俯瞰講義

ファイナンスと数学

第９回

ファイナンスの
実務的な問題と
高い次元の積分計算

積分をどう計算するか

数学 ⟹ 応用
⟸
新しい数学

ファイナンスのためだけの数学
もちろん存在しない

応用をにらんで数学を作る
必要がある

数理ファイナンス　金融工学

数値計算・数値解析

実務上重要である

計算機が発達した現在でも
難しい！

従来の手法では限界がある

Computational Finance
計算ファイナンス

積分の復習（予習？）

関数 $f(x)$, $0 \leqq x \leqq 0$, の積分 ($f(x) \geqq 0$, $0 \leqq x \leqq 1$, とする)

$$\int_0^1 f(x)dx$$

xy 平面の x 軸、y 軸、$y = f(x)$ のグラフ、直線 $x = 1$ の囲む図形の面積

長方形近似

$$I_n^{(1)}(f) = \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n}f(\frac{n-1}{n})$$

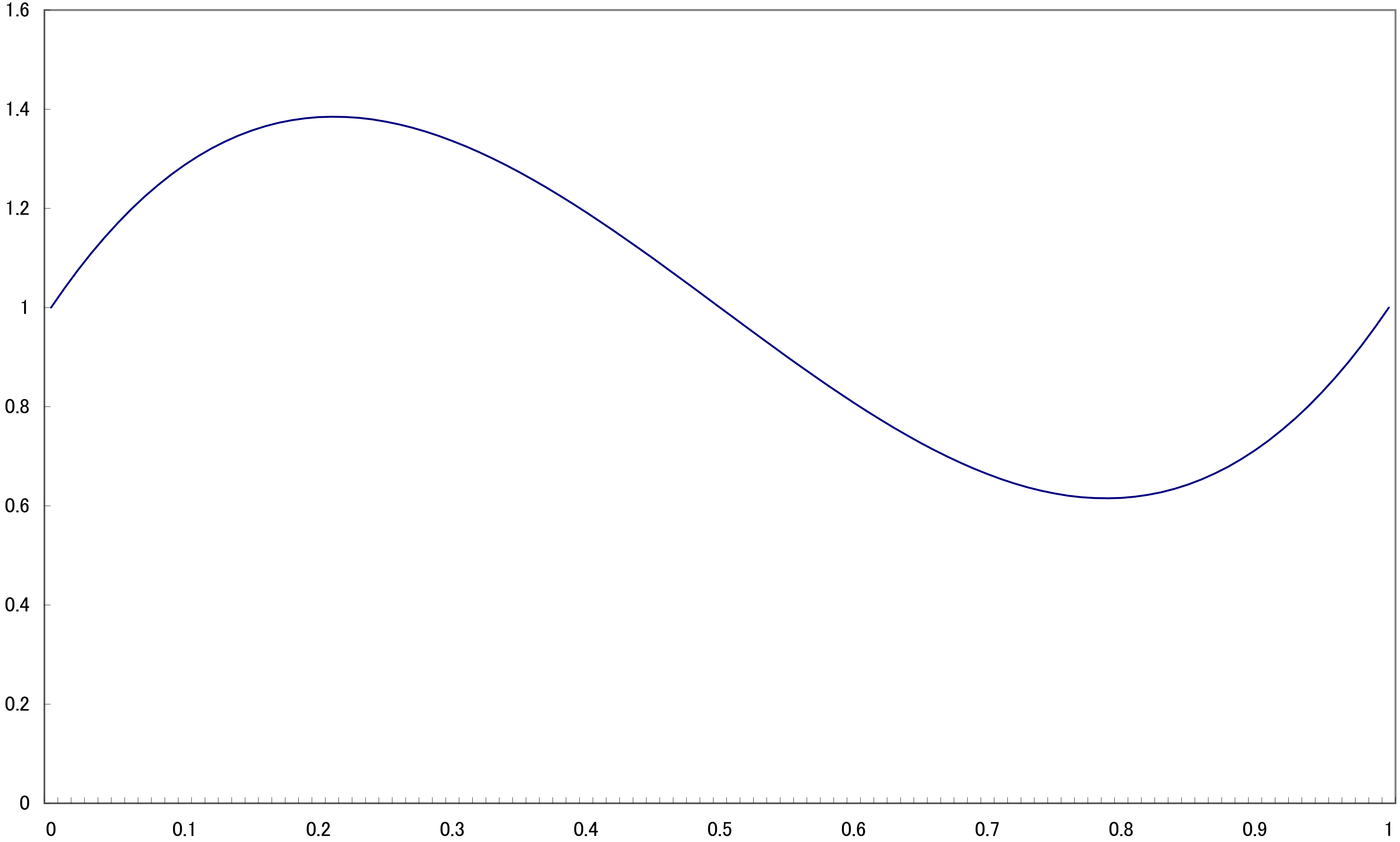
数学的には積分は $I_n^{(1)}$ の 極限

台形近似

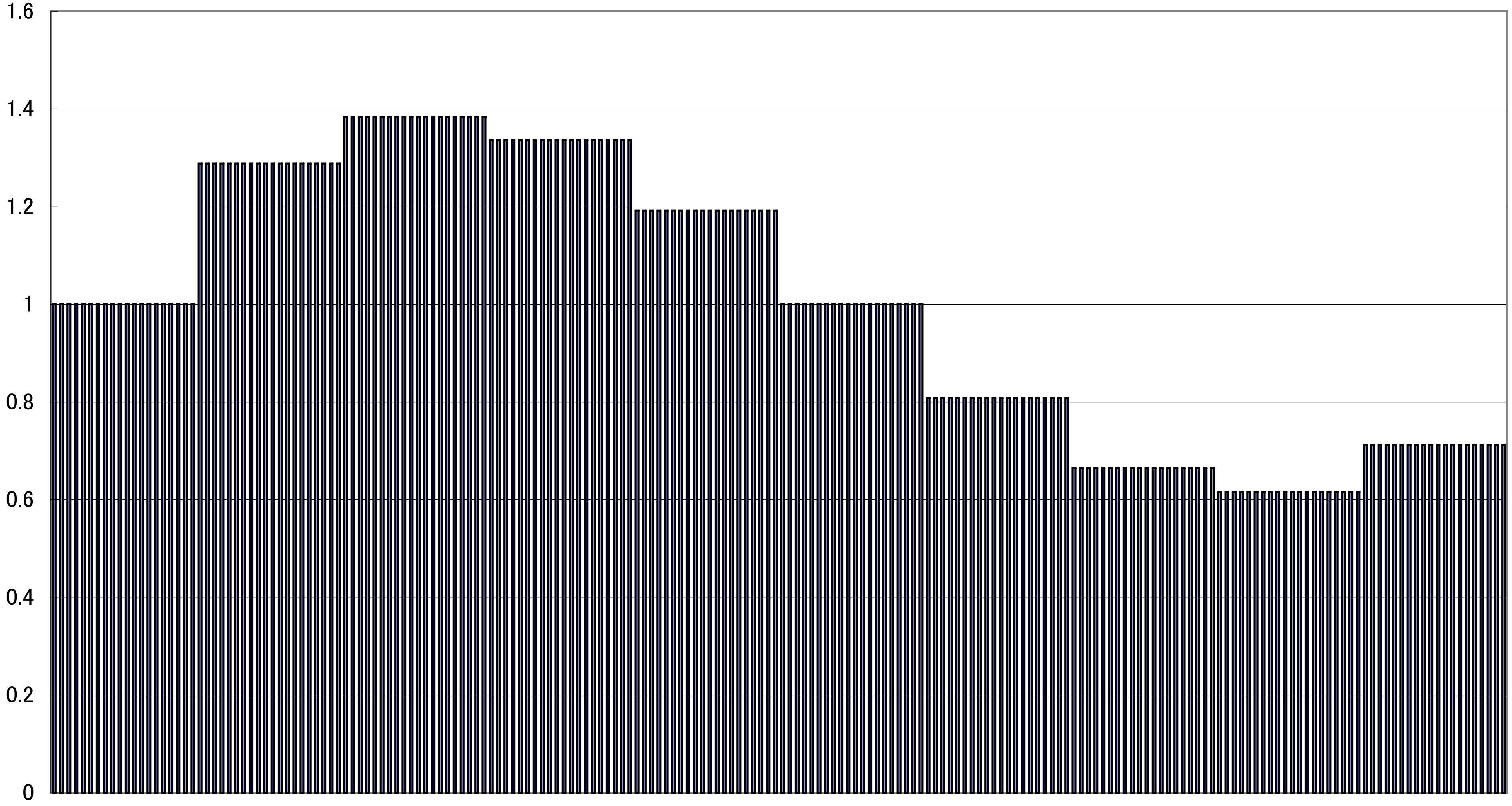
$$I_n^{(1)}(f) = \frac{1}{2n}f(0) + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n}f(\frac{n-1}{n}) + \frac{1}{2n}f(1)$$

$$\int_0^1 1\ dx = 1, \qquad \int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2},$$

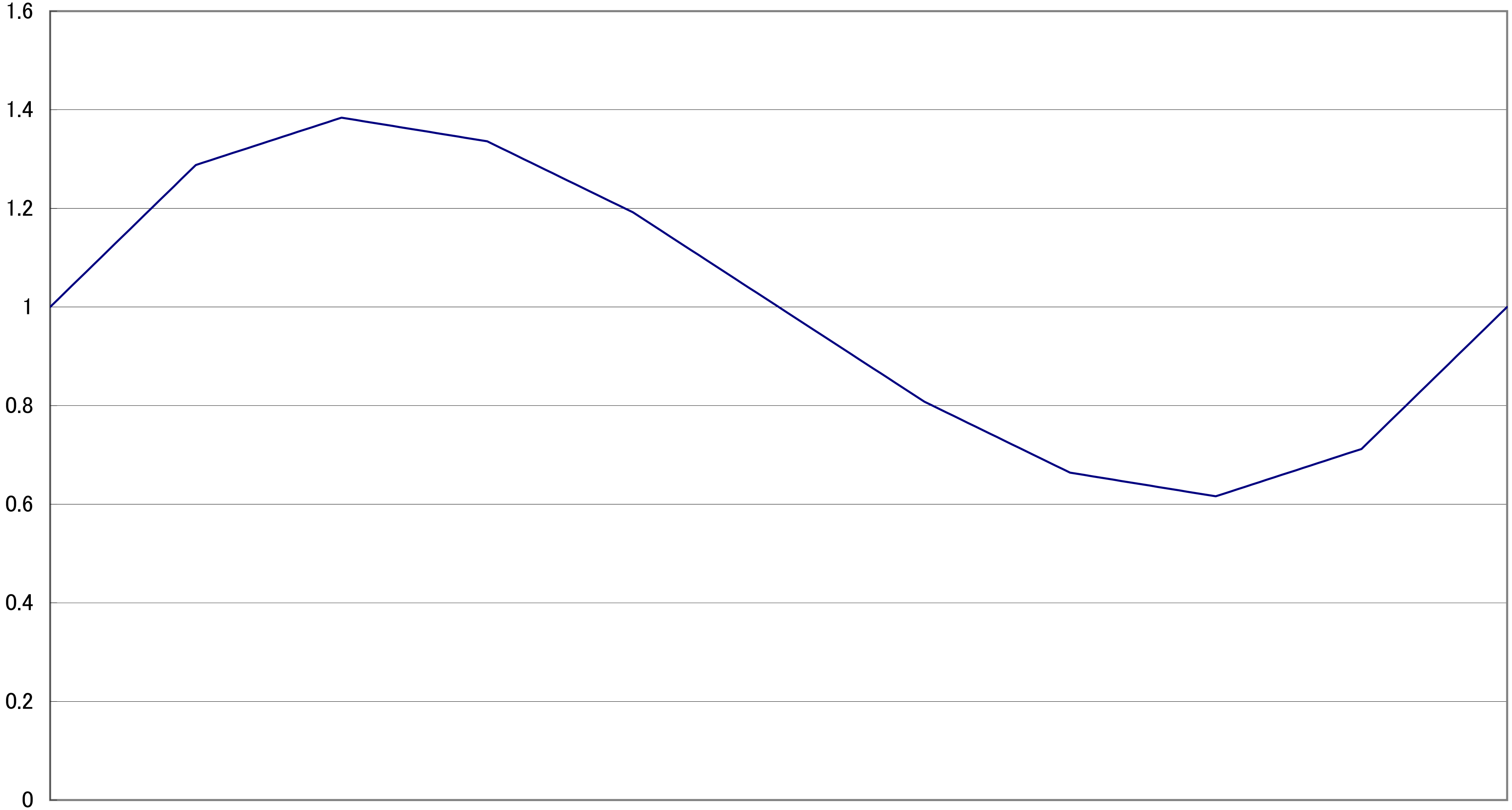
$$\int_0^1 x^m\ dx = \frac{1}{m+1}, \qquad \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\ dx = \pi.$$

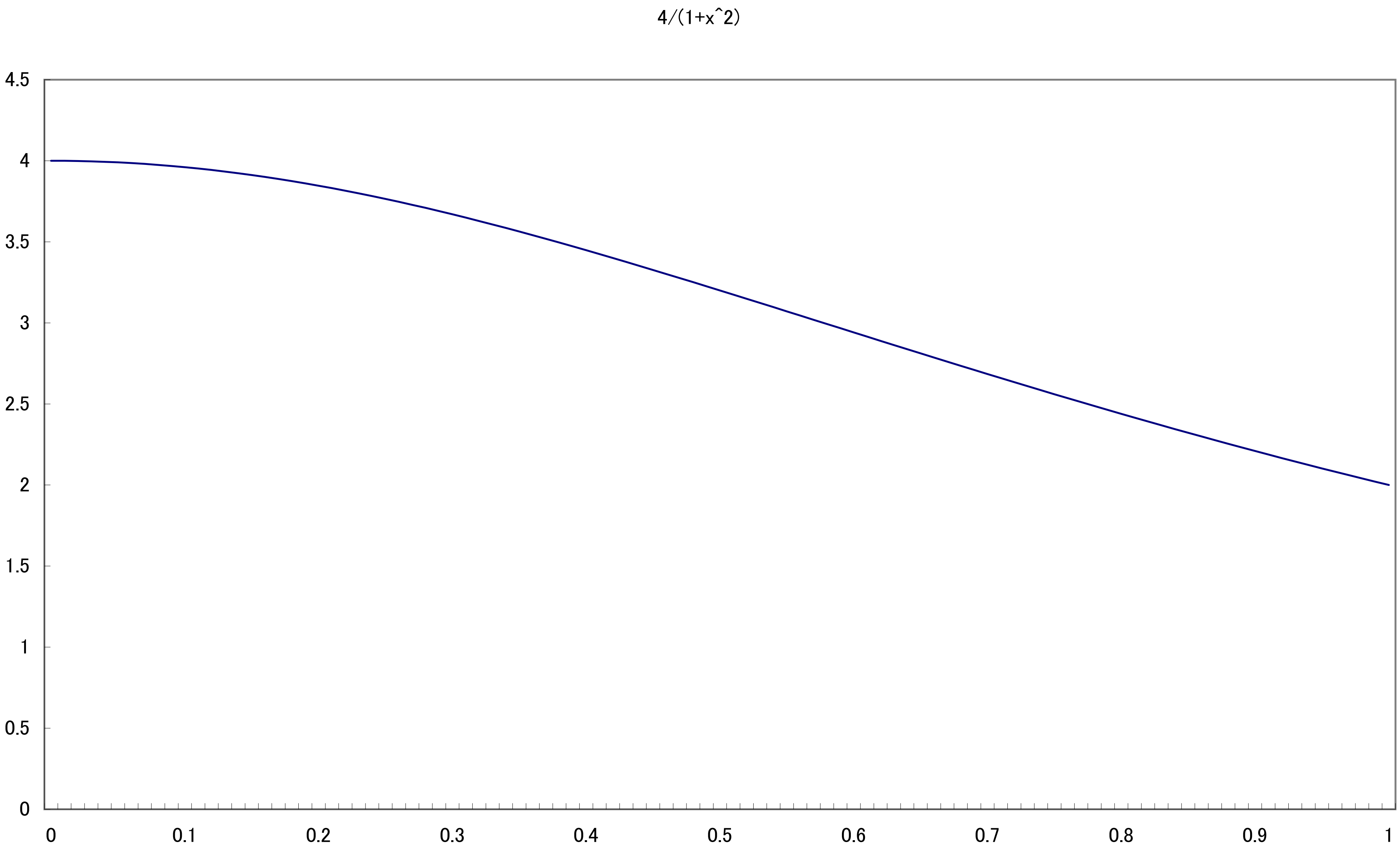

1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

積分の長方形近似

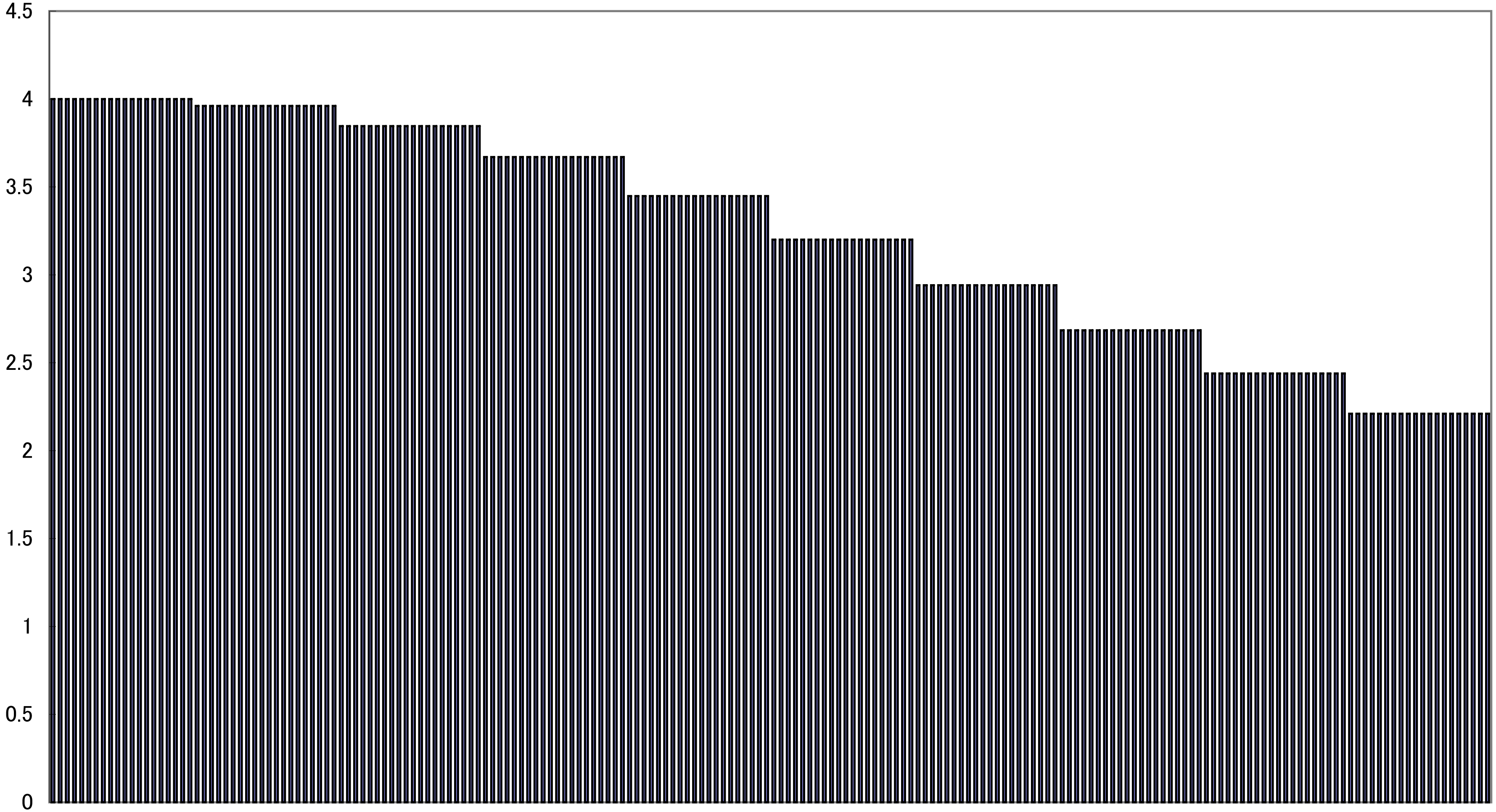


積分の台形近似

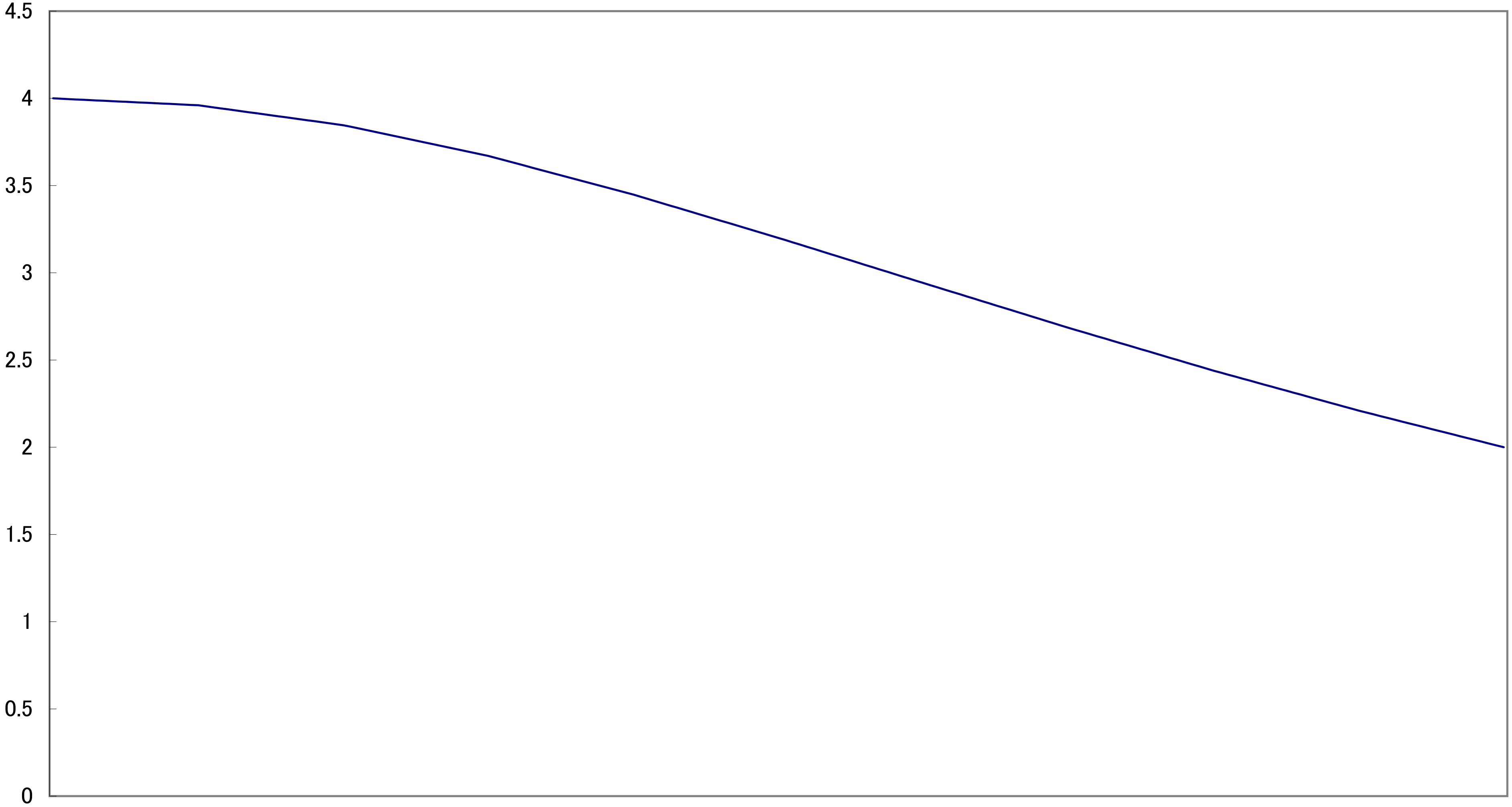



4/(1+x^2)
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

長方形近似



台形近似



	長方形左	台形
100	3.151576	3.141576
200	3.146588	3.141588
300	3.144924	3.141591
400	3.144092	3.141592
500	3.143592	3.141592
600	3.143259	3.141592
700	3.143021	3.141592
800	3.142842	3.141592
900	3.142704	3.141592
1000	3.142592	3.141592

	長方形左	台形
1000	3.142592	3.141592
2000	3.142093	3.141593
3000	3.141926	3.141593
4000	3.141843	3.141593
5000	3.141793	3.141593
6000	3.141759	3.141593
7000	3.141736	3.141593
8000	3.141718	3.141593
9000	3.141704	3.141593
10000	3.141693	3.141593

多変数の関数の積分（多重積分）

２変数の関数 $f(x,y)$, $0 \leqq x, y \leqq 1$, の重積分

$$\int_{0\leqq x,y\leqq 1} f(x,y)dxdy = \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx$$

$$I_n^{(2)}(f)$$

$$= \frac{1}{n^2}\{f(0,0) + f(0,\frac{1}{n}) + f(0,\frac{2}{n}) + \cdots + f(0,\frac{n-1}{n})$$

$$+f(\frac{1}{n},0) + f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) + f(\frac{1}{n},\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{1}{n},\frac{n-1}{n})$$

$$+f(\frac{2}{n},0) + f(\frac{2}{n},\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n},\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{2}{n},\frac{n-1}{n})$$

$$+f(\frac{n-1}{n},0) + f(\frac{n-1}{n},\frac{1}{n}) + f(\frac{n-1}{n},\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n-1}{n},\frac{n-1}{n})\}$$

$I_n^{(2)}$ は n^2 個の項を持つ

$f(x,y) = g(x) + h(y)$ ならば

$$I_n^{(2)}(f) = I_n^{(1)}(g) + I_n^{(1)}(h)$$

左辺は n^2 の項、右辺は $2n$ の項　計算量が圧倒的に少ない

同様に 3 変数の関数 $f(x_1, x_2, x_3)$, $0 \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq 1$, の積分は

$$\int_{0 \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq 1} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^1 (\int_0^1 (\int_0^1 f(x_1, x_2, x_3) dx_3) dx_2) dx_1$$

近似

$$I_n^{(3)} = \frac{1}{n^3}\{f(0,0,0) + \cdots + f(\frac{n-1}{n}, \frac{n-1}{n}, \frac{n-1}{n})\} \ (n^3 \text{ の項})$$

変数が多い時は積分の近似計算は計算量が多くなり難しい

３６０変数の関数の積分

モーゲージ担保証券 (MBS: Morgage Backed Security) の価値

住宅ローンを基礎にした証券

政府の債務保証：ローンの焦げ付きリスクはない

　　　ローンの借り手は期限前に返済する権利がある

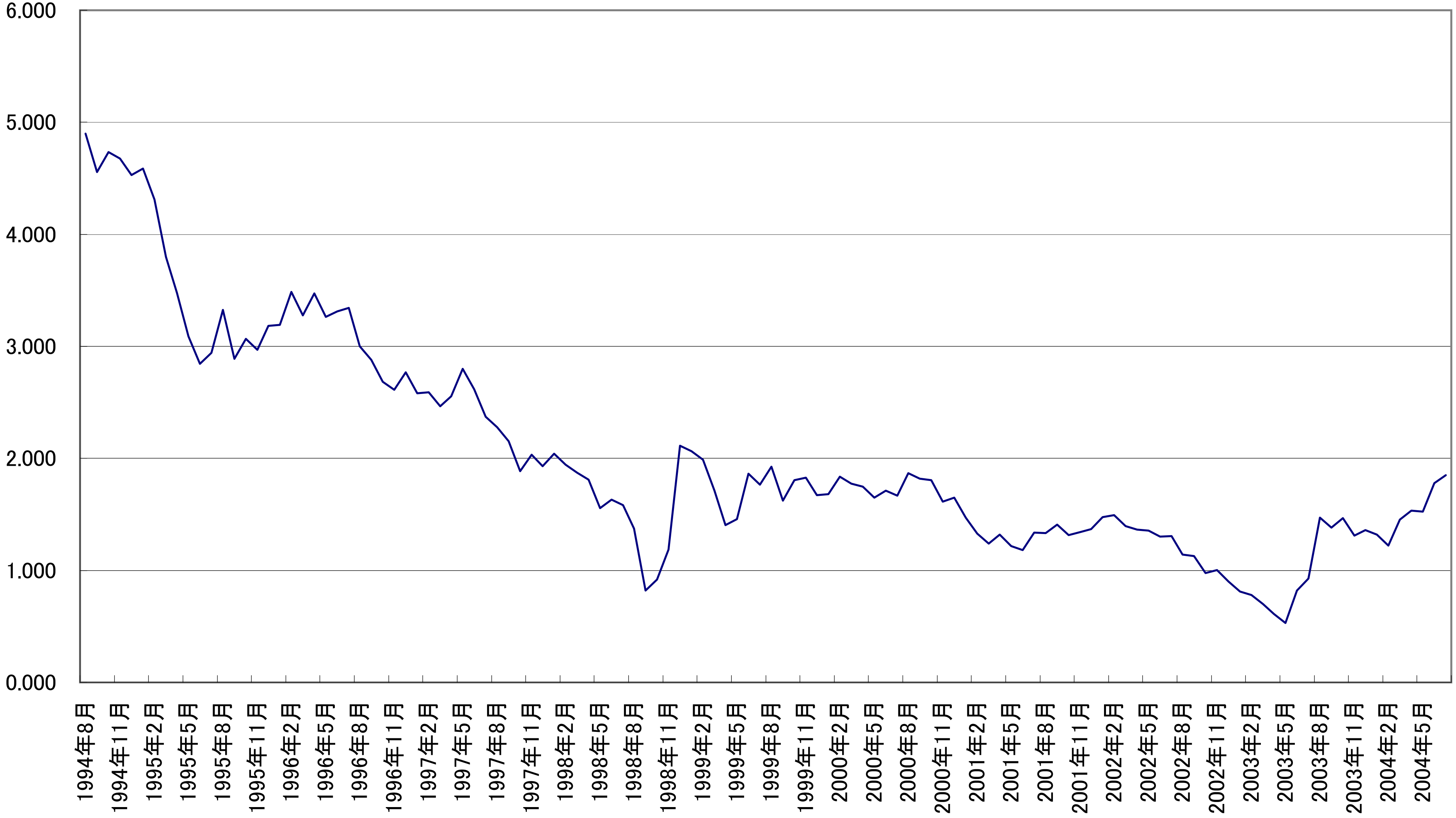
早期返還リスク：金利が下がればローンを借り換える

金利に対する確率過程モデル

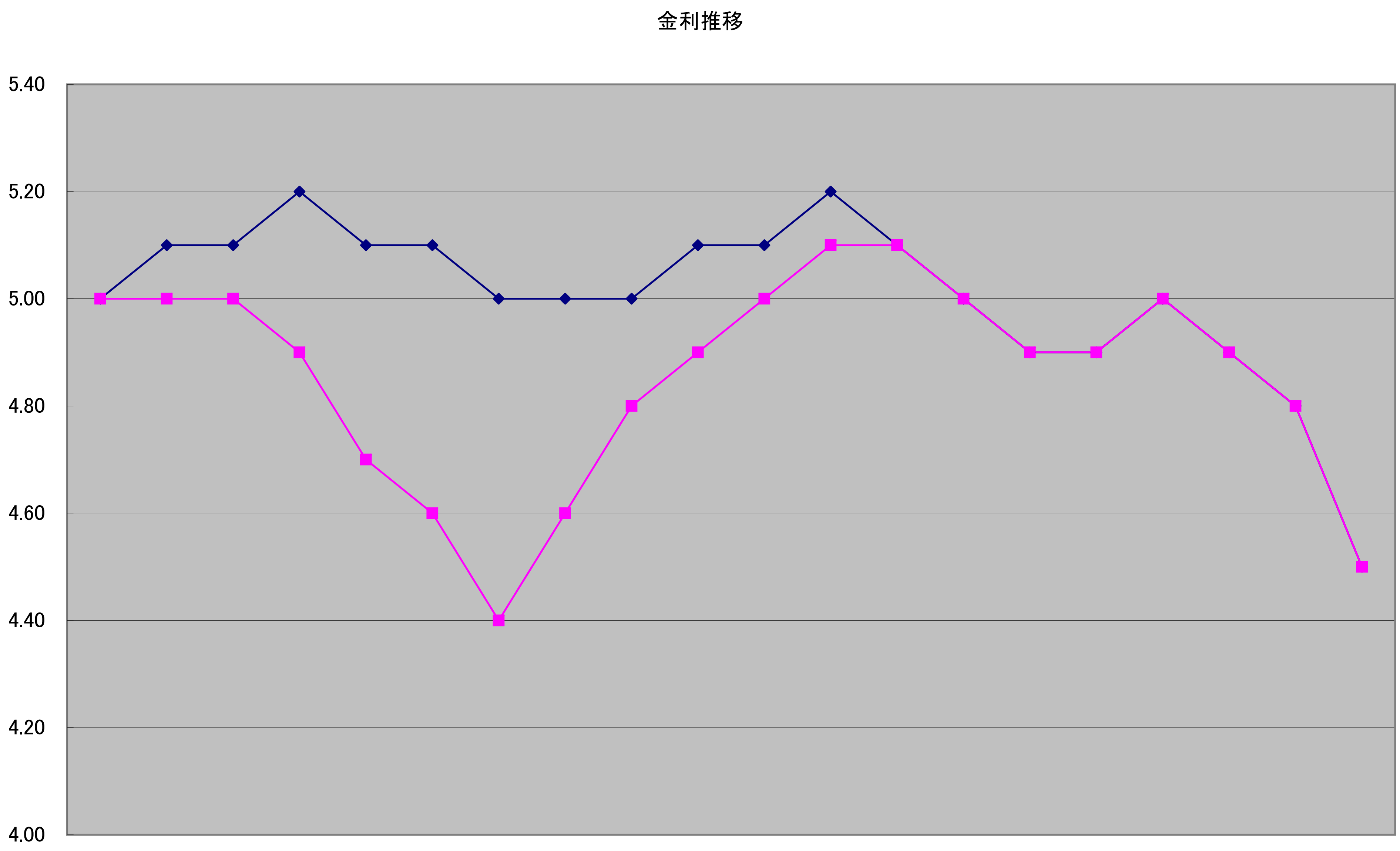
金利変化に対する反応の度合いのモデル

ローンの返済期間は最長３０年 ＝ ３６０ヶ月

長期国債利回り



6.000
5.000
4.000
3.000
2.000
1.000
0.000
1994年8月
1994年11月
1995年2月
1995年5月
1995年8月
1995年11月
1996年2月
1996年5月
1996年8月
1996年11月
1997年2月
1997年5月
1997年8月
1997年11月
1998年2月
1998年5月
1998年8月
1998年11月
1999年2月
1999年5月
1999年8月
1999年11月
2000年2月
2000年5月
2000年8月
2000年11月
2001年2月
2001年5月
2001年8月
2001年11月
2002年2月
2002年5月
2002年8月
2002年11月
2003年2月
2003年5月
2003年8月
2003年11月
2004年2月
2004年5月


金利推移
5.40
5.20
5.00
4.80
4.60
4.40
4.20
4.00

数学の問題

360 変数の関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_{360})$, $0 \leqq x_1, x_2, \ldots, x_{360} \leqq 1$, の多重積分

$$\int \cdots \int_{0 \leqq x_1, x_2, \ldots, x_{360} \leqq 1} f(x_1, x_2, \ldots, x_{360}) dx_1 dx_2 \cdots dx_{360}$$

の計算

求積法を用いる

各変数の動く区間を 10 等分に分割して計算

10^{360} 回の計算が必要

1 秒間に 10^{30} 回の計算：　10^{330} 秒 $>$ 10^{320} 年

乱数による方法

簡単のために 2 変数の関数 $f(x,y)$, $0 \leqq x, y \leqq 1$, の積分を考える

（ここでのアイデアは 360 変数の関数の積分にも適用可能）

◇ モンテカルロ法

0 から 1 までの実数の値を取る一様乱数 X

一様乱数：$0 \leqq X \leqq a$ $(0 \leqq a \leqq 1)$ となる確率が a であるような確率変数の**実現値**

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ が独立な一様乱数

大数の法則

$$M_n = \frac{1}{n}\{f(X_1, X_2) + f(X_3, X_4) + \cdots + f(X_{2n-1}, X_{2n})\}$$

$$\to I = \int\int_{0 \leqq x, y \leqq 1} f(x,y)dxdy, \qquad n \to \infty$$

一様乱数の実際の発生：疑似乱数 $\Rightarrow$ 松本真（広島大学）

大雑把に言うと誤差 $|I - M_n| \sim n^{-1/2}$

（正確には $n^{-1/2} \log \log n$ である）

10^{-3} 程度の誤差：$n = 10^6$ 程度の計算が必要

10^{-5} 程度の誤差：10^{10} 程度の計算が必要

大幅に計算回数が減る

もっと偏りのない点列はできないか？

◇ Halton 列　　　　　　2 進法、3 進法による数の記法

10 進法	2 進法	3 進法
1	1	1
2	10	2
3	11	10
4	100	11
5	101	12
6	110	20
7	111	21
8	1000	22
9	1001	100
10	1010	101

数 n の 2 進法表記の計算

n 割る $2 = c_{n1}$ 余り a_{n1}　c_{n1} 割る $2 = c_{n2}$ 余り a_{n2}　c_{n2} 割る $2 = c_{n3}$ 余り a_{n3}

以下, 順次同じようにして a_{n1}, c_{n1}, a_{n2}, c_{n2}, a_{n3}, c_{n3}, ... を定めていくと $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots$ は 0 か 1 であり、

$n = a_{n1}2^0 + a_{n2}2^1 + a_{n3}2^2 + \cdots$

n を 2 進表記したとき、a_{n1} は 1 の位の数、a_{n2} は 10 の位の数、...

$$\phi_2(n) = \frac{a_{n1}}{2} + \frac{a_{n2}}{2^2} + \frac{a_{n3}}{2^3} + \cdots$$

と定めると自然数 n を有理数 (2 進小数) $\phi_2(n)$ に対応させる関数 ϕ_2 が与えられ、$0 < \phi_2(n) < 1$ となる

10 進法	2 進法	$\phi_2(n)$
0	0	0
1	1	$1/2$
2	10	$0 + 1/4$
3	11	$1/2 + 1/4$
4	100	$0 + 0 + 1/8$
5	101	$1/2 + 0 + 1/8$
6	110	$0 + 1/4 + 1/8$
7	111	$1/2 + 1/4 + 1/8$
8	1000	$0 + 0 + 0 + 1/16$
9	1001	$1/2 + 0 + 0 + 1/16$
10	1010	$0 + 1/4 + 0 + 1/16$

一般に p を素数として n を p 進展開すると

$$n = b_{n1}p^0 + b_{n2}p^1 + b_{n2}p^1 + \cdots$$

となる $b_{n1}, b_{n2}, b_{n3}, \ldots = 0, 1, 2, \ldots, p-1,$ がただ一つ定まる

これに対して

$$\phi_p(n) = \frac{b_{n1}}{p} + \frac{b_{n2}}{p^2} + \frac{b_{n3}}{p^3} + \cdots$$

と定めると

自然数 n に対して $0 < \phi_p(n) < 1$

を満たす有理数を対応させる関数 ϕ_p が定まる

$1 \leqq n \leqq 9$ に対する $(\phi_2(n), \phi_3(n))$ の表

n	$\phi_2(n)$	$\phi_3(n)$
1	$1/2$	$1/3$
2	$1/4$	$2/3$
3	$3/4$	$1/9$
4	$1/8$	$4/9$
5	$5/8$	$7/9$
6	$3/8$	$2/9$
7	$7/8$	$5/9$
8	$1/16$	$8/9$
9	$9/16$	$1/27$
10	$5/16$	$10/27$

　正方形 $[0,1]^2$ 内のベクトルの列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 及び　正方形内の図形 B 及び 自然数 $N \geqq 1$ に対して

$$D_N(B; \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty})$$

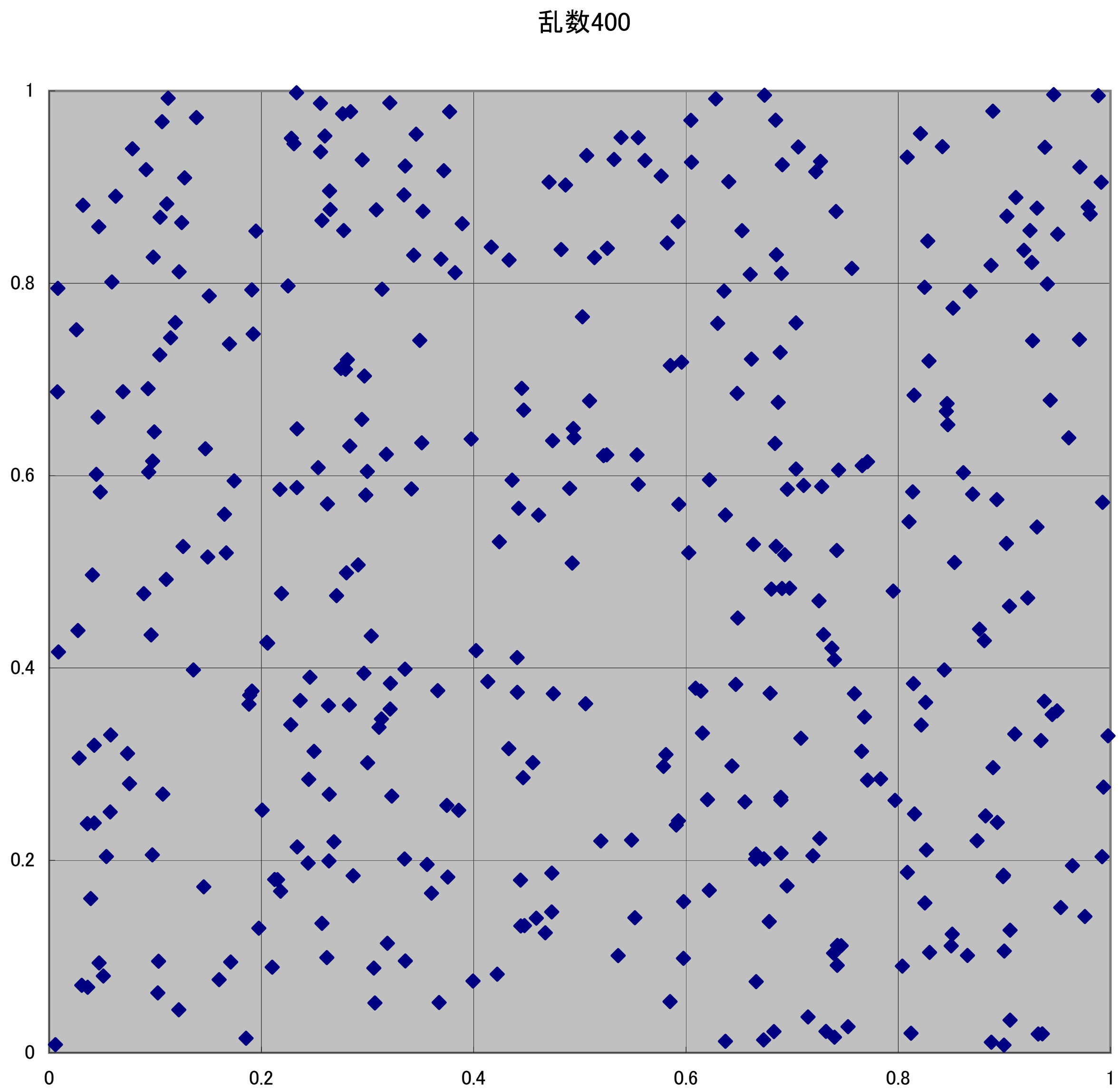
$$= |(\text{ 図形 } B \text{ に入る } (x_n, y_n),\, 1 \leqq n \leqq N \text{ の個数}) - N \times (B \text{ の面積})|$$

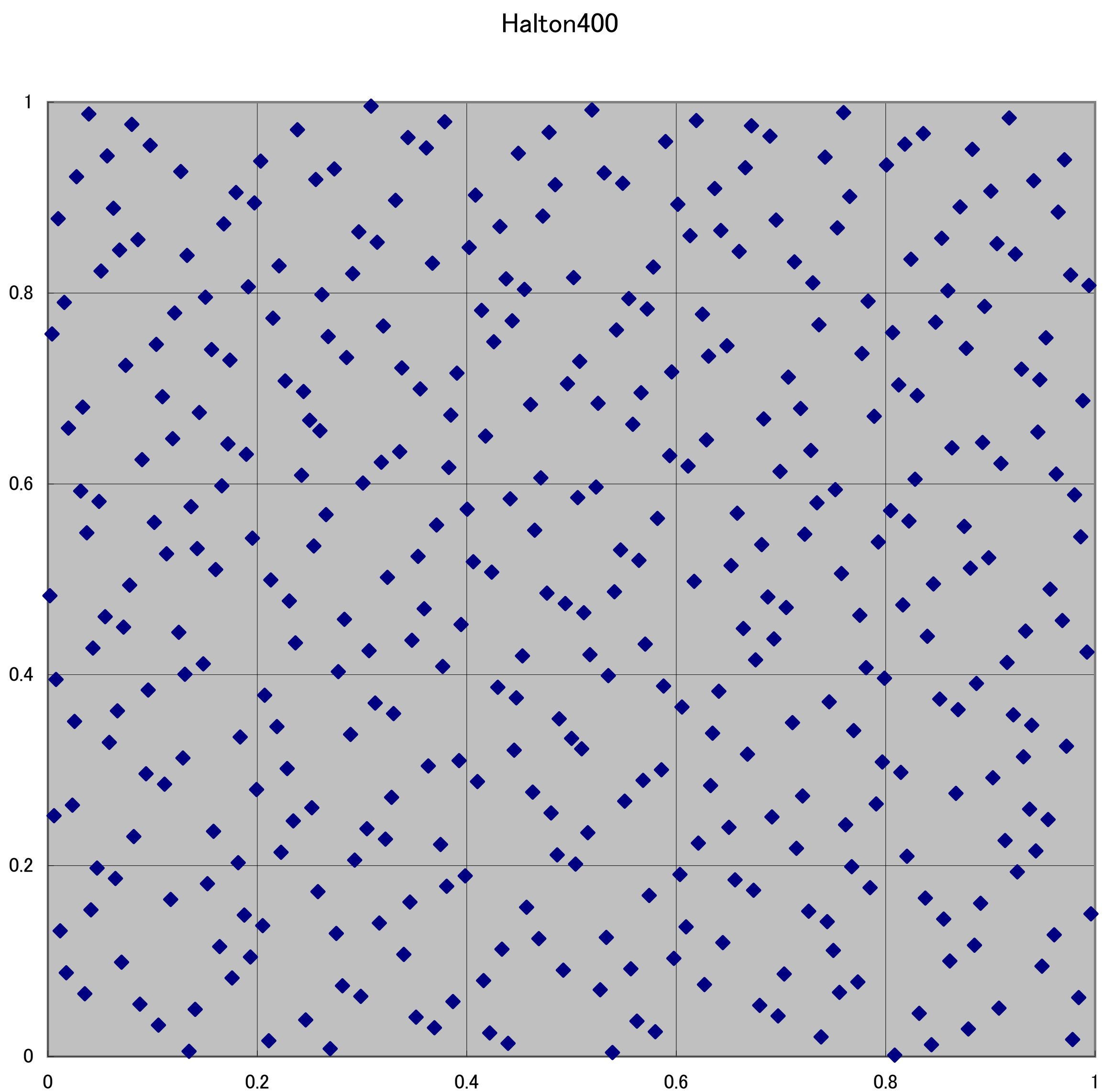
と定義する (Discrepancy)

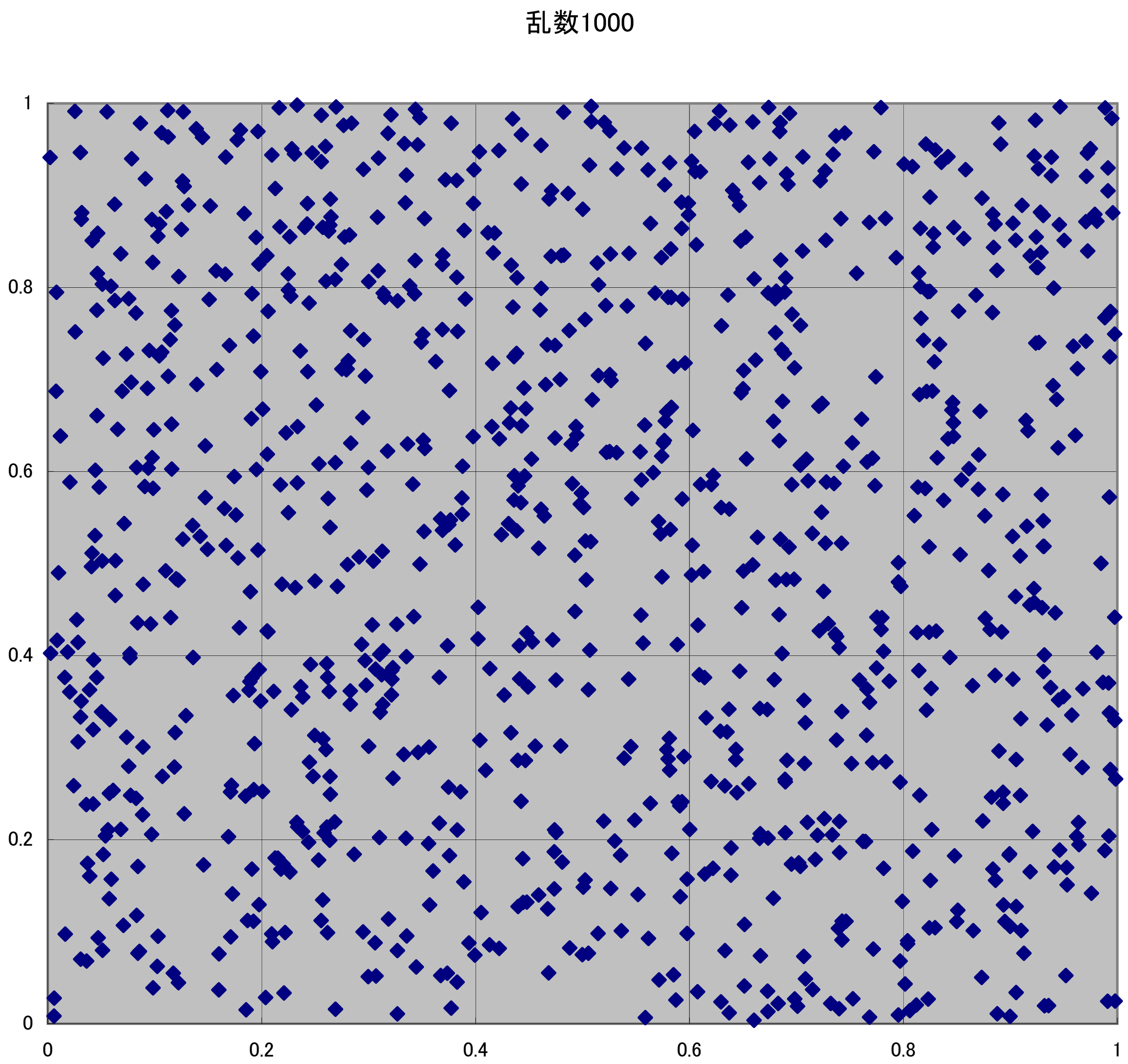
定理 1 p, q が相異なる素数とする。この時、以下を満たす定数 $C > 0$ が存在する。

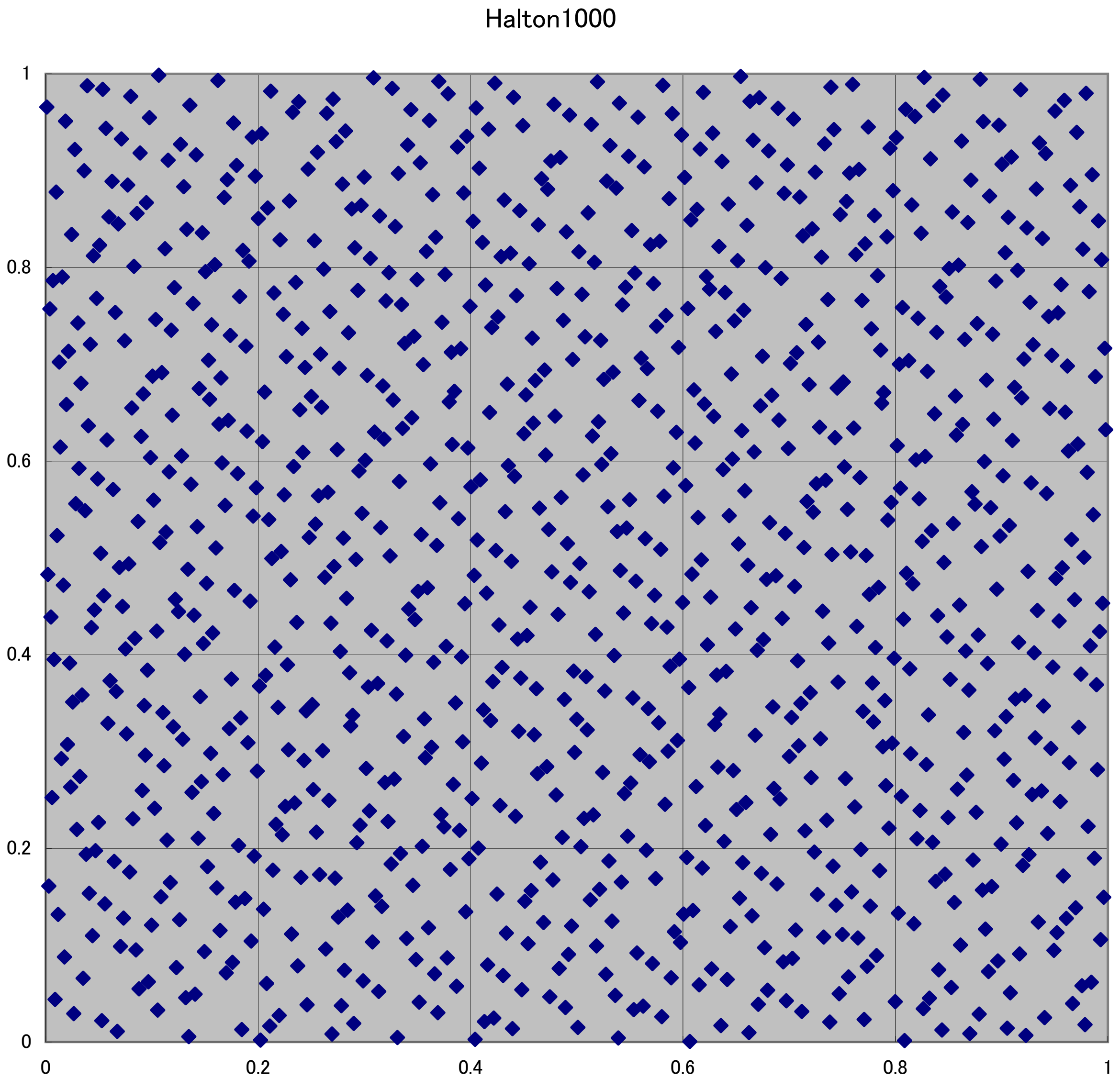
　正方形内の　辺が正方形と平行などのような長方形 B に対しても

$$D_N(B; \{(\phi_p(n), \phi_q(n))\}_{n=1}^{\infty}) \leqq C(\log N)^2, \quad N \geqq 1$$


乱数400
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Halton400
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


乱数1000
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Halton1000
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

立方体 $[0,1]^3$　内のベクトルの列 $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 及び　立方体内部の立体 B 及び 自然数 $N \geqq 1$ に対して

$$D_N(B; \{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=1}^{\infty})$$

$= |($ 立体 B に入る (x_n, y_n, z_n), $1 \leqq n \leqq N$ の個数$) - N \times (B$ の体積$)|$

と定義する (Discrepancy)

定理 2 p, q, r が相異なる素数とする。この時、以下を満たす定数 $C > 0$ が存在する。

正方形内の　辺が正方形と平行などのような長方形 B に対しても

$$D_N(B; \{(\phi_p(n), \phi_q(n), \phi_r(n))\}_{n=1}^{\infty}) \leqq C(\log N)^3, \quad N \geqq 1$$

$d \geqq 1$ とする

$[0,1]^d$ 内の点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $B \in \mathcal{B}([0,1]^d)$, 及び $N \geqq 1$ に対して

$$D_N(B; \{z_n\}_{n=1}^{\infty})$$

$$= |(\ z_n \in B \text{ となる } n = 1, 2, \ldots, N \text{ の個数}) - N \times (B \text{ のルベーグ測度})|$$

と定義する (Discrepancy)

定理 3 $p_1, \ldots, p_d$ が相異なる素数とする。この時、以下を満たす定数 $C > 0$ が存在する。

任意の $0 \leqq a_k \leqq 1$, $k = 1, \ldots, d$, に対して

$$D_N([0, a_1) \times \cdots \times [0, a_d); \{(\phi_{p_1}(n), \cdots \phi_{p_d}(n))\}_{n=1}^{\infty}) \leqq C(\log N)^d, \quad N \geqq 1$$

定理のような評価を受ける数列を low discrepancy 列と呼ぶ

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が low discrepancy 列

$f : [0,1]^d \to \mathbf{R}$ ある性質を満たす良い関数

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)$$

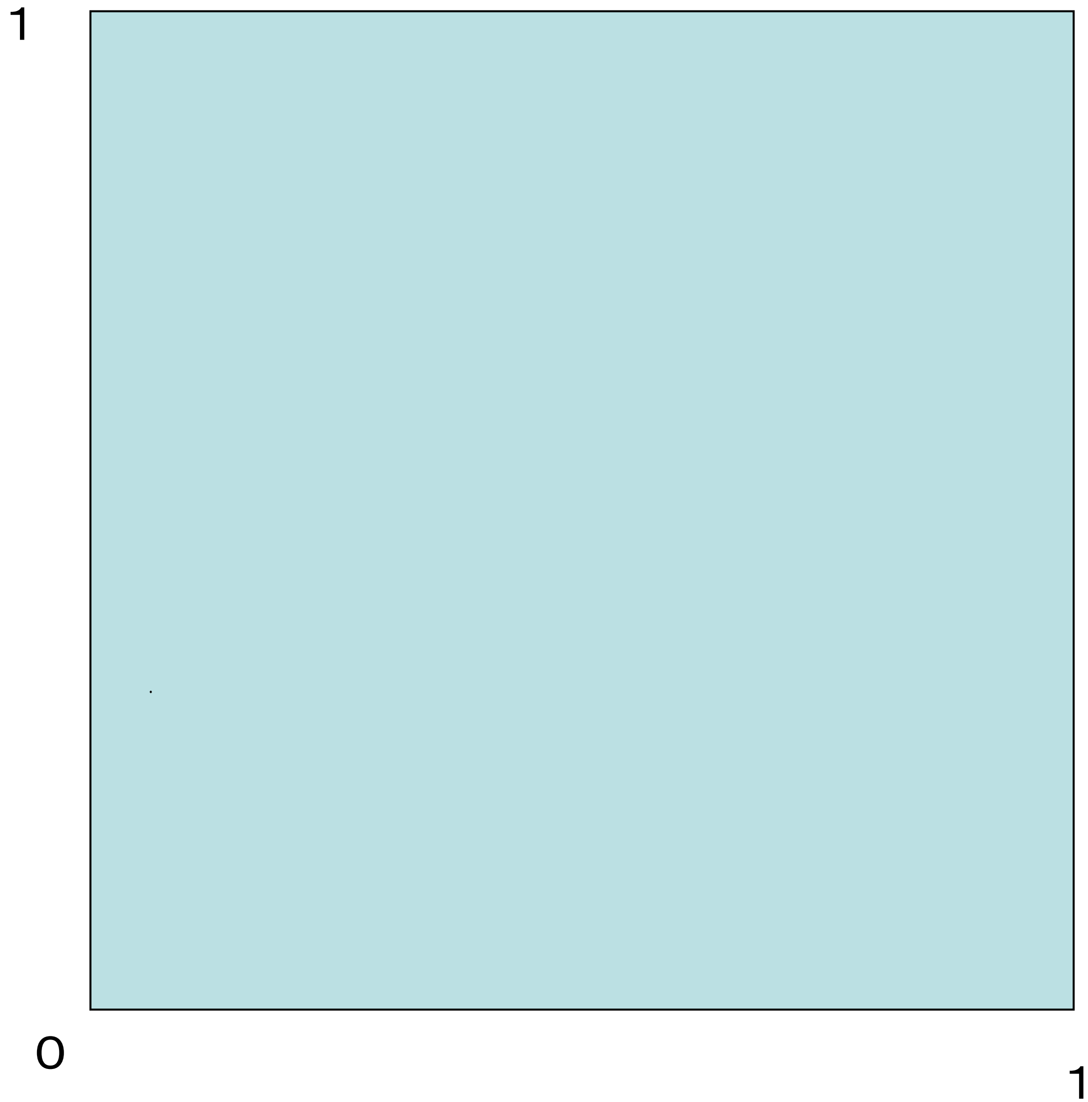
$$I = \int \cdots \int_{[0,1]^d} f(x) dx$$

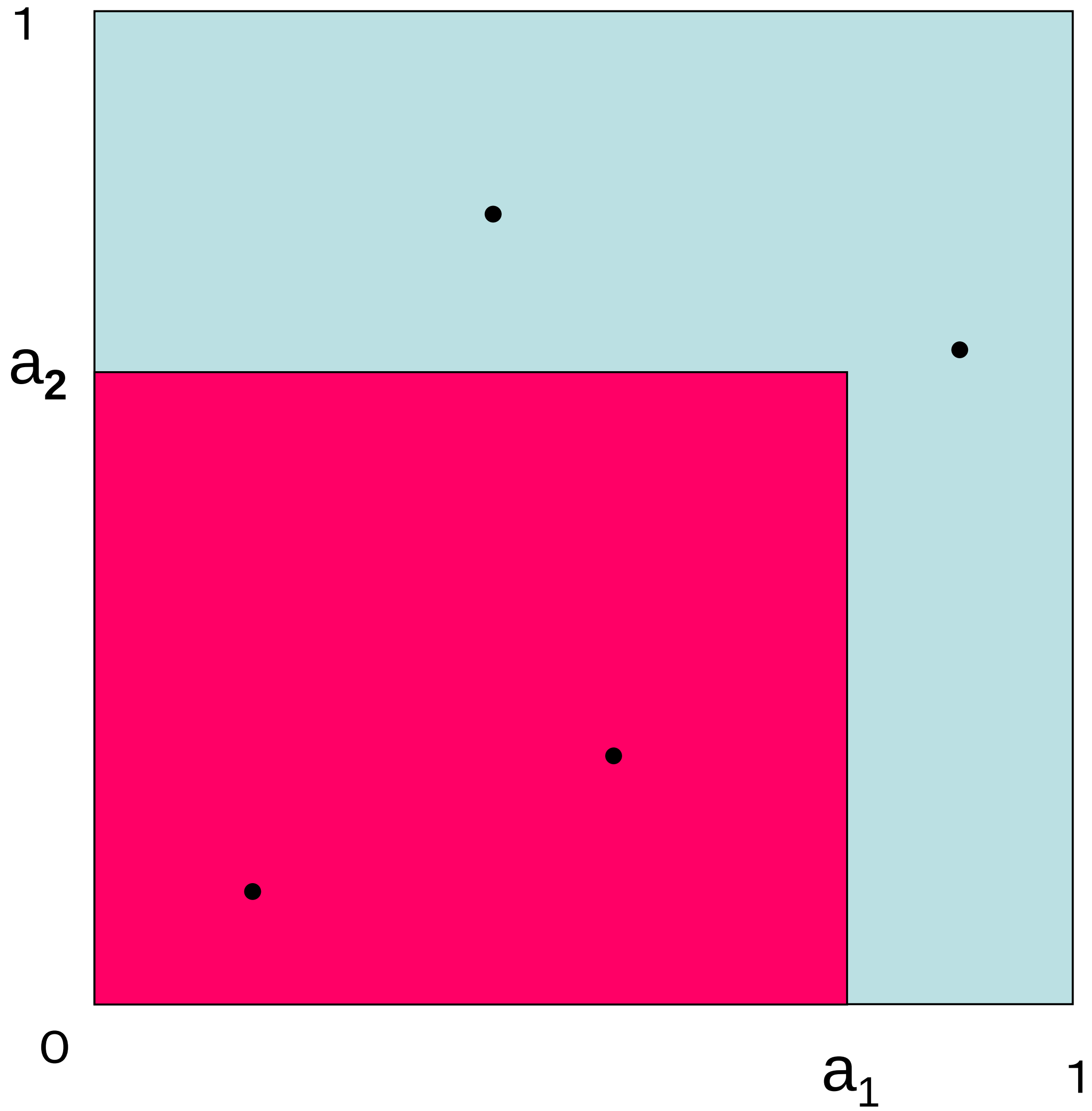
$$|I - M_n| \leqq C' \frac{(\log n)^d}{n}$$

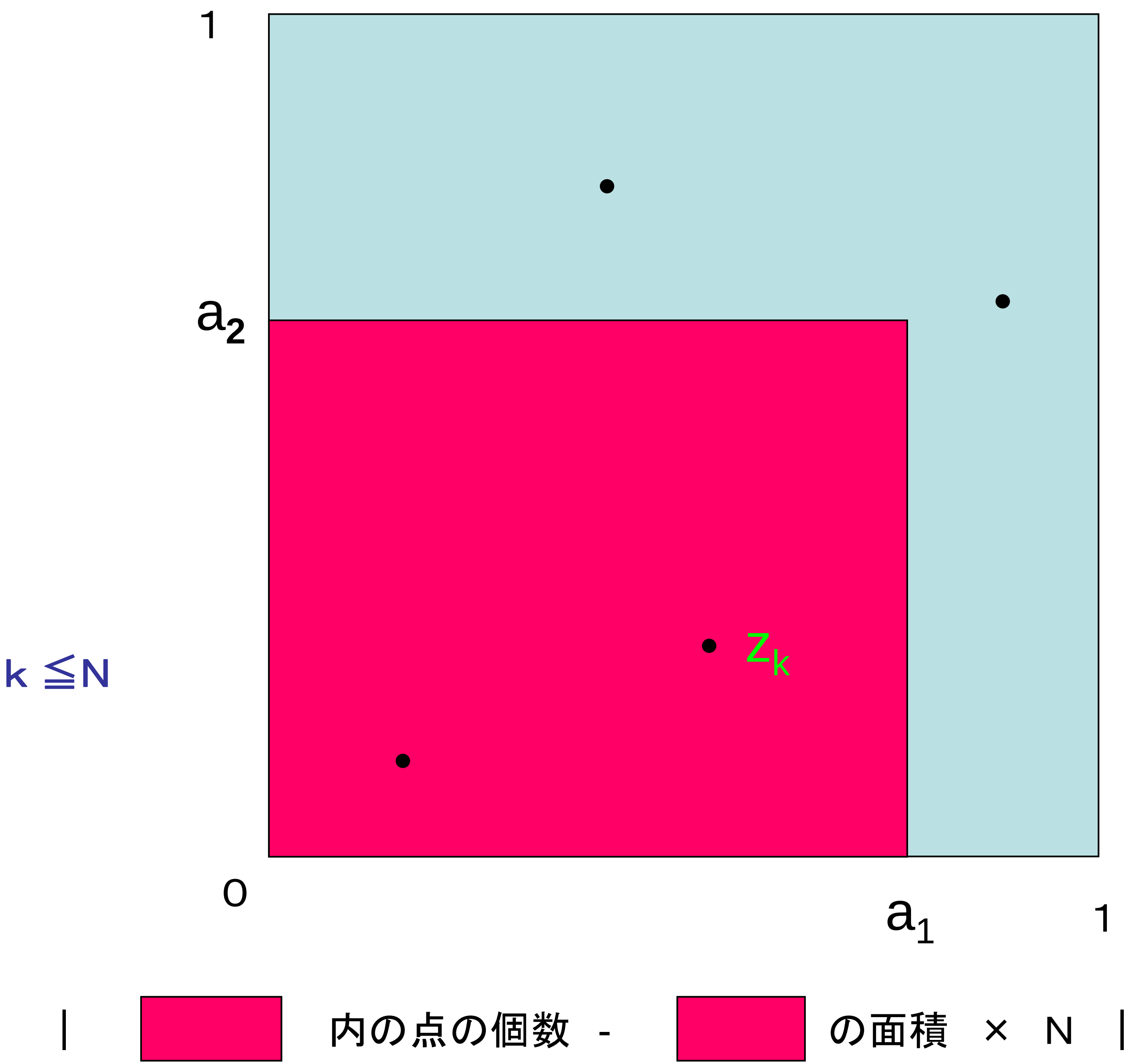
誤差はほぼ n^{-1} のオーダー

Halton 列は理論的にはよいが、実際の効率は次元が高くなるとあまり良くない

Sobol らが有限体上の多項式の性質をうまく使った方法を編み出した

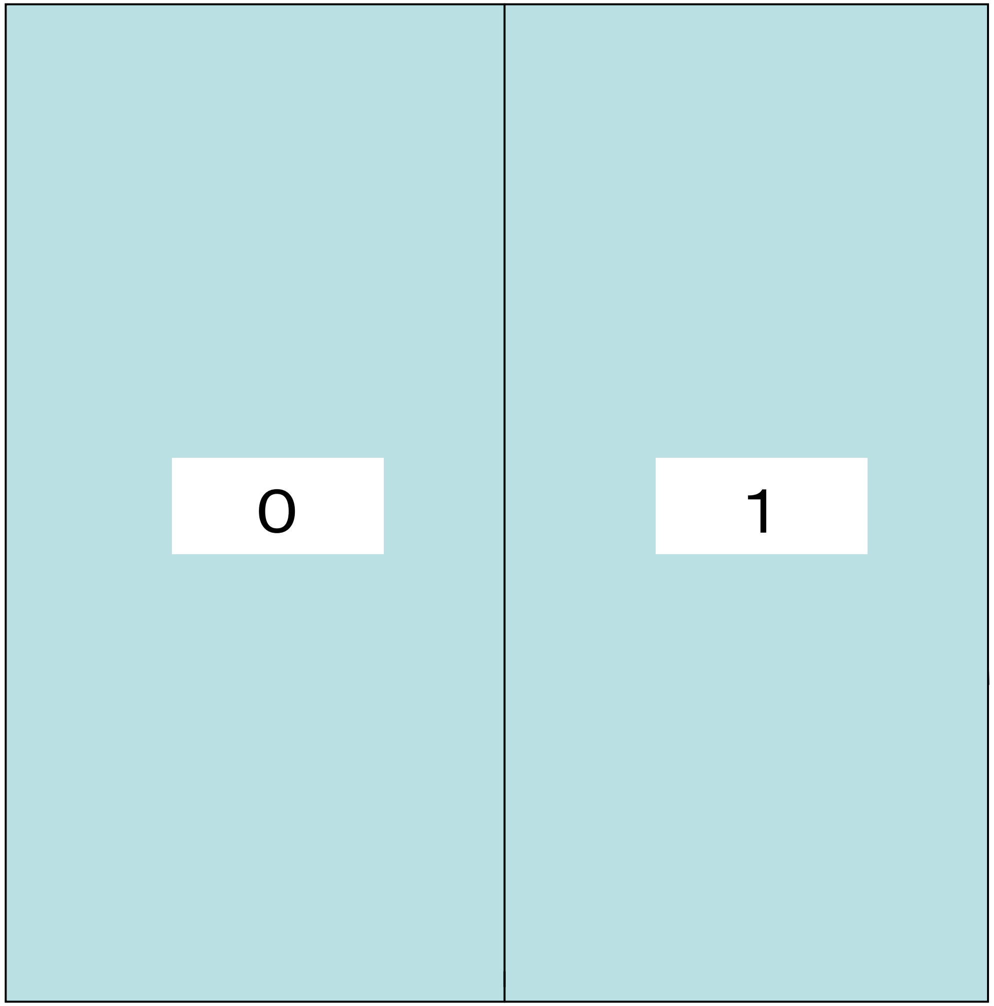

1
0
1


1
a_2
0
a_1
1


1
a2
k ≦N
zk
0
a1
1
| 内の点の個数 - の面積 × N |

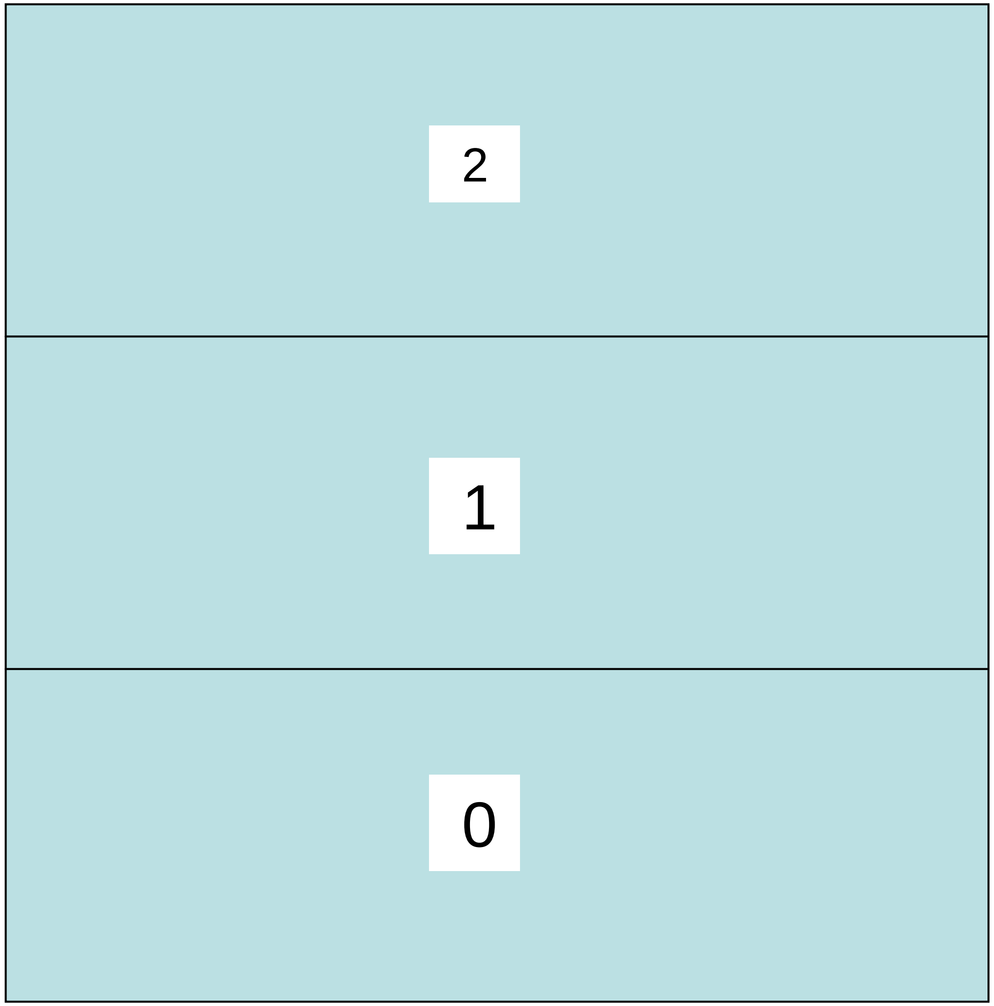
nを2で

割った余り



n を3で

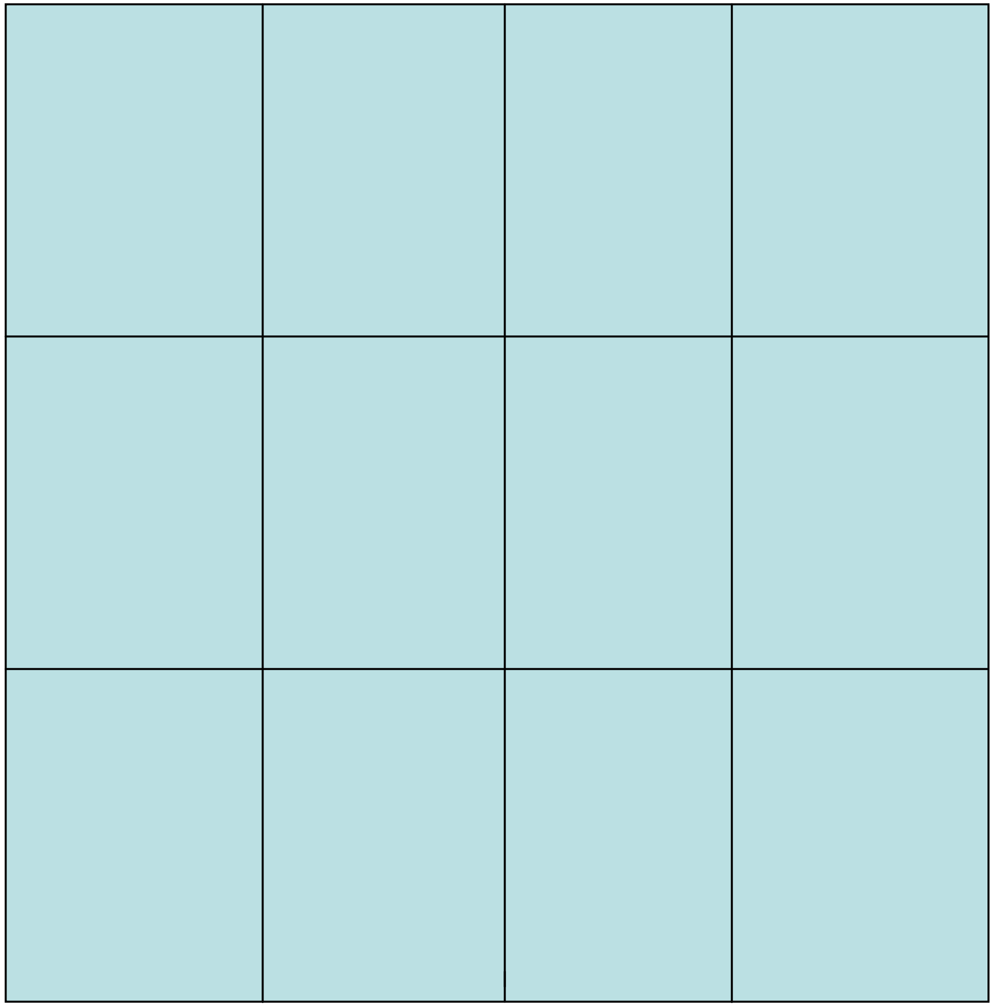
割った余り



n を6で
割った余り

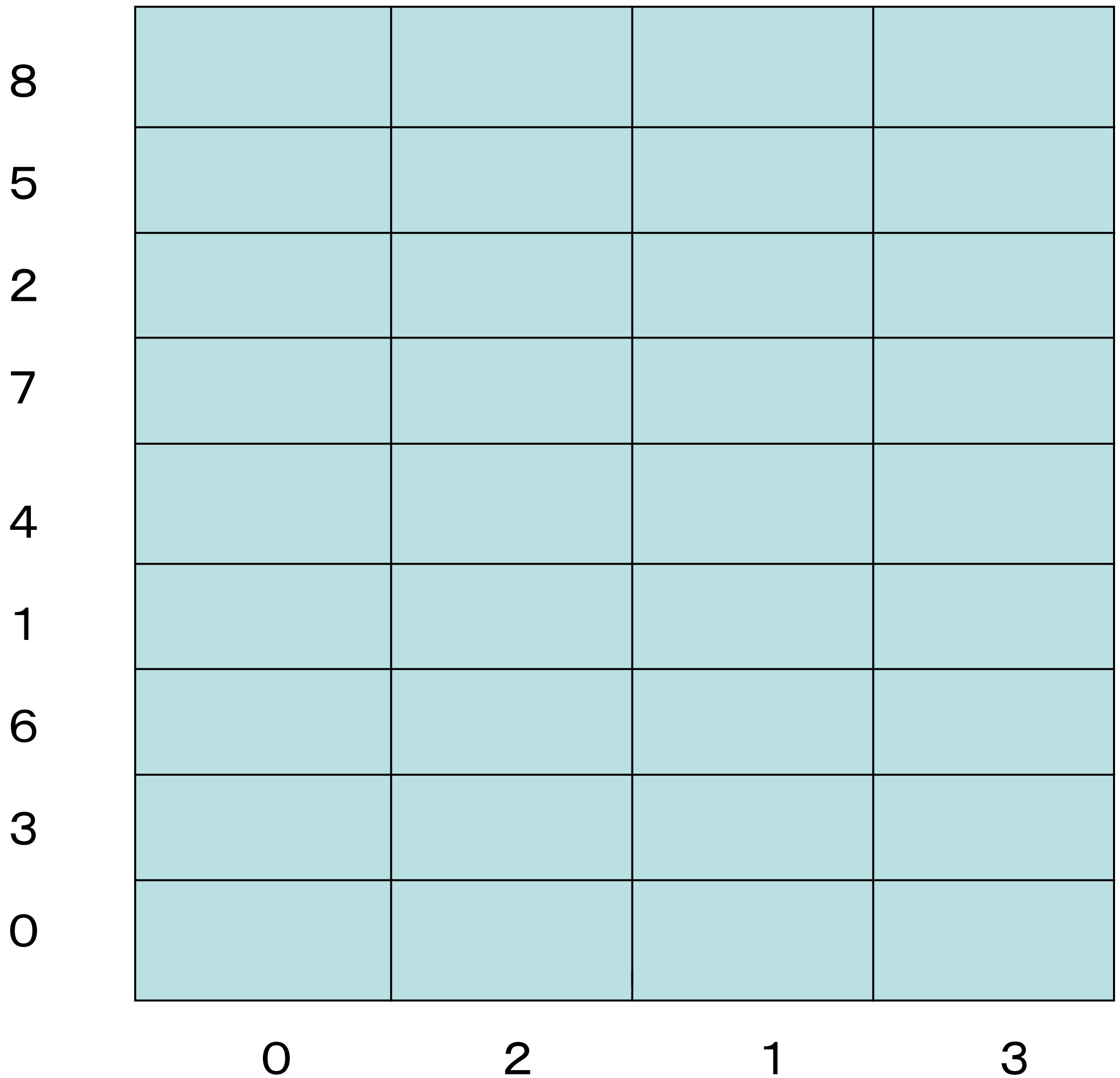
2	5
4	1
0	3

12分割



18分割

36分割



36分割

	0	2	1	3
8				
5				
2				
7				
4				
1				
6				
3				
0				