学術俯瞰講義「数学を創る」第10回

惑星の軌道を理解する

数理科学研究科

坪井　俊

学術俯瞰講義

教科書にはのっていない数学のお話

主題科目／テーマ講義　2単位　1、2年生対象

数学を創る－数学者達の挑戦－

コーディネータ・ナビゲータ：岡本和夫（理学部）

数学はどうやって創られたか　岡本和夫（理学部）、室田一雄（工学部）

第1回	10/8	数学はどうやって創られたか

ことばを創り、世界を創る　斎藤毅（理学部）

第2回	10/15	Mathematics "On Campus"
第3回	10/22	数の体系を創る
第4回	10/29	数と図形の共進化

脳と情報の数学を創る　甘利俊一（理化学研究所）

第5回	11/5	情報の仕組み：驚き、確率、幾何学
第6回	11/12	脳の仕組み：脳内情報の表現、記憶、学習の数理

目の錯覚の数学を創る　新井仁之（理学部）

第7回	11/19	数学で探る錯視の世界
第8回	11/26	脳の中のウェーブレット
第9回	12/3	錯視が創る新たな数学―ウェーブレットからフレームレットへ―

形を理解するための数学を創る　坪井俊（理学部）

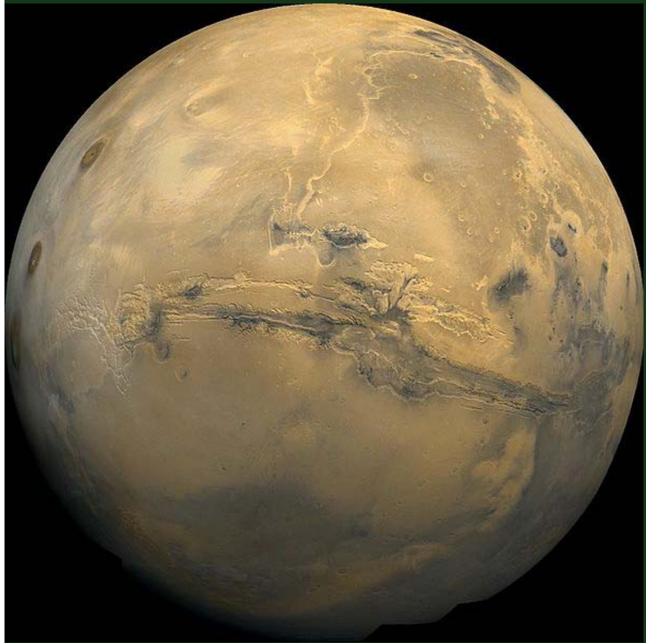
第10回	12/10	惑星の軌道を理解する
第11回	12/17	多面体の形と曲面の上の軌道の形
第12回	1/14	形の見分け方と数学の視点

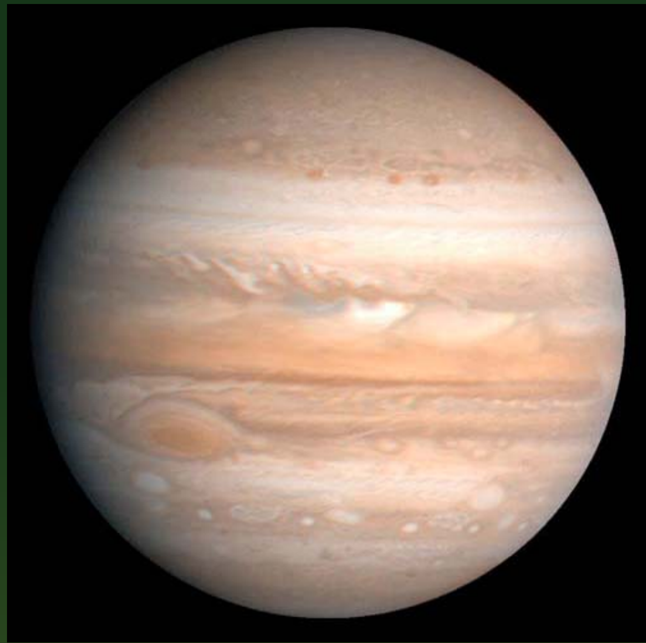
文化と数学　岡本和夫（理学部）

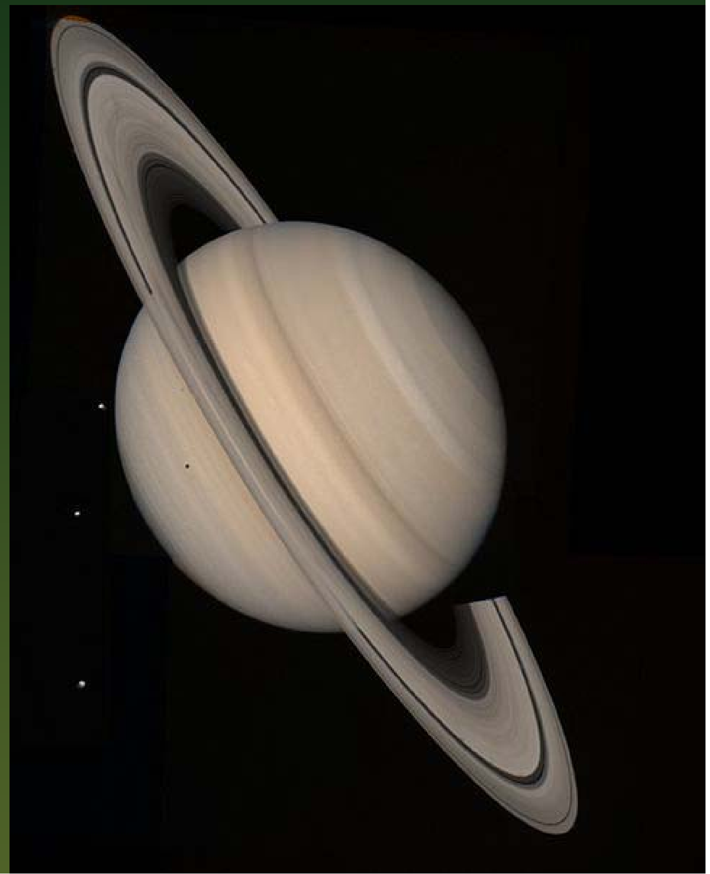
第13回	1/21	文化と数学

駒場キャンパス 18号館ホール 木曜日 5時限（16:20-17:50）

http://www.gfk.c.u-tokyo.ac.jp/







惑星

写真：NASAウェブページより転載

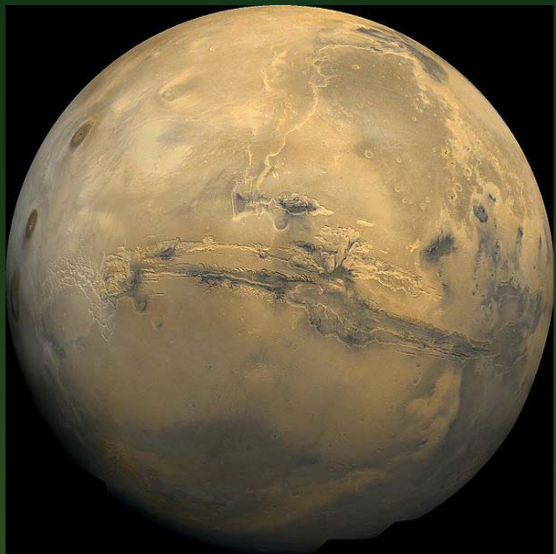
惑星はplanetの訳語（18世紀日本）

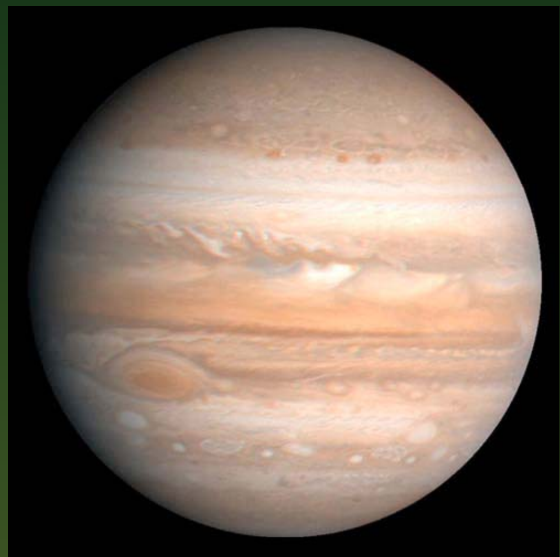
planet の語源はギリシャ語

A planet
$\pi\lambda\alpha\nu\acute{\eta}\tau\eta\varsigma$ **a derivative of the word**
$\pi\lambda\acute{\alpha}\nu\eta\varsigma$ **meaning “moving”.**

mitakaをみたことがありますか？

今日12月10日21時過ぎに東北東の空に火星が上り、木星が西南西の空に沈む。
11日1時ころ東の空に土星が上る（月が明るくて見えない）。





写真：NASAウェブページより転載

このような星の動きは、何千年も前から空を見上げ星を観察しているから、理解されていたはずである。3500年くらい前からの記録があるようである。

ヒッパルコス(190BC頃 —120BC頃)あるいは、プトレマイオス(AD85頃 —165頃)が、星座表を定めたと言われている。

星座の中にとどまらず、移動する星ということで惑星と呼ばれていた。

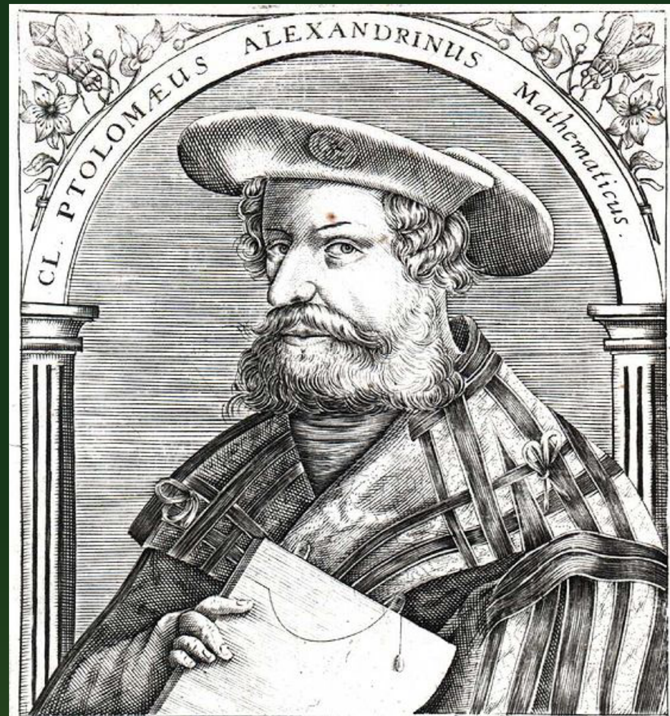
ヒッパルコス

暦を作ることは、為政者にとって必要不可欠であった。そのために天体の観測も行った。
惑星の動きを正確に予想することは、為政者にとっては重大なことであった。

暦を作ることは、為政者にとって必要不可欠であった。そのために天体の観測も行った。
惑星の動きを正確に予想することは、為政者にとっては重大なことであった。

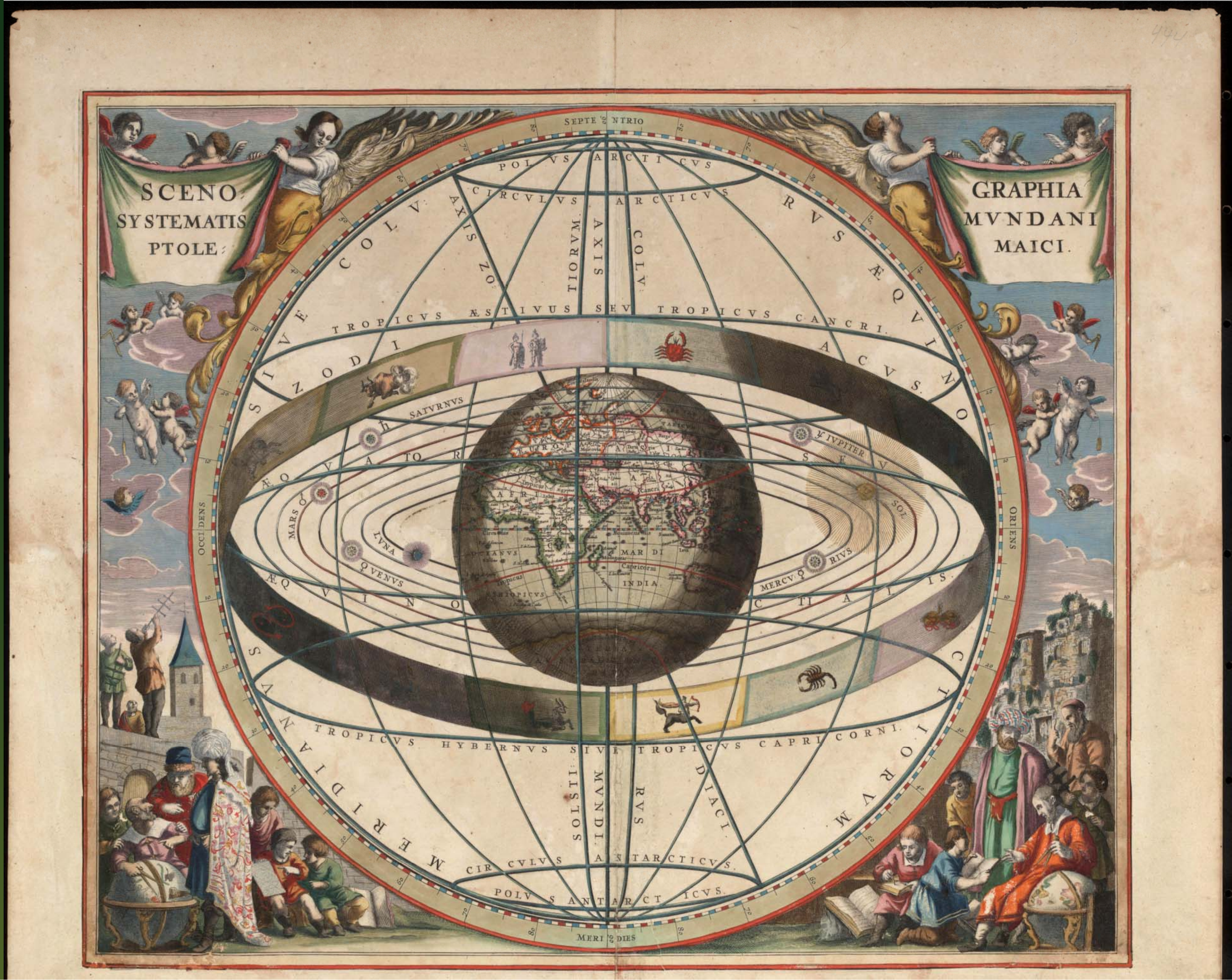
ミシェル・ド・ノートルダム
（ノストラダムス）（1503ー1566）

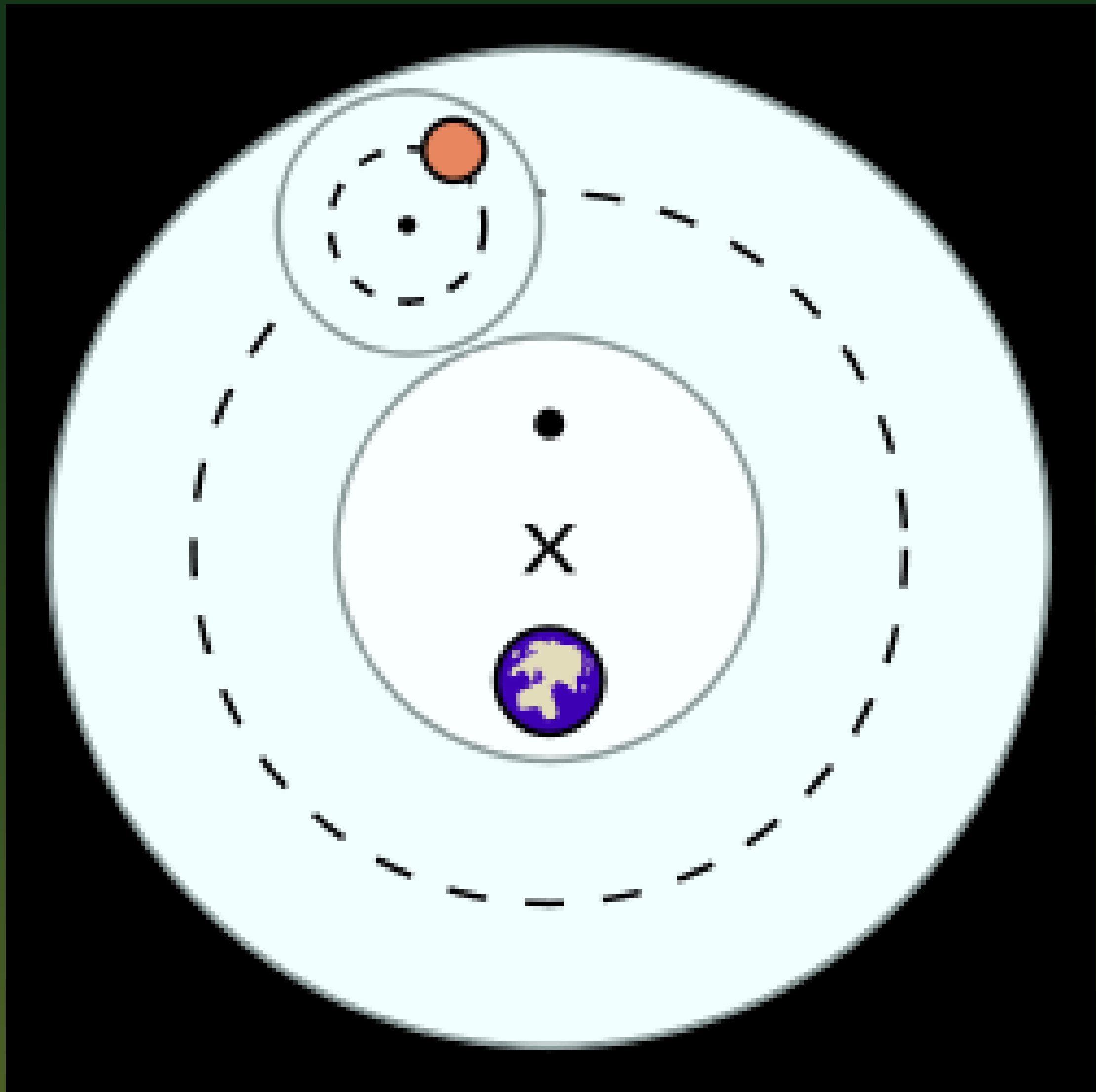
占星術では、惑星の位置関係が大きな意味を持っていたようである。



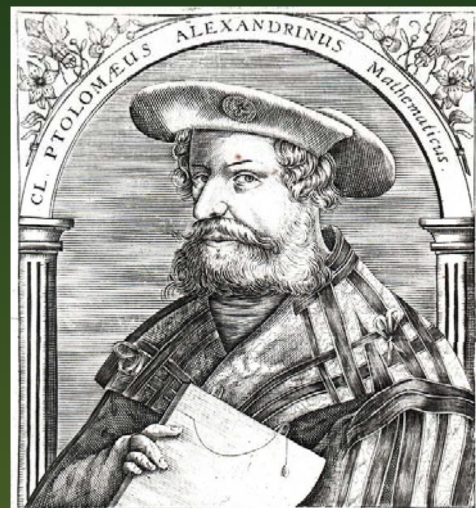
プトレマイオス

16世紀でも、プトレマイオス(AD85頃 ―165頃）の天動説のもとで、惑星は周転円の上を動くとされたが、修正が施されても、惑星の位置が、計算上の位置とずれることがわかってくる。

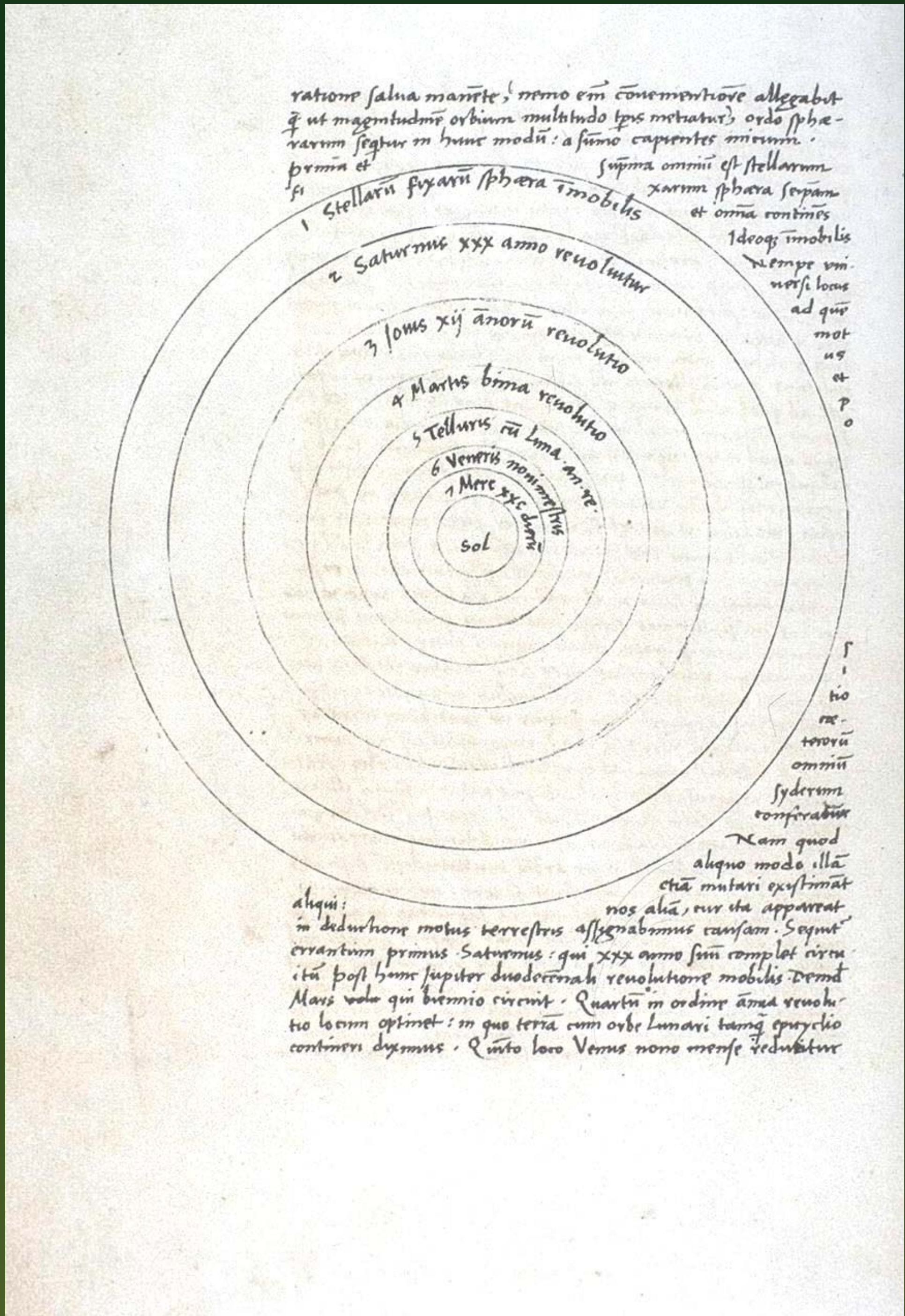

SCENO SYSTEMATIS PTOLE:
GRAPHIA MVNDANI MAICI.
SEPTE NTRIO
MERI DIES
OCCI DENS
ORIENS
SATVRNVS
IVPITER
MARS
SOL
LVNA
VENVS
MERCV RIVS

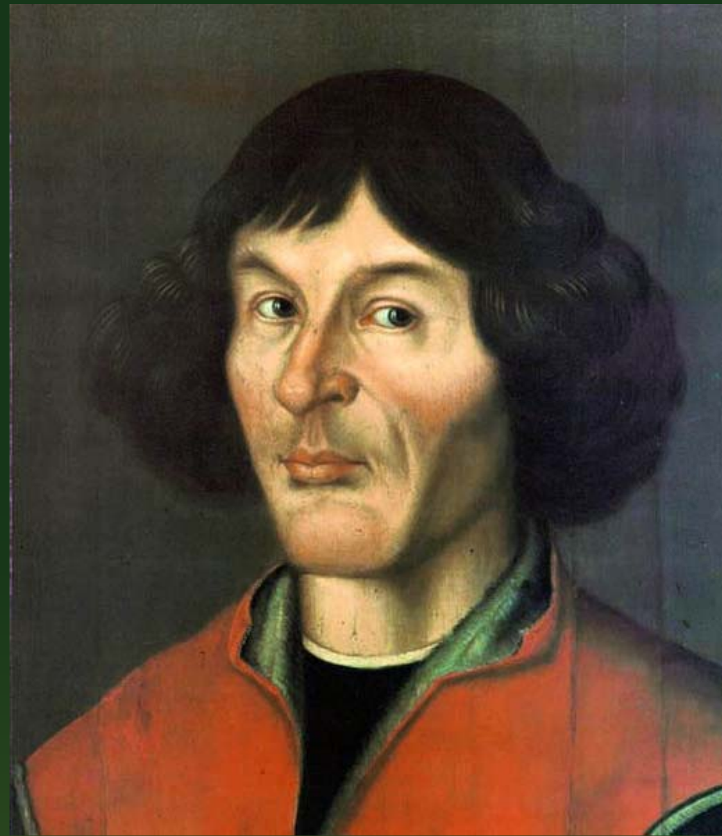


アポロニウス
（262BC－190BC）



プトレマイオス
（AD85頃 －165頃）





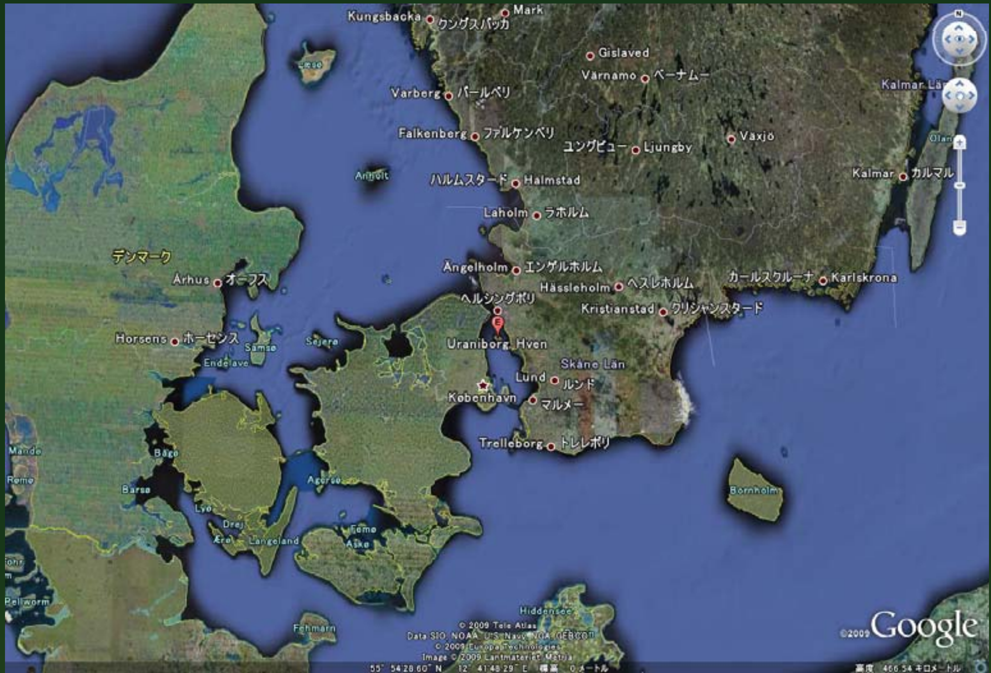
コペルニクス
（1473－1543）

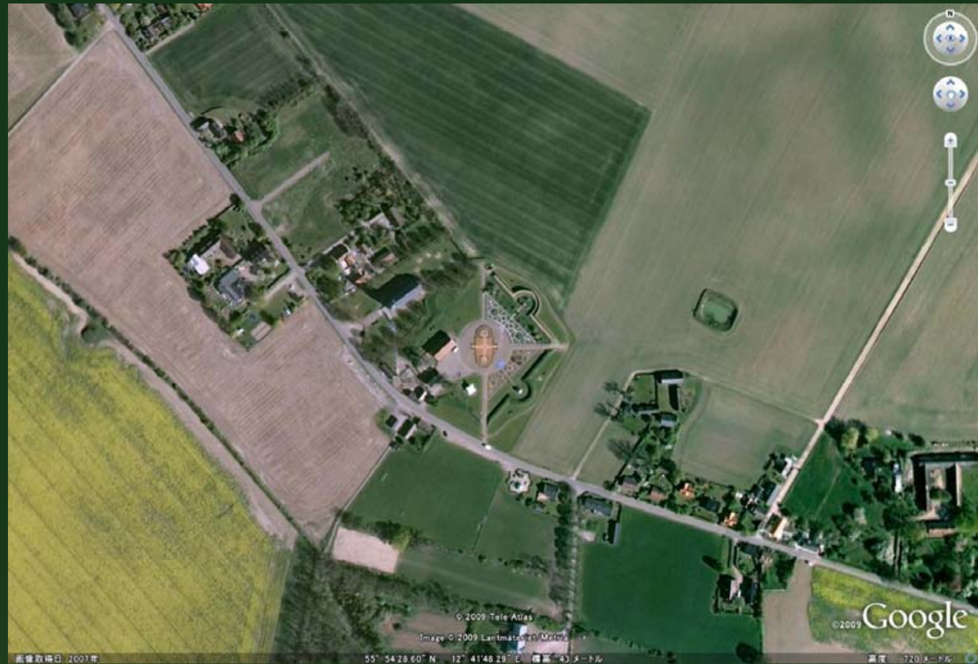
- 精密な計算は大変な仕事であった。
- このころに、三角関数sin x, cos x , tan x ,ネピア(1550 －1617)によって発見された対数関数 log x , それによって理解された指数関数 e^x など, 実用的に非常に重要な関数が現れている.
- 対数表、三角関数表などは、つい最近まで使われていた.

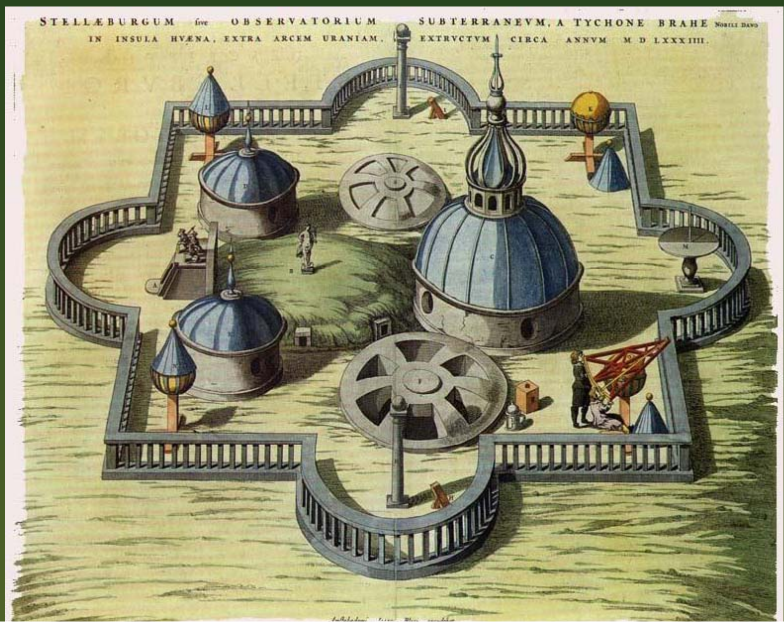
ネピア(1550 －1617)

- ティコ・ブラーエ(1546－1601)は、天体の精密な観測をデンマーク王の援助のもとでHven島に天文台を建てて1576年から1597年まで観測を続けた。
- 天文台は印刷工場まである大きな組織だった。
- 非常に精密な観測をすることにより、将来の惑星の位置を予測しようとした。
- 星の位置を1'程度の誤差で決定した。 $1' = 2\pi/21600$

ティコ・ブラーエ(1546－1601)

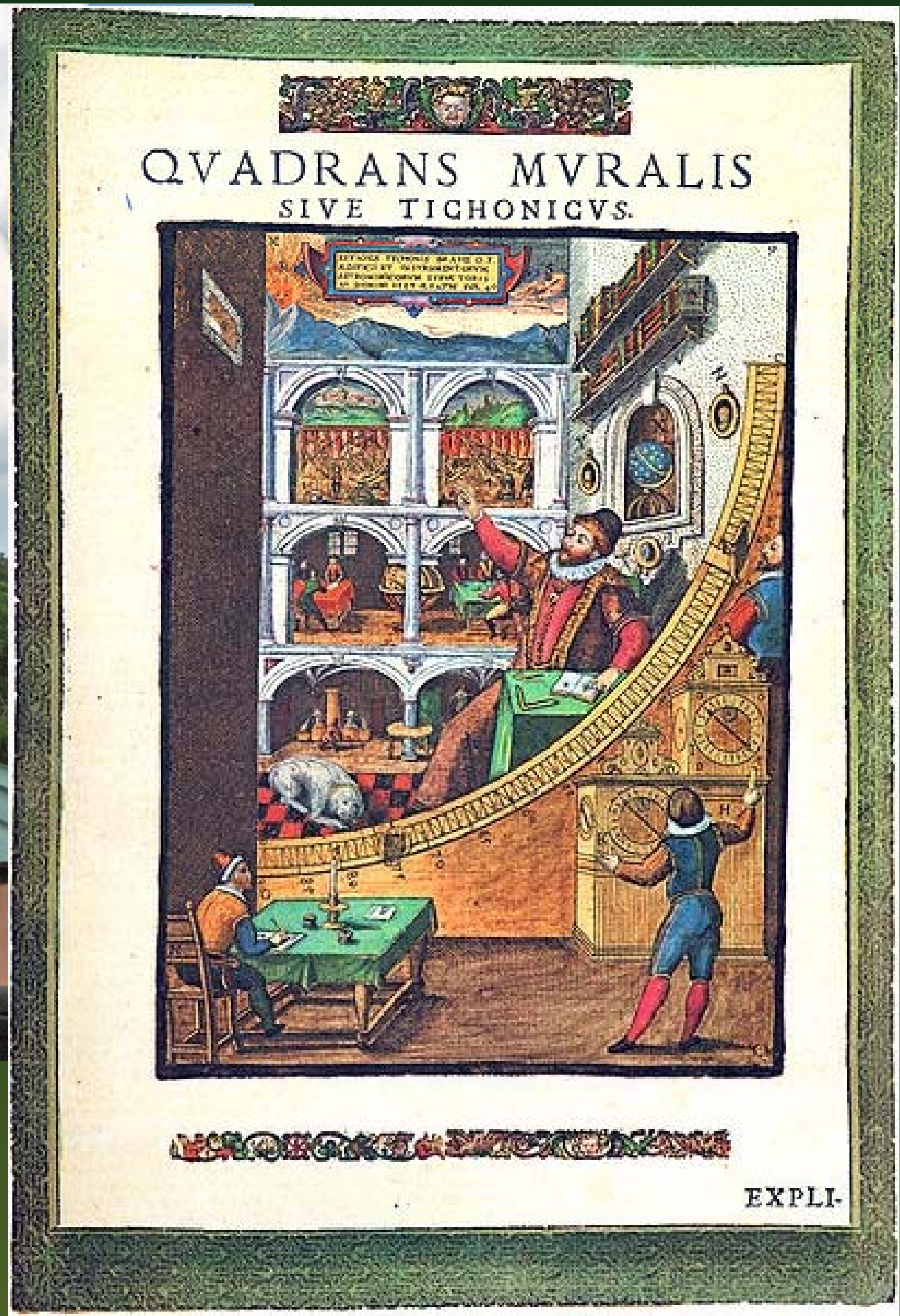

Kungsbacka クングスバッカ
Mark
Gislaved
Värnamo ベーナムー
Varberg バールベリ
Falkenberg ファルケンベリ
ユングビュー Ljungby
Växjö
ハルムスタード Halmstad
Kalmar カルマル
Laholm ラホルム
デンマーク
Århus オーフス
Ängelholm エンゲルホルム
Hässleholm ヘスレホルム
カールスクルーナ Karlskrona
ヘルシングボリ
Kristianstad クリシャンスタード
Horsens ホーセンス
Uraniborg, Hven
Skåne Län
Lund ルンド
København
マルメー
Trelleborg トレレボリ
Bornholm
Google


Google


STELLÆBURGUM sive OBSERVATORIUM SUBTERRANEUM, A TYCHONE BRAHE NOBILE DANO
IN INSULA HVÆNA, EXTRA ARCEM URANIAM, EXTRVCTVM CIRCA ANNVM M D LXXXIIII.


ARCIS VRANIBVRGI, IN INSVLA HELLESPONTI DANICI HVENNA CONSTRVCTÆ,
A TYCHONE BRAHE, DÑO DE KNVDSTRVP, QUO AD TOTAM CAPACITATEM, DESIGNATIO.

写真：Wikipedia より転載
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:StjärneborgObservatory.jpg



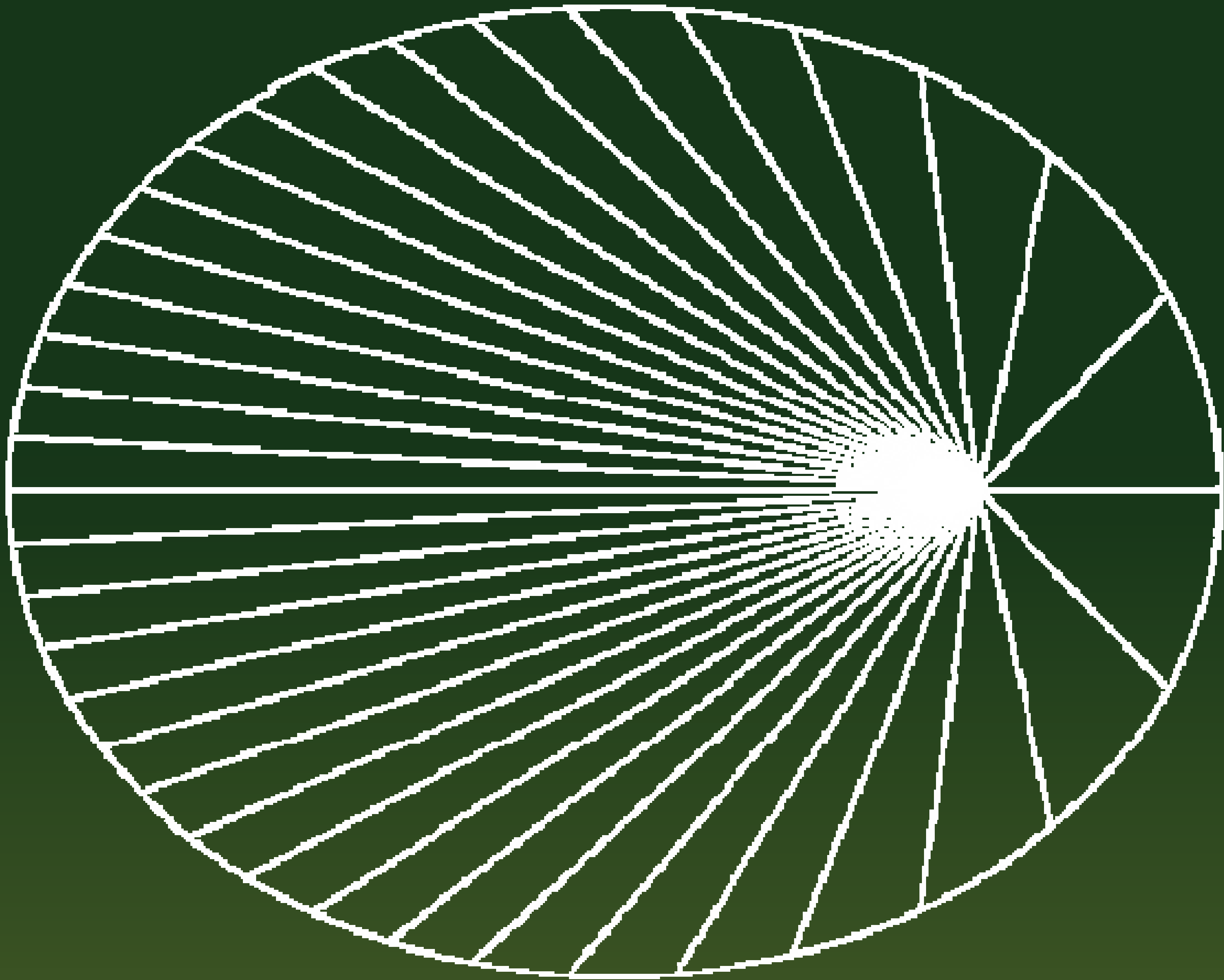
ケプラー(1571－1630)

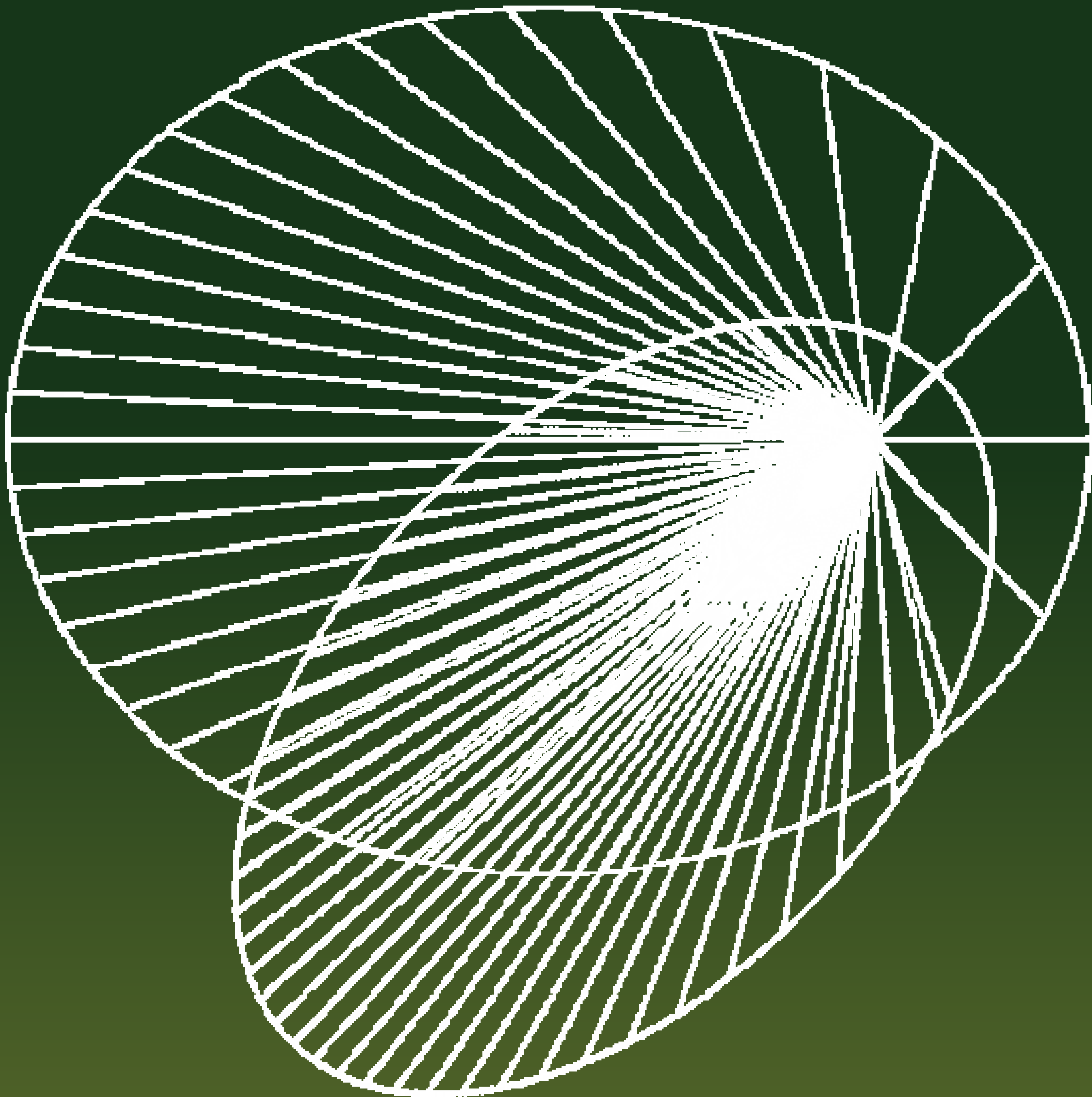
- 援助してくれたデンマーク王が亡くなり、プラハへ向かったティコ・ブラーエは神聖ローマ皇帝に雇われ、ケプラー(1571－1630)を助手にする。

- 数学者であったケプラーは、ティコ・ブラーエの観測結果を数学の言葉でまとめ，1609年（第1，第2法則）および1619年（第3法則）に公表した.

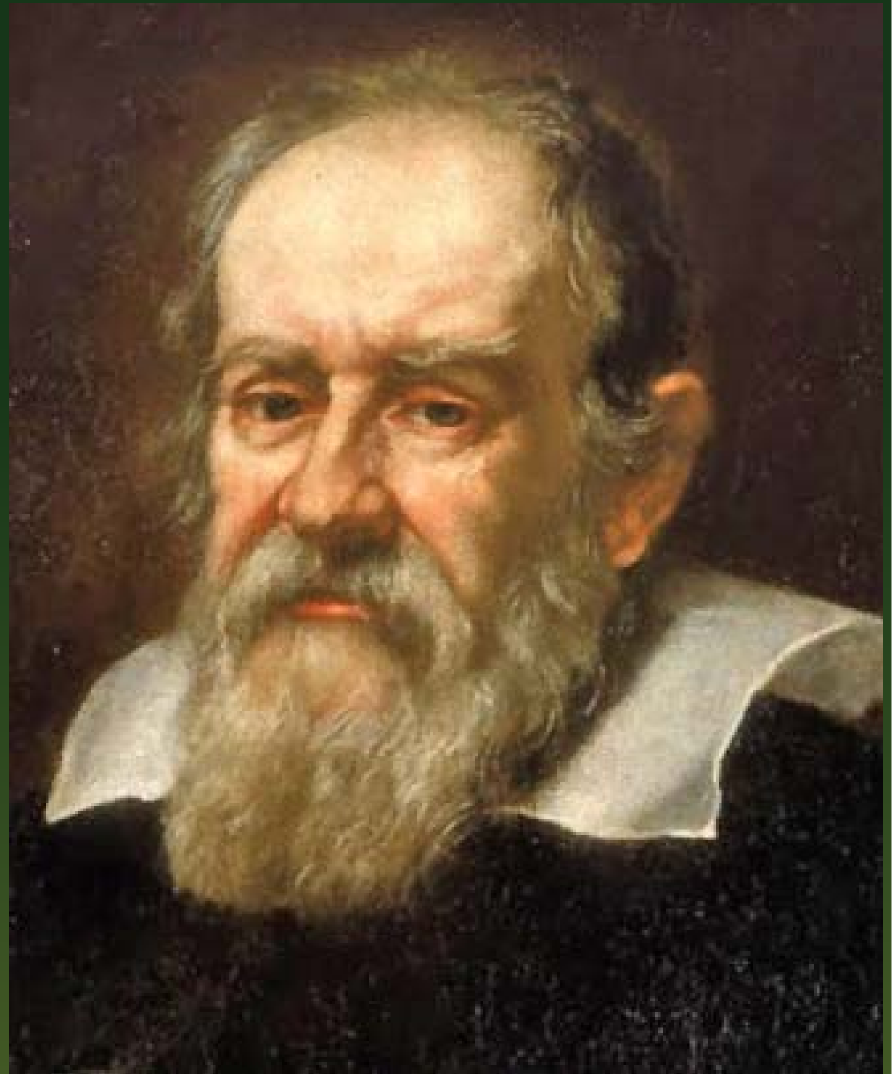
- 第1法則:惑星の軌道は太陽を焦点とする楕円である.
- 第2法則:惑星の運動の面積速度は一定である.
- 第3法則:惑星の軌道の楕円の長径の3乗と公転周期の2乗は比例する.

ケプラーは楕円の「焦点」という言葉を最初に使った数学者である。





- 物が動くときには，押している力が存在しているという当時の常識に対して，ガリレオ(1564－1642)の慣性の法則が，実験によって示された.
- ガリレオは自由落下運動の落下距離が落下させた時間の2乗に比例することも実験で確かめている.
- ガリレオは1609年に望遠鏡による星の観察を始めた.
- 今年は世界天文年



ガリレオ(1564－1642)

座標を導入し、
式で書かれる
代数の世界と、
図で書かれる
幾何の世界は
相互に翻訳
できることを
宣言した。

デカルト(1596－1650)

ニュートン(1643－1727)は，著書プリンピキアにおいて

●万有引力の法則 $\|\vec{F}\| = G\frac{mM}{r^2}$

●運動の第1法則＝慣性の法則

●運動の第2法則＝運動方程式

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{q}}{\mathrm{d}t^2}.$$

●運動の第3法則＝作用反作用の法則

のもとで，ケプラーの法則を説明した．

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sir_Isaac_Newton_by_Sir_Godfrey_Kneller,_Bt.jpg

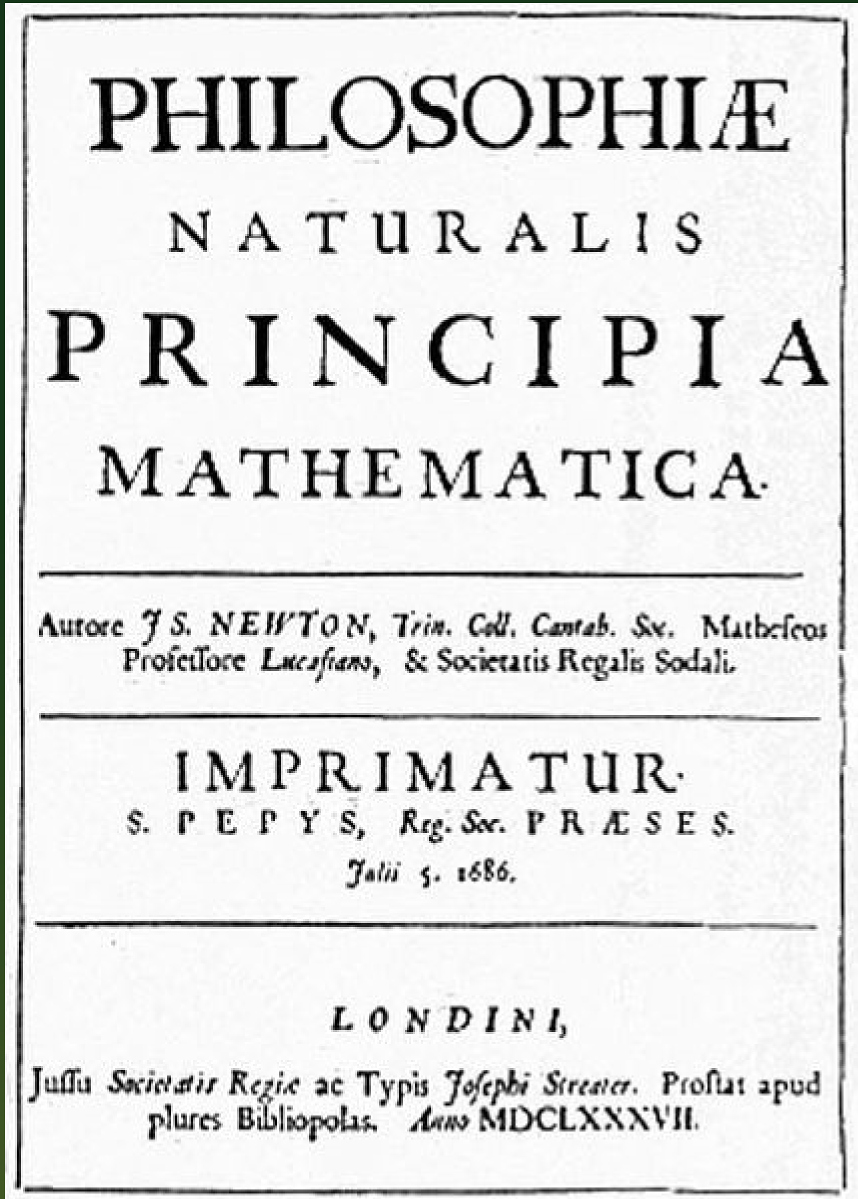
ニュートンは，微分の概念、加速度の概念にたどり着き、運動方程式を書いた。

数学が創られた.

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{q}}{\mathrm{d}t^2}.$$

ニュートン(1643－1727)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sir_Isaac_Newton_by_Sir_Godfrey_Kneller,_Bt.jpg



PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

実際には、ニュートンは，微分の概念、加速度の概念を用いた文章を書き、図形的にそれを解いている。

式は書かれているが、ほとんどが図形上の長さの関係に関するものである。

松本 眞：1999年度日本数学会年会市民講演会「リンゴが落ちたって万有引力は発見できないさ」

LEGES MOTUS.

LEX I.

(s) *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quâtenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

Projectilia perseverant in motibus suis, nisi quâtenus a resistentiâ aëris retardantur, et vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quâtenus ab aëre retardatur. Majora autem Planetarum et Cometarum corpora motus suos et progressivos et circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

LEX II.

(t) *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundùm lineam rectam quâ vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul et semel, sive gradatim et successivè impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi gener-

(s) 24. Ex hâc primâ lege quam (9) demonstravimus, sequitur omnem motum esse naturâ suâ æquabilem et rectilineum, adeóque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, nisi aliquod obstaculum mobili offeratur; Unde cùm projectilia motum suum sensim amittant, quærenda est aliqua hujusce retardationis causa. Cum autem corpora projecta vel per medium resistens deferantur, vel etiam super aliorum corporum superficies scabras incedant, et vi gravitatis deorsùm semper urgeantur, necesse est ut eam amittant motûs sui partem quam in hisce obstaculis superandis continuò absumunt, ac proindè quo major vel minor erit medii resistentia, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet majora planetarum et cometarum corpora nullam sensibilem in spatiis cœlestibus experiri resistentiam, cùm motus suos diutissime conservent.

(t) 25. Si corpus vi activâ, qualis est vis gravitatis, secundùm eandem aut parallelam directionem continuò urgeatur, motus illius continuò acceleratur; nam per leg. 1., manet celeritas acquisita, et per leg. 2. nova conspiranti continuò additur. Si verò aliqua vis in corpus jam motum contrariâ directione perpetuò agat, motus illius continuò retardatur, per leg. 2. Si vis conspirans continuò ac uniformiter agat, id est, si constans sit, corpus eâ vi impulsum, æqualibus temporibus æqualia accipit celeritatis incrementa, seu motu uniformiter accelerato fertur, et celeritates vi illâ acquisitæ, sunt ut tempora quibus

LEGES MO

LEX I.

(*) *Corpus omne perseverare in statu suo qui*
in directum, nisi quâtenus a viribus impressis

Projectilia perseverant in motibus suis, r
retardantur, et vi gravitatis impelluntur deo
cohærendo perpetuò retrahunt sese a motibu
nisi quâtenus ab aëre retardatur. Majora a
rum corpora motus suos et progressivos et ci
sistentibus factos conservant diutius.

LEX II.

(t) *Mutationem motus proportionalem esse vi*
cundùm lineam rectam quâ vis

Si vis aliqua motum quemvis generet;
generabit, sive simul et semel, sive gradati
erit. Et hic motus (quoniam in eandem s

(*) 24. Ex hâc primâ lege quam (9) demonstravimus, sequitur omnem motum esse naturâ suâ æquabilem et rectilineum, adeóque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, nisi aliquod obstaculum mobili offeratur; Unde cùm projectilia motum suum sensim amittant, quærenda est aliqua hujusce retardationis causa. Cum autem corpora projecta vel per medium resistens deferantur, vel etiam super aliorum corporum superficies scabras incedant, et vi gravitatis deorsùm semper urgeantur, necesse est ut eam amittant motùs sui partem quam in hisce obstaculis superandis continuò absumunt, ac proindè quo major vel minor erit medii resistentia, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet

majora p
sensibile
tiam, cù
(t) 25
vitatis, s
tionem
nuò acce
tas acqui
tinuò ad
motum
illius co
conspira
si consta
temporib
seu motu
tates vi i

atrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, et cum eo secundùm utriusque determinationem componitur.

(*) LEX III.

Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur et hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam et equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi suâ quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem

generantur. At si vis constans contrariâ directione in corpus motum continuò agat; æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decrementa, et corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, si corpus quiescens quâlibet vi sive constanti sive variabili continuò urgeatur, et deinde eâ celeritate quam vis illius actione continuâ acquisivit, contrà directionem vis illius reagentis projiciatur, ut vestigia sua relegat, corpus illud in itu et reditu suo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viæ suæ puncta, eundo et redeundo pervenerit; adeoque motum redeundo non amittet, nisi cùm pervenerit ad punctum ex quo cœpit eundo moveri; nam eadem vis in itu et reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat et extinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, sublatâ medii resistentiâ, motu uniformiter accelerato descendunt, et motu uniformiter retardato ascendunt...... Demonstratio.... Sublatâ medii resistentiâ idem est ejusdem corporis pondus, sive eadem illius in subjectum planum pressio, tum in vertice, tum in radice montis; est autem pondus, seu vis motrix (15) ut massa in vim gravitatis acceleratricem ducta: ergò cum ejusdem corporis massa eadem in vertice et in radice montis permaneat, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Insuper corpora gravia in radice et vertice montis æqualia spatia æqualibus temporibus percurrunt, sublatâ aëris resistentiâ, ut accuratissimis notum est experimentis (13): constans est igitur vis acceleratrix, et per lineas ad horizontem perpendiculares (3) uniformiter agit; gravia ergò motu uniformiter accelerato descendunt, et uniformiter retardato ascendunt (25). Q. e. d.

27. Sublatâ medii resistentiâ in terræ viciniis, spatia quæ corpus è quiete cadendo percurrit, sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur .... Dem.... Recta S K, repræsentet spatium quod grave cadendo percurrit; T C, T c, T B, exponant tempora quibus describuntur spatia S P, S p, S K; et C L, c l, B D, ad T B, normales, exhibeant celeritates temporibus T C, T c, T B, per spatia S P, S p, S K, acquisitas; quia in motu uniformiter accelerato, celeritates sunt ut tempora, (25), erit T C : T c = C L : c l; et T C : T B = C L : B D, adeóque recta, T D, transit per puncta L, et l, et triangula T C L, T c l, T B D, similia sunt. Jam fingamus lineam, c l, motu sibi semper parallelo ità accedere ad lineam C L, ut tandem cum ipsâ coincidat; evanescente tempusculo C c, celeritas, c l, non differet a celeritate C L, adeóque per tempusculum infinitè parvum seu evanescens C c, celeritas, C L, uniformis censeri potest. Porrò spatia motu æquabili descripta sunt ut celeritas in tempus ducta (5), ergò spatium P p, quod tempusculo, C c, percurri supponimus, est ut rectangulum, C L × C c = C d; quare si totum tempus, T C, in tempuscula innumera ut C c, divisum concipiatur, et similiter spatium S P, tempore T C, percursum in totidem spatiola evanescentia, singulis tempusculis correspondentibus percursa dividatur, erit summa rectangulorum C d, hoc est area trianguli T C L, ut summa spatiolorum P p, id est ut S p; et eodem modo demonstratur aream trianguli T B D, esse ut spatium S K, tempore T B, percursum. Est igitur triangulum T C L : T B D = S P : S K. Sed triangulorum similium areæ T C L, T B D, sunt ut quadrata laterum homologorum.

LEGES MO

LEX I.

(*) *Corpus omne perseverare in statu suo qui*
in directum, nisi quâtenus a viribus impressis

Projectilia perseverant in motibus suis, n
retardantur, et vi gravitatis impelluntur deo
cohærendo perpetuò retrahunt sese a motibu
nisi quâtenus ab aëre retardatur. Majora a
rum corpora motus suos et progressivos et ci
sistentibus factos conservant diutius.

LEX II.

(t) *Mutationem motus proportionalem esse vi*
cundùm lineam rectam quâ vis

Si vis aliqua motum quemvis generet;
generabit, sive simul et semel, sive gradati
erit. Et hic motus (quoniam in eandem s

(s) 24. Ex hâc primâ lege quam (9) demonstravimus, sequitur omnem motum esse naturâ suâ æquabilem et rectilineum, adeóque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, nisi aliquod obstaculum mobili offeratur; Unde cùm projectilia motum suum sensim amittant, quærenda est aliqua hujusce retardationis causa. Cum autem corpora projecta vel per medium resistens deferantur, vel etiam super aliorum corporum superficies scabras incedant, et vi gravitatis deorsùm semper urgeantur, necesse est ut eam amittant motûs sui partem quam in hisce obstaculis superandis continuò absumunt, ac proindè quo major vel minor erit medii resistentia, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet

majora p
sensibile
tiam, cù
(t) 25
vitatis, s
tionem
nuò acce
tas acqui
tinuò ad
motum
illius co
conspira
si consta
temporib
seu motu
tates vi i

16　PHILOSOPHIÆ NATURA

atrice determinatur) si corpus antea movebatur,
ranti additur, vel contrario subducitur, vel oblic
cum eo secundùm utriusque determinationem com

(a) LEX III.

Actioni contrariam semper et æqualem esse reactione
actiones in se mutuo semper esse æquales et in pa

Quicquid premit vel trahit alterum, tantunden
hitur. Si quis lapidem digito premit, premitur
Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetu
dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinqu
andi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac
tantumque impediet progressum unius quantum p
terius. Si corpus aliquod in corpus aliud impin
quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim

generantur. At si vis constans contrariâ directione in corpus motum continuò agat; æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decrementa, et corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, si corpus quiescens quâlibet vi sive constanti sive variabili continuò urgeatur, et deinde eâ celeritate quam vis illius actione continuâ acquisivit, contrà directionem vis illius reagentis projiciatur, ut vestigia sua relegat, corpus illud in itu et reditu suo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viæ suæ puncta, eundo et redeundo pervenerit; adeoque motum redeundo non amittet, nisi cùm pervenerit ad punctum ex quo cœpit eundo moveri; nam eadem vis in itu et reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat et extinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, sublatâ medii resistentiâ, motu uniformiter accelerato descendunt, et motu uniformiter retardato ascendunt ...... Demonstratio .... Sublatâ medii resistentiâ idem est ejusdem corporis pondus, sive eadem illius in subjectum planum pressio, tum in vertice, tum in radice montis; est autem pondus, seu vis motrix (15) ut massa in vim gravitatis acceleratricem ducta: ergò cum ejusdem corporis massa eadem in vertice et in radice montis permaneat, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Insuper corpora gravia in radice et vertice montis æqualia spatia æqualibus temporibus percurrunt, sublatâ aëris resistentiâ, ut accuratissimis notum est experimentis (13): constans est igitur vis acceleratrix, et per lineas ad horizontem perpendiculares (3) uniformiter agit; gravia ergò motu uniformiter accelerato descendunt, et uniformiter retardato ascendunt (25). Q. e. d.

27. Sublatâ
spatia quæ cor
sunt ut quadrat
.... Dem. ...
quod grave cad
exponant temp
S P, S p, S K
normales, exhib
T c, T B, per
quis in motu u
sunt ut tempora,
et T C : T B
T D, transit p
T C L, T c l, T
mus lineam, c
accedere ad lin
coincidat; evan
c l, non differe
tempusculum in
celeritas, C L,
rò spatia motu
ritas in tempus
quod tempuscul
ut rectangulum
totum tempus,
C c, divisum c
S P, tempore T
evanescentia, si
tibus percursa
lorum C d, bo
summa spatiolo
modo demonst
esse ut spatium
Est igitur trian
S K. Sed trian
T B D, sunt ut

118　PHILOSOPHIÆ NATURALIS　[Mot. Corpor.

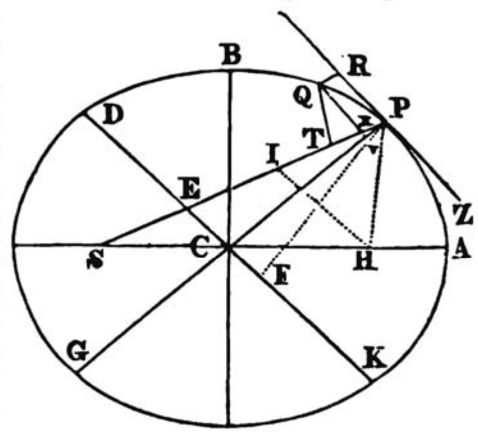
SECTIO III.

De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.

Esto ellipseos umbilicus S. Agatur S P secans ellipseos tum diametrum D K in E, tum ordinatim applicatam Q v in x, et compleatur parallelogrammum Q x P R. Patet E P æqualem esse semiaxi majori A C, eo quod, actâ ab altero ellipseos umbilico H lineâ H I ipsi E C parallelâ, ob æquales C S, C H æquentur E S, E I, (g) adeo ut E P semi-summa sit ipsarum P S, P I, id est (ob parallelas H I, P R, et angulos æquales I P R, H P Z) ipsarum P S, P H, quæ conjunctim axem totum 2 A C adæquant. Ad S P demittatur perpendicularis Q T, et ellipseos latere recto principali (seu (h) $\frac{2\,BC\ \text{quad.}}{AC}$) dicto L, erit L $\times$ Q R ad L $\times$ P v ut Q R ad P v (i) id est, ut P E seu A C ad P C



(g) 260. Quia (per Prop. 48. Lib. 3. Conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellipsi) æquales sunt anguli quos rectæ P H, P S, constituunt cum tangente P R, et ob parallelas H I, P R, æquales quoque sunt anguli alterni P I H, P H I, æquales erunt rectæ P I, P H, adeóque E P $= \frac{PS + PH}{2} =$ A C, (Prop. 52. Lib. 3. Conic. Apoll. superius Theor. III. de Ellip.)

(h) 261. In Ellipsi et Hyperbolâ latus rectum principale $L = \frac{2\,BC^2}{AC}$ nam $2\,AC : 2\,BC = 2\,BC : L$, undè $L = \frac{4\,BC^2}{2\,AC} = \frac{2\,BC^2}{AC}$.

(i) Per constructionem $QR = Px$, sed propter Triangula similia P x v, P E C, $Px : Pv = PE\,(AC) : PC$, ergò $QR : Pv = AC : PC$.

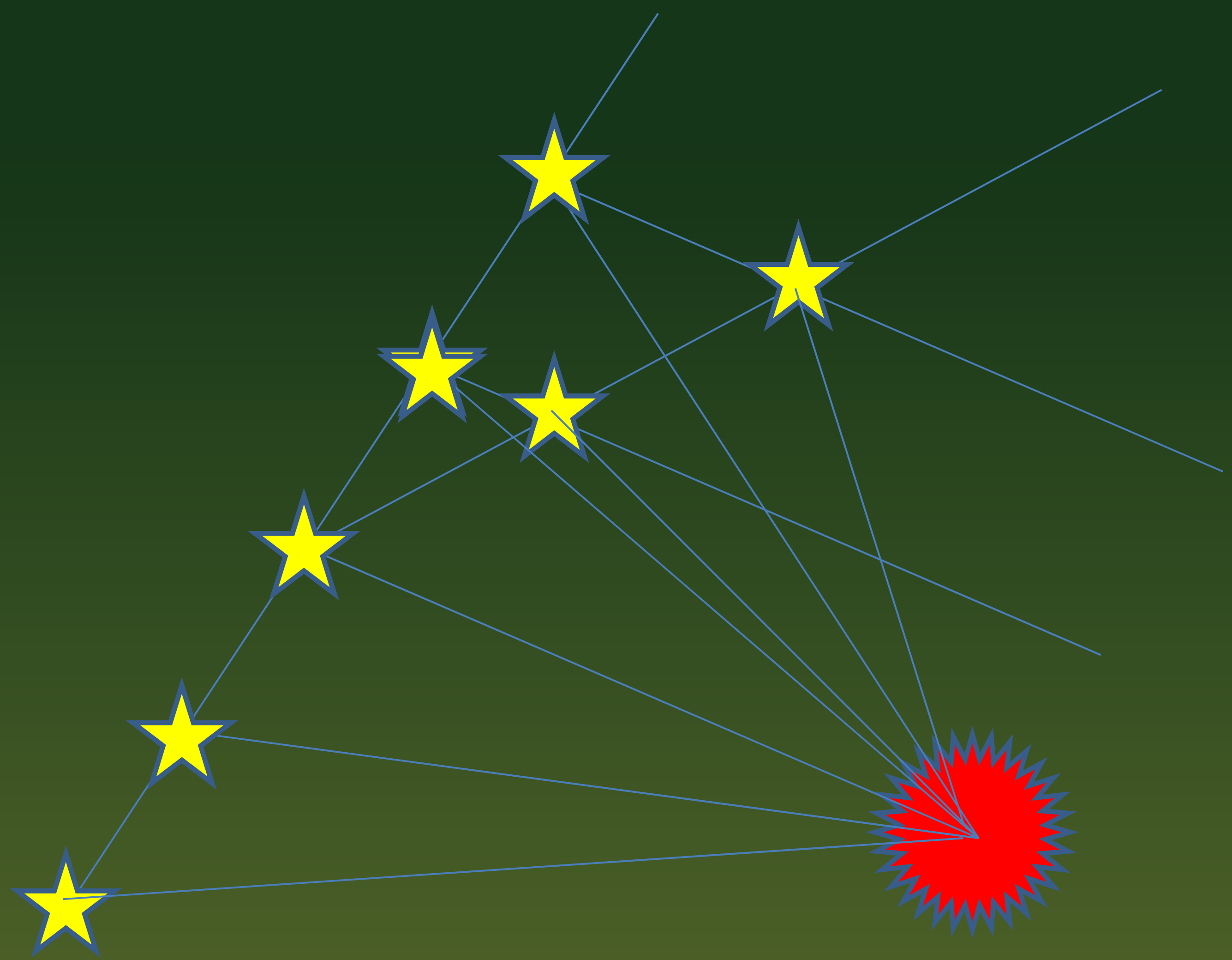
フック(1635-1703)

- 太陽が惑星に引力をおよぼし、それが距離の二乗に反比例するということは、フック(1635-1703)が、様々な実験をしてこのことを予想していたようである.
- フックは、王立協会というところで実験をしてみせるという仕事をしており、バネの変位と力が比例するというフックの法則に名前が残っているが、多くの物理法則を発見したのは、彼ではないかといわれている。
- しかし、ニュートンの主張は、太陽と惑星の間の引力にとどまらない万有引力の存在である。

微分を $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, 積分を $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ と書き表したのは，ライプニッツ (1646 – 1716)（ライブニッツという発音がより正しい）である．積分 (integral) という語はヤコブ・ベルヌーイ (1654 – 1705) によるらしい．ライプニッツは「和 (summation)」という語を用い，記号 $\displaystyle\int$ は S を変形したものである．

ライプニッツ(1646 − 1716)

ケプラーの第2法則「面積速度一定の法則」は，中心力が中心力の方向に速度を変化させていることの現れである.



- 面積速度が一定であることは，重力が，太陽と惑星の間を結ぶ直線の方向に惑星に働いているとすると説明できることになった．

- この「太陽と惑星の間を結ぶ線分」には，力を伝えるものという意味でベクター(vector)という名前がつけられ，この用法は，生物学でそのまま使われている．

- この「力を伝えるもの」は，数学の発展の中で，数学で用いられる方向と大きさを持つ量の呼び名「ベクトル」となった．定義はハミルトン(1805－1865)による．

- 新しい「ベクトル」の概念が確立し、数学が創られた．

惑星の軌道が楕円であるは、万有引力が距離の逆2乗に比例する引力であることの現れである.

ファインマンによる証明.

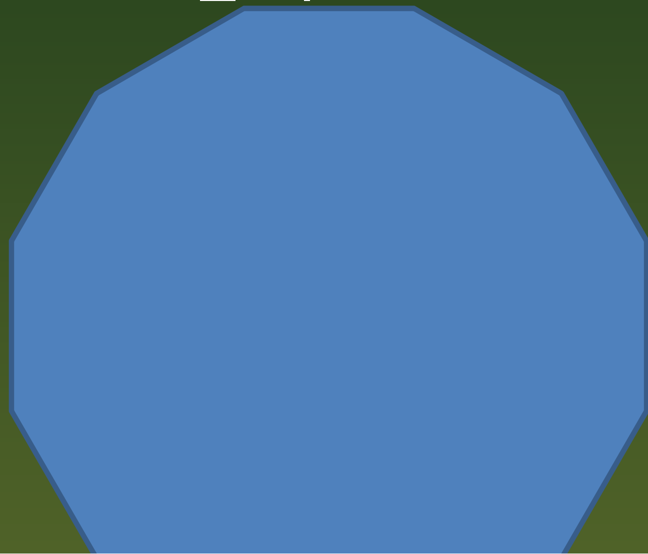
- 面積速度一定、すなわち、
  太陽を中心とする角度の変化に対して
  (r を θ の関数として)
  $$r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const.}$$
- 力が距離の逆二乗に比例
  $$F = \frac{\mathrm{const}}{r^2}$$
  力の向きは中心の太陽方向
- 従って、$F\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \mathrm{const.}$

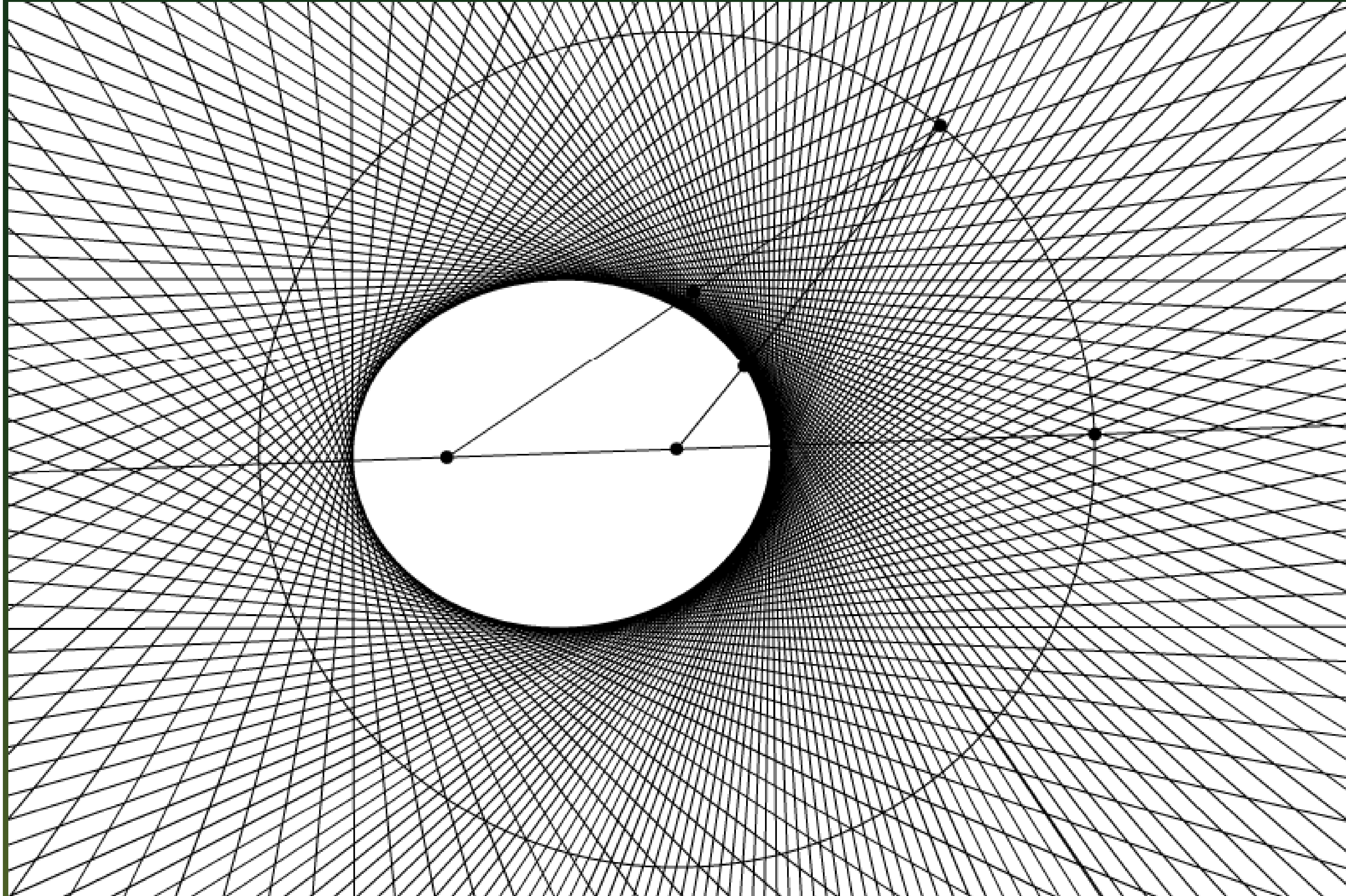
- $F\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \mathrm{const}$ と運動方程式 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F$ から、
  $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = \mathrm{const}$ が得られる。

- $\|\dfrac{d\vec{v}}{d\theta}\| = \mathrm{const}$,
  つまり、速度の変化の大きさは角度によらず一定という意味である。

- これは、$\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = a\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ ということである。

- $\left\|\dfrac{d\vec{v}}{d\theta}\right\| = \mathrm{const}$ で、中心力であることを考えると、
  $\dfrac{d\vec{v}}{d\theta} = a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ となる。従って、$\vec{v} = \vec{v}_{\text{平均}} + a\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}$,
  すなわち、速度 $\vec{v}(\theta)$ は円を描く。
- 積分を知らなくても、$\vec{v}(0°)$, $\vec{v}(1°)$, $\vec{v}(2°)$, $\vec{v}(3°)$, $\ldots$ は、次を満たし正多角形を描く。
  $\vec{v}(1°) - \vec{v}(0°) = \vec{a}_{180°}$, $\vec{v}(2°) - \vec{v}(1°) = \vec{a}_{181°}$, $\vec{v}(3°) - \vec{v}(2°) = \vec{a}_{182°}$, $\ldots$ その極限を考えると円を描く。
- 速度が円を描くとき、軌道は２次曲線を描く。
  KSEGを用いて確かめる。





微分方程式
を解かない
で楕円軌道
を説明した。

微分方程式を数値的に
解くために、簡単な
BASICのプログラムを
書いてみることが出来る。

```
DEF f(x,y) = －x/SQR((x^2+y^2)^3)
DEF g(x,y) = －y/SQR((x^2+y^2)^3)
FOR i=5 TO 19
  LET x=0.5
  LET y=0
  LET u=0
  LET v=0.1*i
  LET h=0.000001
  LET t=0
  PLOT POINTS: x,y
  DO WHILE (t<=0.8 OR x<0 or  y<=0)
    LET t=t+h
    LET uu=u
    LET vv=v
    LET u=u+f(x,y)*h
    LET v=v+g(x,y)*h
    LET x=x+uu*h
    LET y=y+vv*h
    PLOT POINTS: x,y
  LOOP
NEXT i
END
```

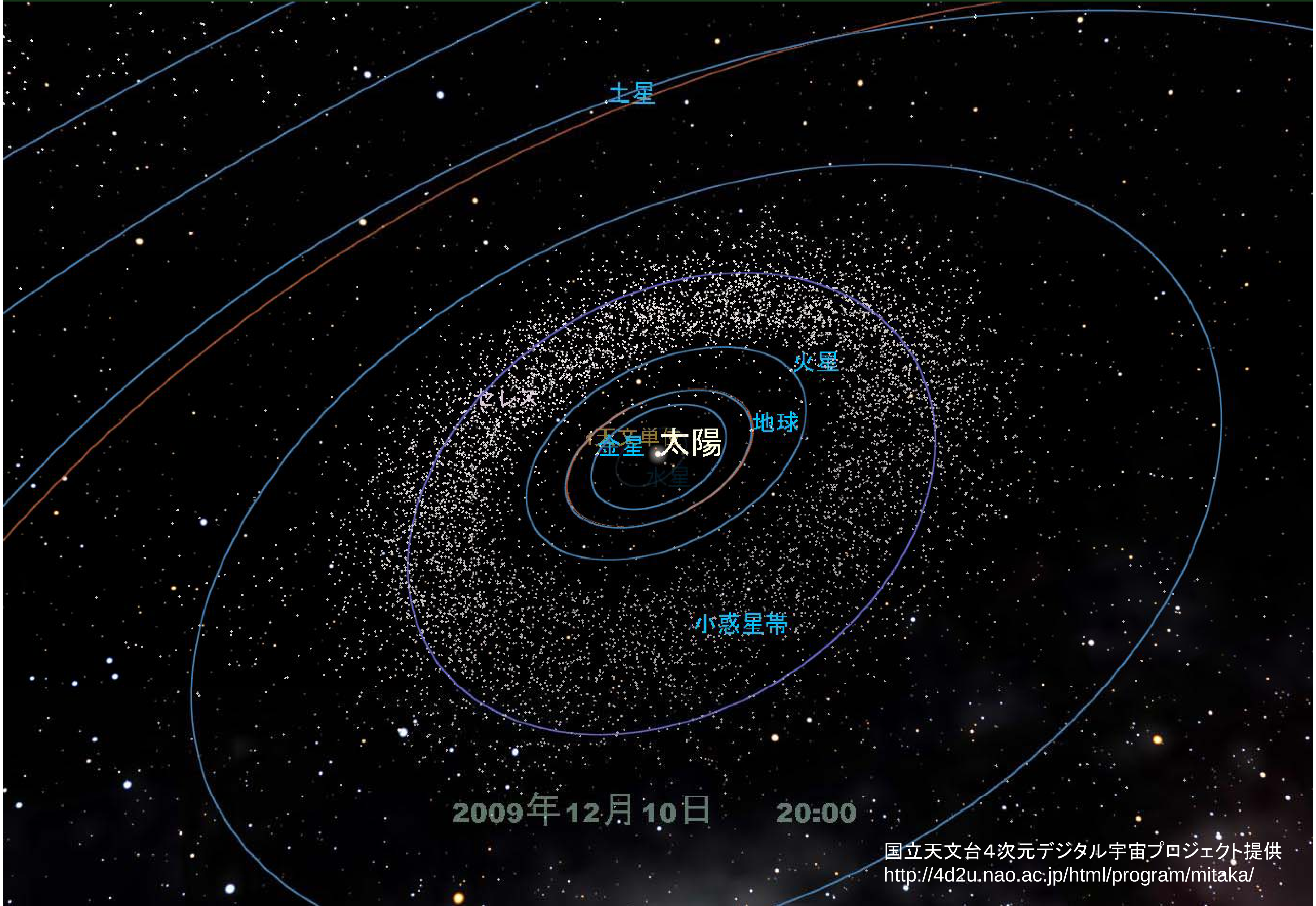
ここまでの話

●惑星の動きを理解するためには、それ自身多くの数学が必要とされた。

●ケプラーの法則は、楕円を理解したうえで述べられた。

●ニュートンは、新しい数学を創り、力学を記述した。

その姿をmitakaで再び眺めよう


土星
火星
セレス
地球
金星
太陽
水星
小惑星帯
2009年12月10日　20:00
国立天文台4次元デジタル宇宙プロジェクト提供
http://4d2u.nao.ac.jp/html/program/mitaka/

- 微分方程式の理論は駒場の理系では2年生の数理科学2，数理科学4で学ぶことである。
- ニュートンは、微分の概念を整備しただけでなく、微分と積分が逆の操作であるという、微積分学の基本定理も得ている。
- 数理科学1，数理科学3のベクトル解析も関連したことを扱っている。

私は何を研究しているか。

微分方程式をすでに知っている関数を使って明示的に解こうという試みは、うまくいかなくなる。

そこで、なぜ方程式を解きたかったのかを考えると、解ければ解の性質がわかるからだということになる。

しかし、解かなくても、あるいは解けなくても微分方程式の解の性質を記述することはできると考えられる。

そういう研究をしているので、来週はそれに関係のあ

- ここまでで、中心からの距離の二乗に反比例する中心力をうけると、軌道は楕円（放物線、双曲線という2次曲線）になることを説明した。
- 2つの星が万有引力だけによって運動する問題は、少し違うが、方程式は、中心力の方程式に帰着される。
- 作用反作用の法則から、2つの星の重心が等速直線運動をするので、その点を原点とする座標をとることができる。
- そこで、微分方程式を書いて解いてみると、実際、次のようになる。

BASICのプログラム

- つまり、2体問題の解は、重心の周りの楕円軌道（2次曲線の軌道）となる。

- このことは、ニュートンも気づいていたようだ。

- そこで、ニュートン自身、3体問題を考えることを提唱しつつ、これまでの知識方法では解けないだろうと述べている。

- 数学の問題としては、3体問題ですでに難問を抱えることになった。

BASICのプログラム

- 惑星の楕円軌道が説明できたのは、太陽に比べて惑星の質量が小さく、惑星同士の力を考慮に入れなくても良かったからである。
- 惑星同士の万有引力は、惑星の軌道を楕円軌道からずらす働きをする。
- 反射望遠鏡、写真乾板を用いた天体観測により、このようなずれが観測されるようになった。
- 1846年の海王星の発見につながった。
- 1727年には光行差、1838年には年周視差が確認され、地動説が証明された。

参考:プリンピキア
http://en.wikipedia.org/wiki/Philosophia_Naturalis_Principia_Mathematica

参考:
松本 眞:1999年度日本数学会年会市民講演会
「リンゴが落ちたって万有引力は発見できないさ」数学通信4(1) pp.4 -- ,
http://mathsoc.jp/publication/tushin/0401/matsumoto41.pdf

参考:
The MacTutor History of Mathematics archive は数学の歴史についての非常に良い記事が載っているページです。
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html
とくに、Tycho Brahe, Johannes Kepler, Sir Isaac Newton, Gottfried Wilhelm von Leibniz, Henri Poincareは参照しました。
MathematicalPhysics/Orbits/

参考:
ソフトウェアmitakaは、国立天文台
http://4d2u.nao.ac.jp/html/program/mitaka/
から無償でダウンロードできます。

参考:
次のソフトウェアも無償でダウンロードできます。

KSEG http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html
十進BASIC http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/

学術俯瞰講義

主題科目／テーマ講義　2単位　1、2年生対象

数学を創る－数学者達の挑戦－

コーディネータ・ナビゲータ：岡本和夫（理学部）

教科書にはのっていない数学のお話

数学はどうやって創られたか　岡本和夫(理学部)、室田一雄(工学部)

第1回	10/8	数学はどうやって創られたか

ことばを創り、世界を創る　斎藤毅(理学部)

第2回	10/15	Mathematics "On Campus"
第3回	10/22	数の体系を創る
第4回	10/29	数と図形の共進化

脳と情報の数学を創る　甘利俊一(理化学研究所)

第5回	11/5	情報の仕組み：驚き、確率、幾何学
第6回	11/12	脳の仕組み：脳内情報の表現、記憶、学習の数理

目の錯覚の数学を創る　新井仁之(理学部)

第7回	11/19	数学で探る錯視の世界
第8回	11/26	脳の中のウェーブレット
第9回	12/3	錯視が創る新たな数学—ウェーブレットからフレームレットへ—

形を理解するための数学を創る　坪井俊(理学部)

第10回	12/10	惑星の軌道を理解する
第11回	12/17	多面体の形と曲面の上の軌道の形
第12回	1/14	形の見分け方と数学の視点

文化と数学　岡本和夫(理学部)

第13回	1/21	文化と数学

駒場キャンパス 18号館ホール　木曜日 5時限 (16:20-17:50)

http://www.gfk.c.u-tokyo.ac.jp/

東大ナビ utnav.jp