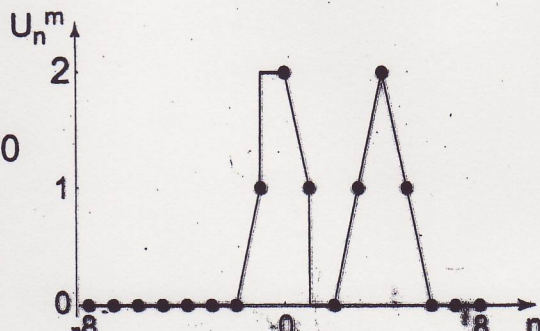


U_n^m

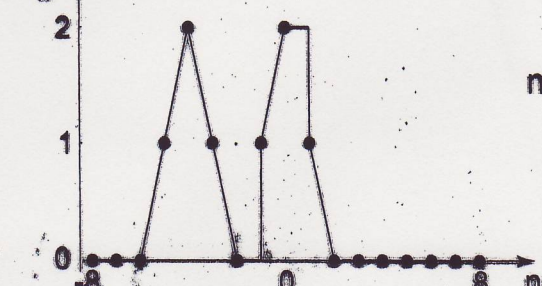


$m = 3$

$m = 0$

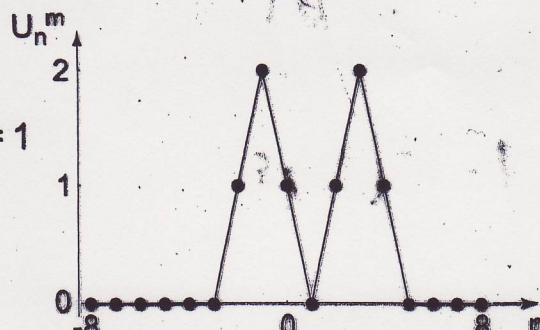


U_n^m

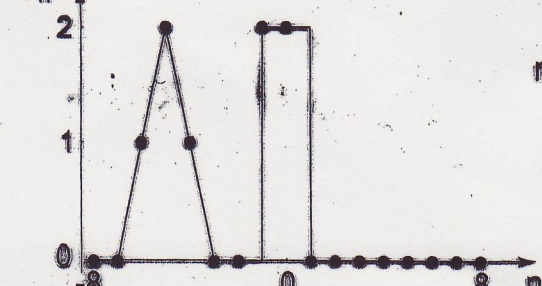


$m = 4$

$m = 1$



U_n^m



$m = 5$