

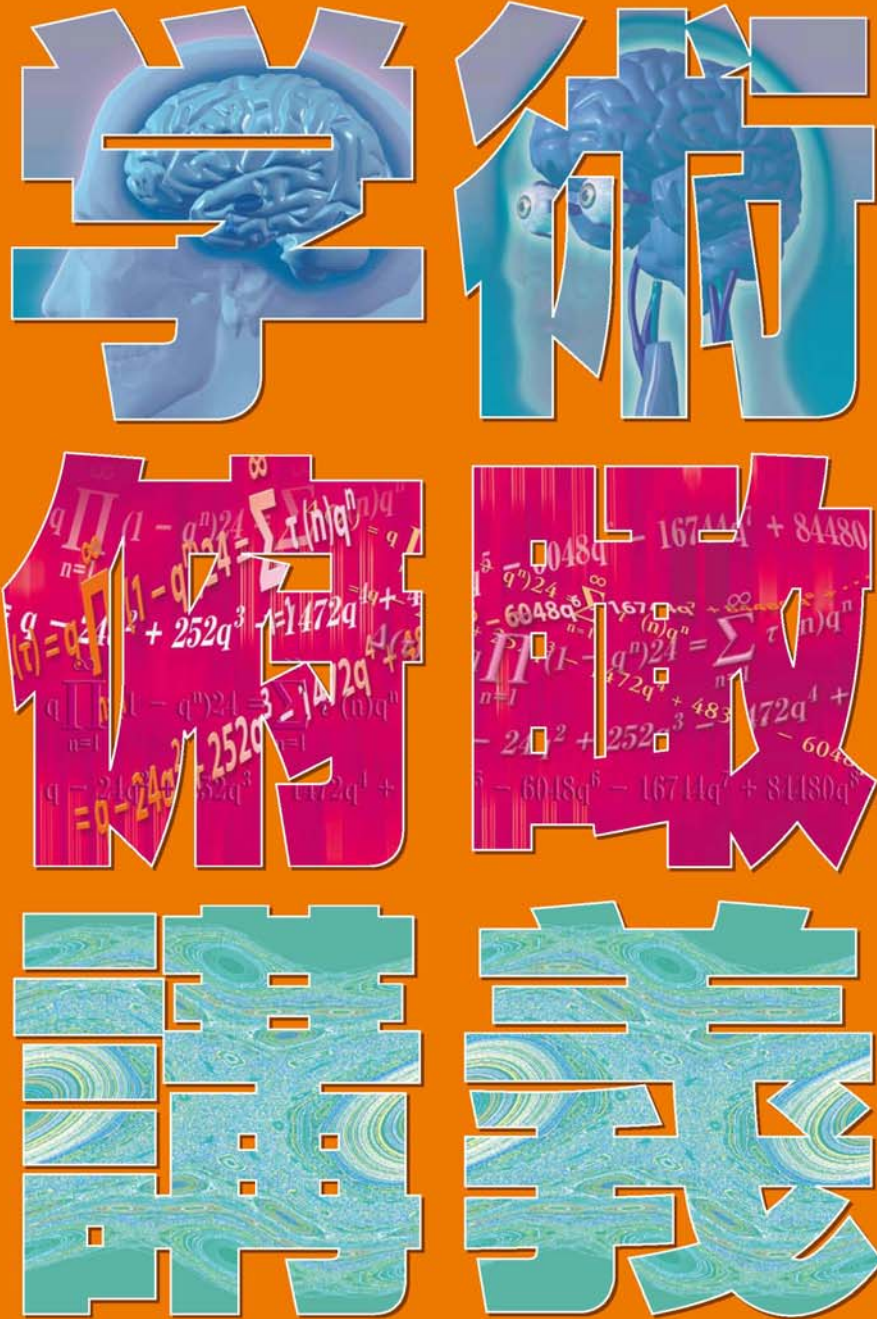
学術俯瞰講義「数学を創る」第11回

多面体の形と曲面上の軌道の形

数理科学研究科

坪井 俊

※:このマークが付してある著作物は、第三者が有する著作物ですので、同著作物の再使用、同著作物の二次的著作物の創作等については、著作権者より直接使用許諾を得る必要があります。



教科書にはのっていない数学のお話

主題科目 / テーマ講義 2単位 1、2年生対象
数学を創る—数学者達の挑戦—

コーディネータ・ナビゲータ:岡本和夫(理学部)



数学はどうやって創られたか 岡本和夫(理学部)、室田一雄(工学部)

第1回 10/8 数学はどうやって創られたか



ことばを創り、世界を創る 斎藤毅(理学部)

第2回 10/15 Mathematics "On Campus"

第3回 10/22 数の体系を創る



第4回 10/29 数と図形の共進化

脳と情報の数学を創る 甘利俊一(理化学研究所)

第5回 11/5 情報の仕組み:驚き、確率、幾何学

第6回 11/12 脳の仕組み:脳内情報の表現、記憶、学習の数理



目の錯覚の数学を創る 新井仁之(理学部)

第7回 11/19 数学で探る錯視の世界

第8回 11/26 脳の中のウェーブレット

第9回 12/3 錯視が創る新たな数学—ウェーブレットからフレームレットへ—



形を理解するための数学を創る 坪井俊(理学部)

第10回 12/10 惑星の軌道を理解する

第11回 12/17 多面体の形と曲面上の軌道の形

第12回 1/14 形の見分け方と数学の視点



文化と数学 岡本和夫(理学部)

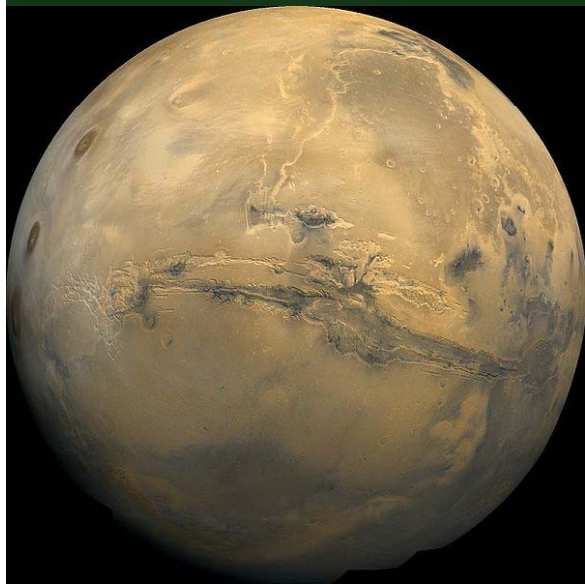
第13回 1/21 文化と数学

駒場 キャンパス 18号館ホール 木曜日 5時限 (16:20-17:50)

<http://www.gfk.c.u-tokyo.ac.jp/>



東大ナビ
 utnav.jp
キャンパス内各主要施設への案内
 東大ナビは、東大の魅力を最大限に引き出す
 ためのナビゲーションシステムです。
 東大ナビは、東大の魅力を最大限に引き出す
 ためのナビゲーションシステムです。



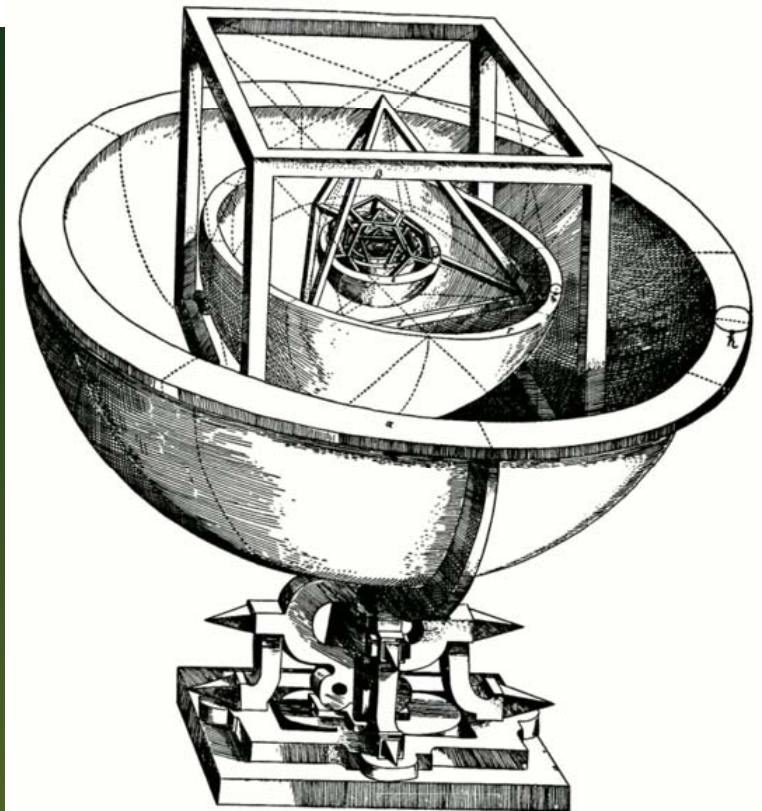
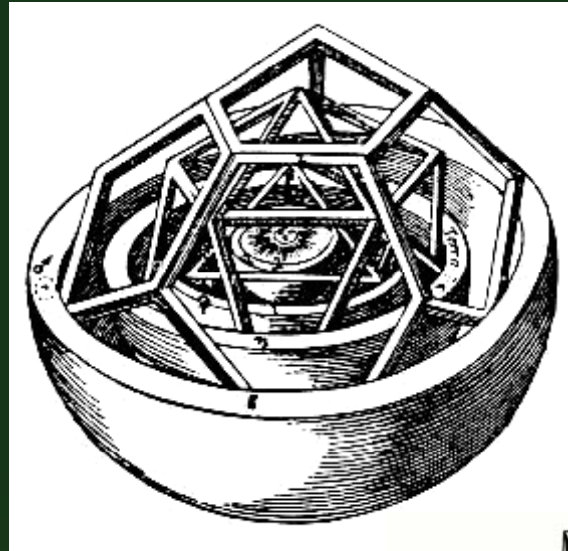
惑星

写真: NASAウェブページより転載

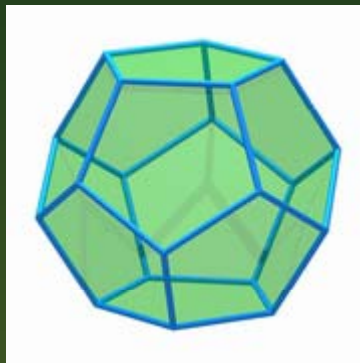
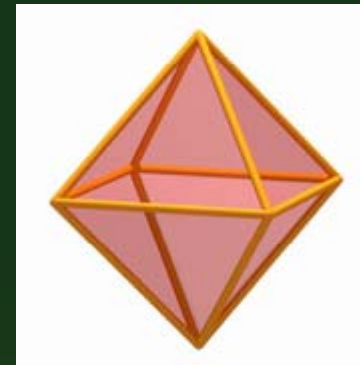
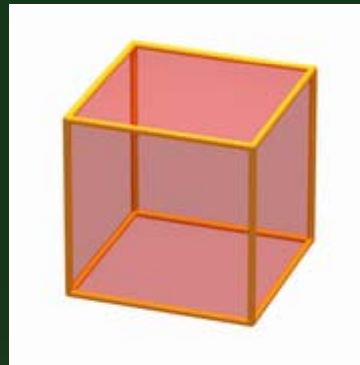
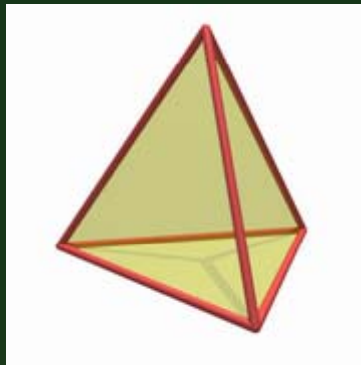


ケプラー(1571-1630)

ケプラーは、惑星の運動についての3法則を定式化した。一方では太陽と6つの惑星の距離と5つの正多面体とを無謀にも関係づけようとしている。



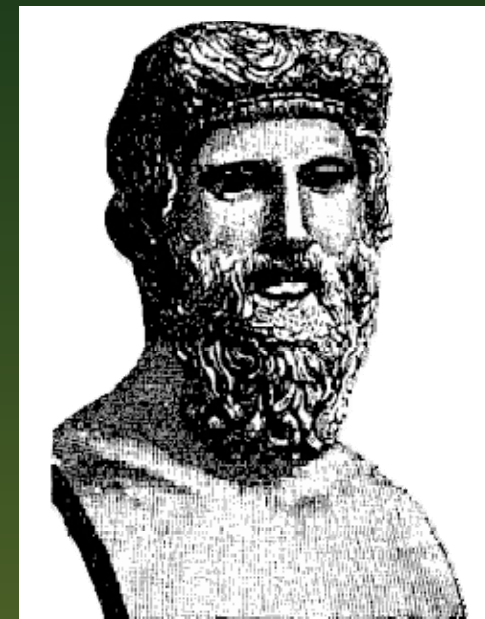
プラトンの多面体



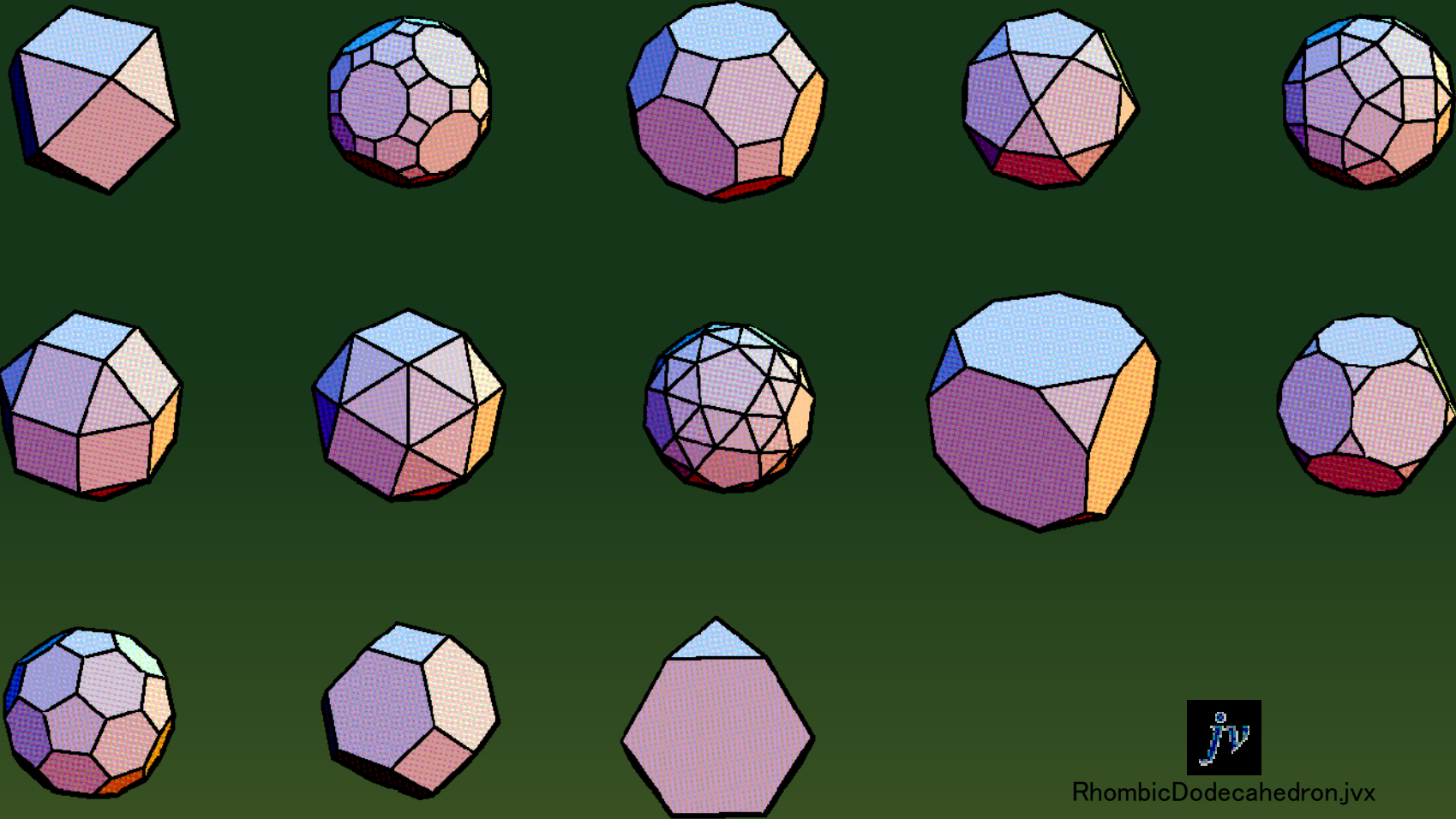
Dodecahedron.jvx



Icosahedron.jvx



プラトン(紀元前427—紀元前347)



RhombicDodecahedron.jvx

アルキメデスの多面体



アルキメデス(紀元前287—紀元前212)

オイラー (1707-1783)



三重大学の蟹江先生のページにあるオイラーの解説です。

<http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/humanind/jinmei.htm>

スイス、バーゼルに生まれ、ロシア、サンクト・ペテルブルグに死す。

ヨハン・ベルヌーイの弟子。ペテルブルグ(27-41)、ベルリン(41-66)、ペテルブルグ(66-83)のアカデミーに。66年に全盲となるも、死ぬまで活発な研究を続ける。朴訥な人柄で、子供は13人。赤ん坊を抱え、子供を足元で遊ばせながら数学をしたと言われている。天王星の軌道計算の途中、孫を呼びにやり、お茶をすすりながら話をしているとき、突然「死ぬよ」と周りに告げ、穏やかに「生きることと、計算することを止めた」という。

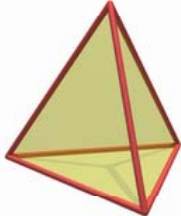
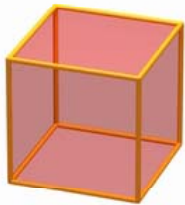

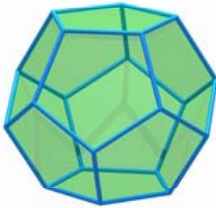

数学史上最大の多作家。解析学，代数学，整数論，確率論，複素関数論，変分法。ケーニヒスベルクの橋を一筆書きする問題や多面体の面・辺・頂点の数の関係式(オイラー標数)で、グラフ理論とトポロジーの祖となる。オイラー類，オイラー定数，オイラー方程式。天文学(日蝕の計算，月の新理論)，航海学(船のローリングやピッチングの理論)，流体動力学(気球の飛行計算)，屈折光学(レンズの理論)。

フランスの物理学者アラゴー(1786—1853)は、オイラーを「解析学の化身」と称え、「人が息をするように、鷺が空を舞うように、オイラーは計算をした」と言っている。

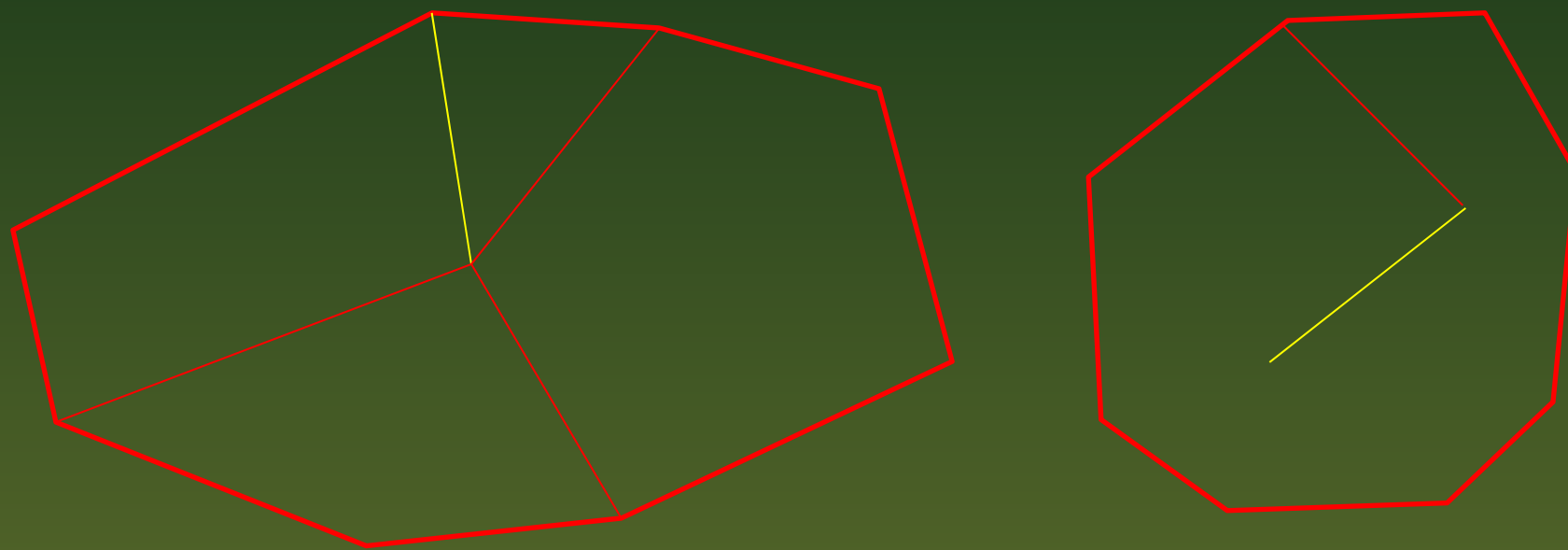
オイラーの多面体定理

凸多面体の頂点の個数を v ,
辺の個数を e , 面の個数を f
とすると

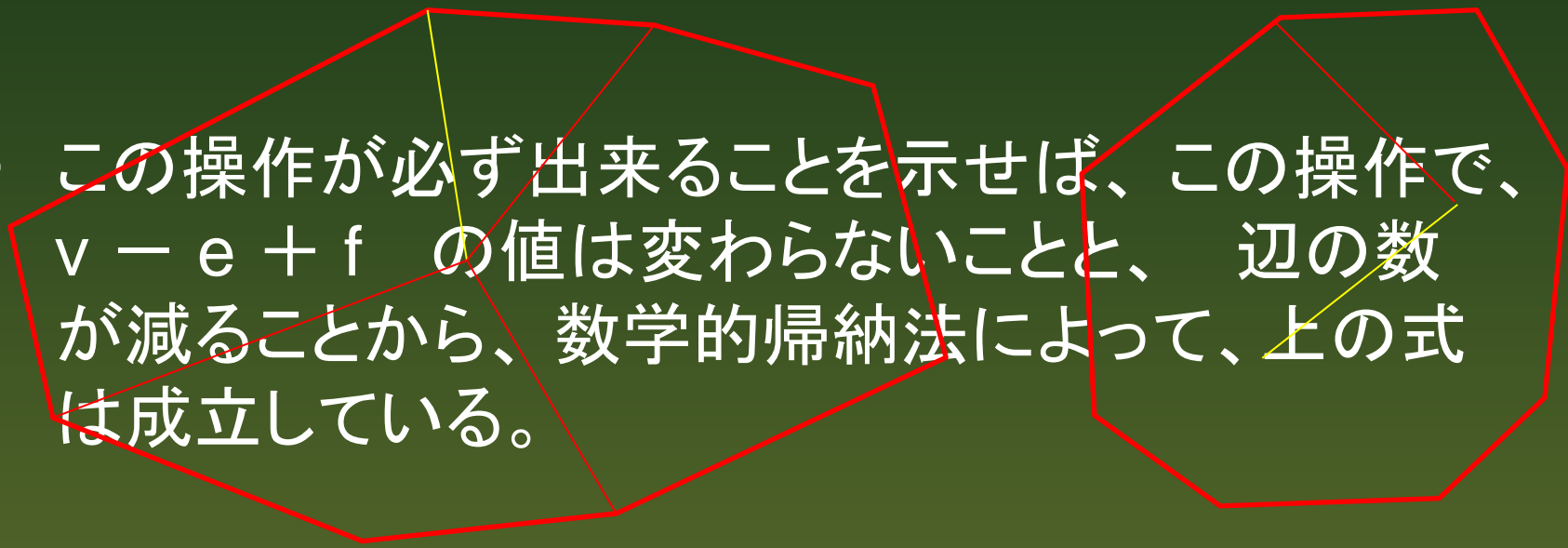
$$v - e + f = 2$$

					
頂点の個数 v	4	8	6	20	12
辺の個数 e	6	12	12	30	30
面の個数 f	4	6	8	12	20
$v - e + f$	2	2	2	2	2

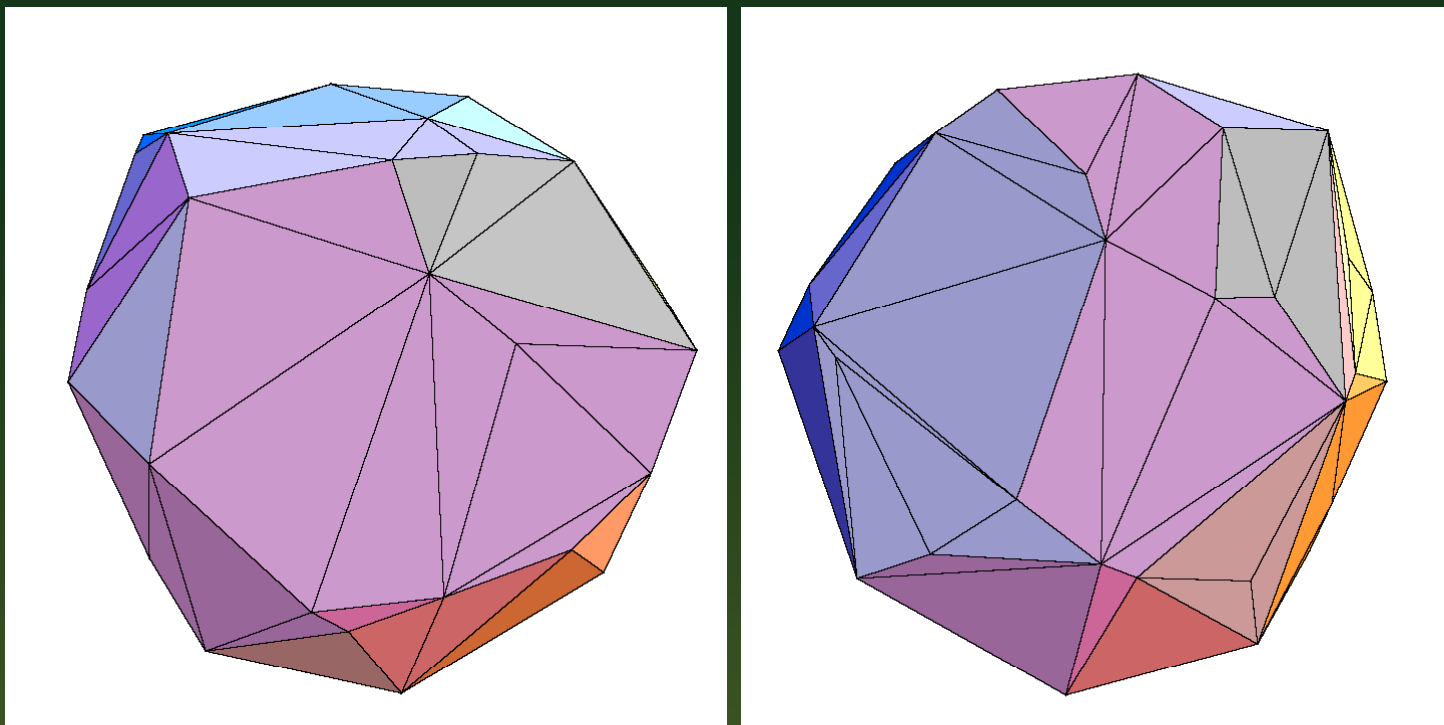
- 平面の多角形の分割について
- 多角形とは、辺がひとつながりになっている平面上の図形と定義する。
- このとき、辺の個数と頂点の個数は等しい。
- 平面の多角形が、線分のあつまりによって多角形に分割されているとき、
$$v - e + f = 1$$
を辺の数についての数学的帰納法で示す。



- 分割される前の多角形について、面の数は1だから、上の式は成立している。
- 次の操作を考える。
 1. 2つの面をつなぐように辺を消去する。
 2. 多角形の内側に突き出した辺と頂点を消去する。
- この操作が必ず出来ることを示せば、この操作で、 $v - e + f$ の値は変わらないことと、辺の数が減ることから、数学的帰納法によって、上の式は成立している。



- 面の数が2以上ならば、隣合う面があるから、辺の消去が可能である。
- この結果、多角形の内側へ突き出した辺と頂点が出来たときは、辺と頂点を先から順に消去していく。
- こうして、平面の多角形が、線分のあつまりによって多角形に分割されているとき、 $v - e + f = 1$ が示された。



- 凸多面体 K は、2つの平面の多角形 P_1 と P_2 に、裏と表が射影できる。
- 裏と表の共通部分 C は P_1 と P_2 の境界に射影されている。

- このとき

$$K \text{ の辺の数} = P_1 \text{ の分割の辺の数} \\ + P_2 \text{ の分割の辺の数} - C \text{ の辺の数}$$

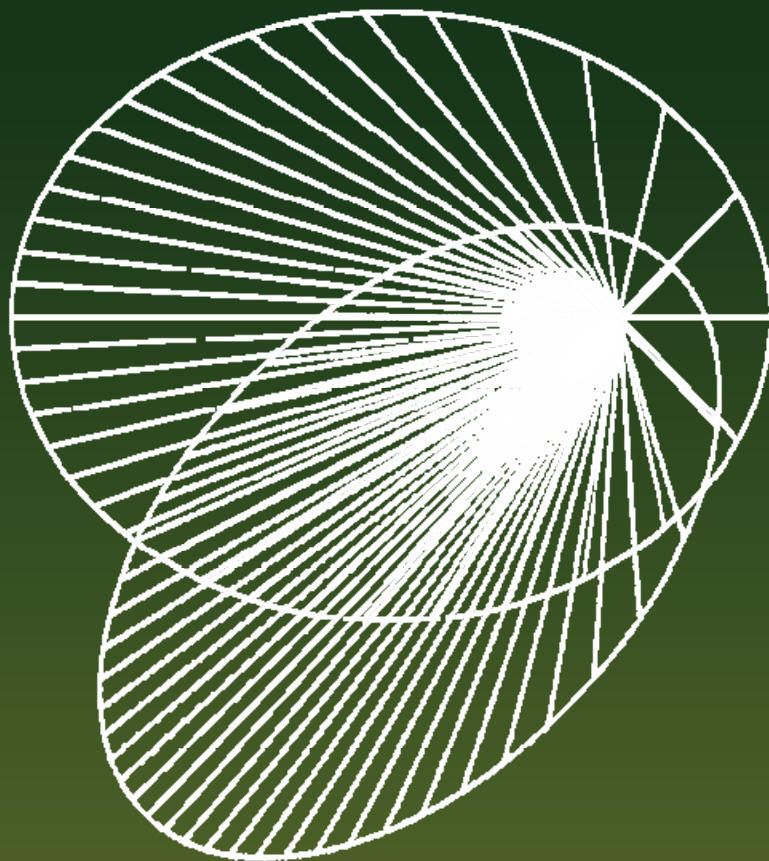
$$K \text{ の頂点の数} = P_1 \text{ の分割の頂点の数} \\ + P_2 \text{ の分割の頂点の数} - C \text{ の頂点の数}$$

$$K \text{ の面の数} = P_1 \text{ の分割の面の数} \\ + P_2 \text{ の分割の面の数}$$

$$\begin{aligned} & v(K) - e(K) + f(K) \\ &= v(P_1) + v(P_2) - v(C) \\ &\quad - (e(P_1) + e(P_2) - e(C)) \\ &\quad + f(P_1) + f(P_2) \\ &= 1 + 1 + e(C) - v(C) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

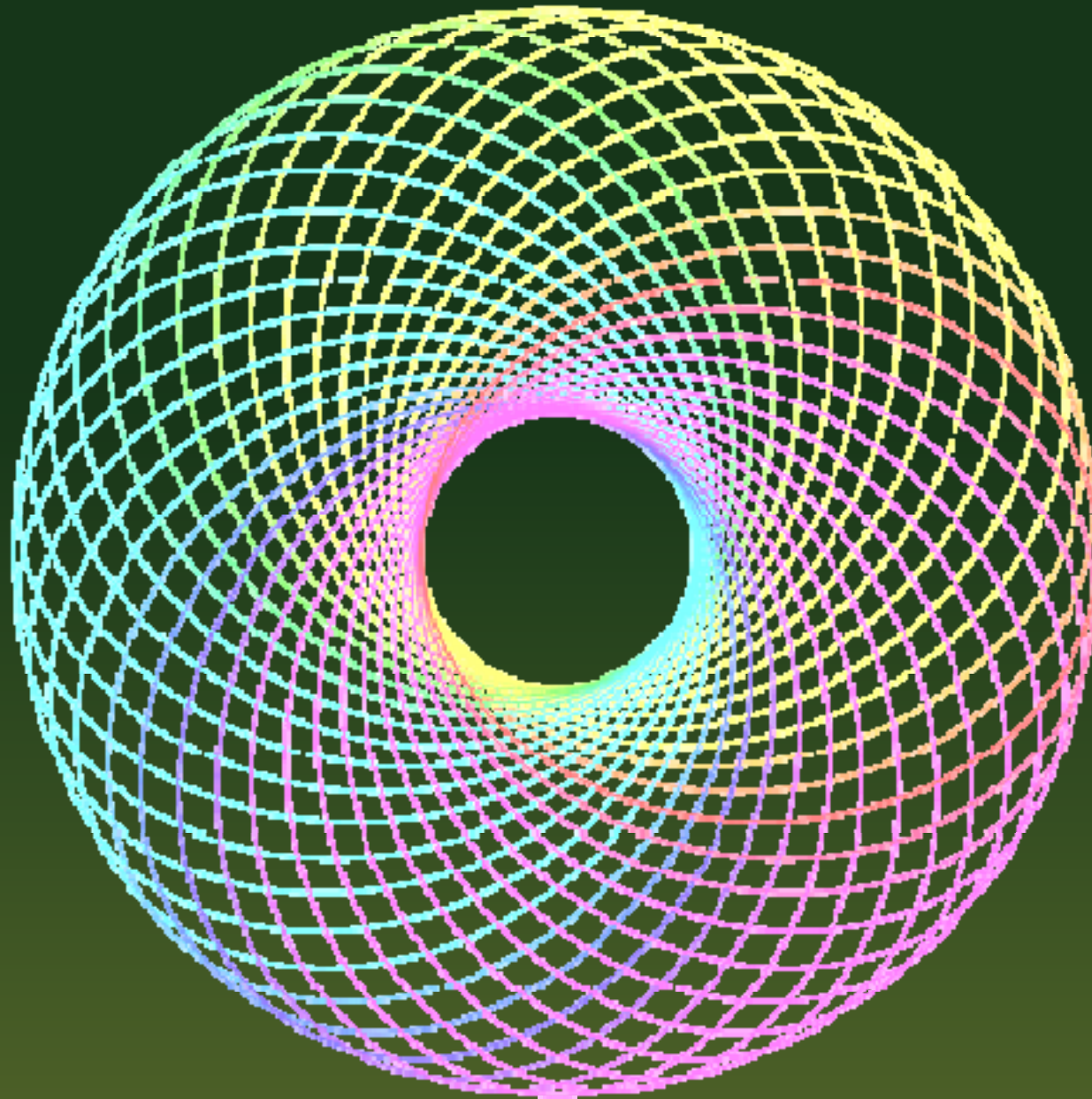
凸多面体の頂点の個数を v , 辺の個数を e , 面の個数を f とすると $v - e + f = 2$ となることが証明された。

オイラーの多面体定理が、惑星の軌道とどういう関係があるのだろうか？

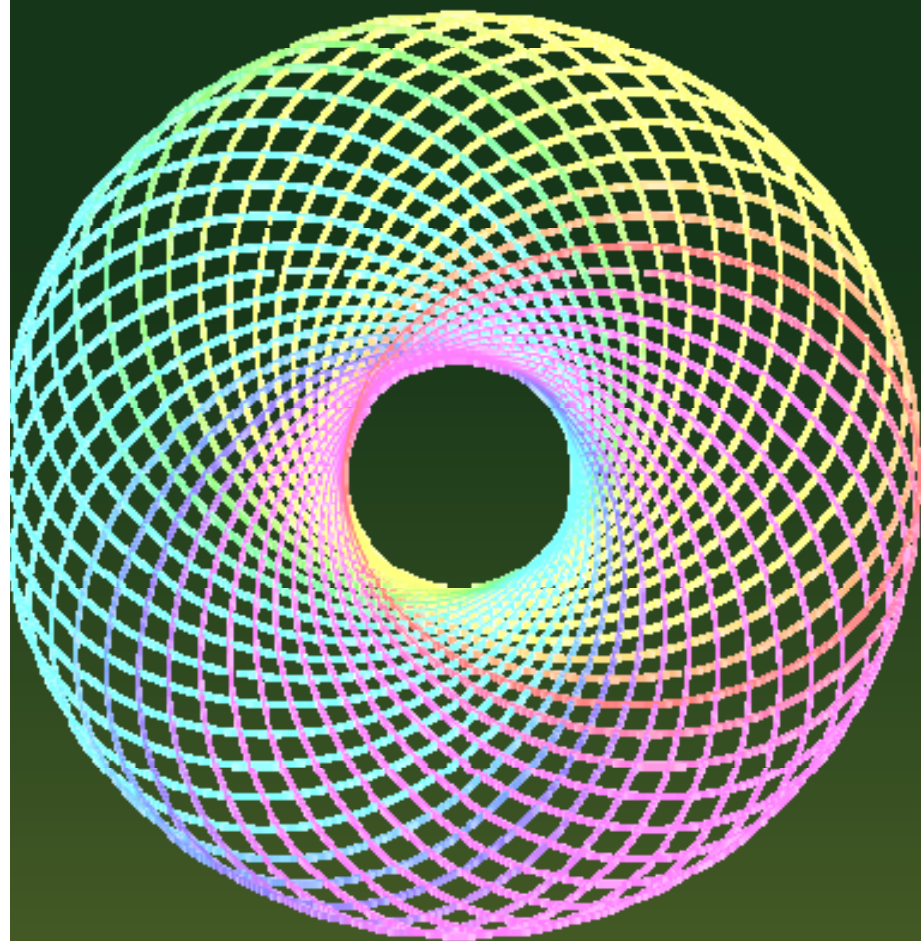


- 2つの星が万有引力だけによって運動する問題の方程式は、中心力の方程式に帰着される。
- 作用反作用の法則から、2つの星の重心が等速直線運動をするので、その点を原点とする座標をとることができる。
- 平面上での運動の状態は、一方の星の座標(2次元)と速度(2次元)の4次元の空間の点として表わされる。
- ある時刻の座標と速度が決まると、万有引力の法則から運動方程式が書けて、運動が定まる。

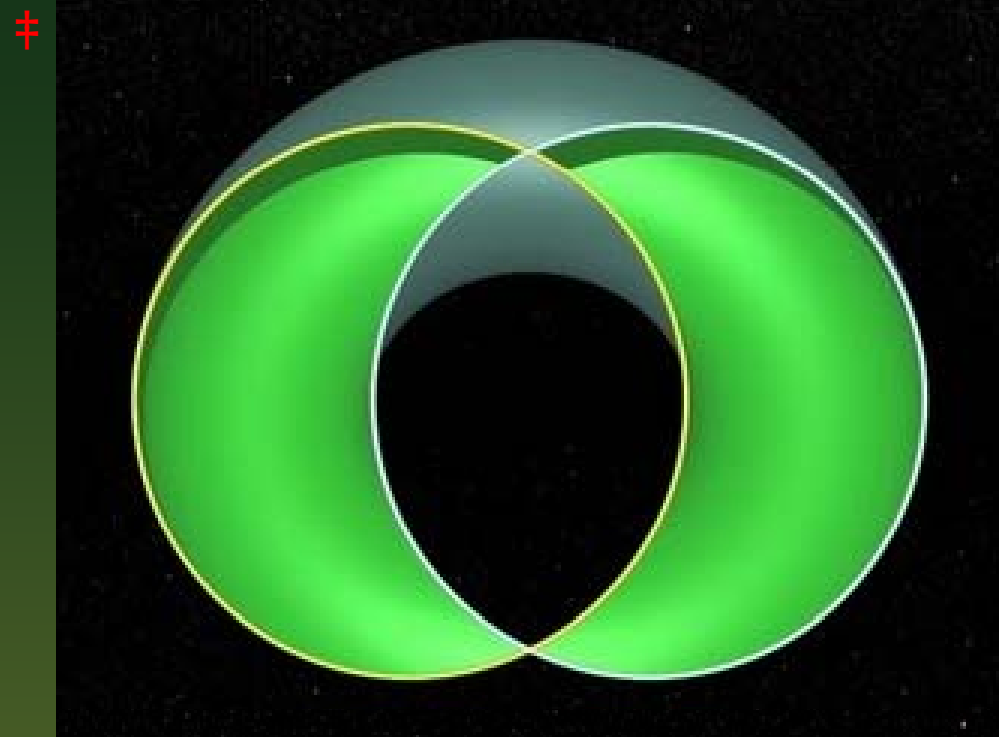
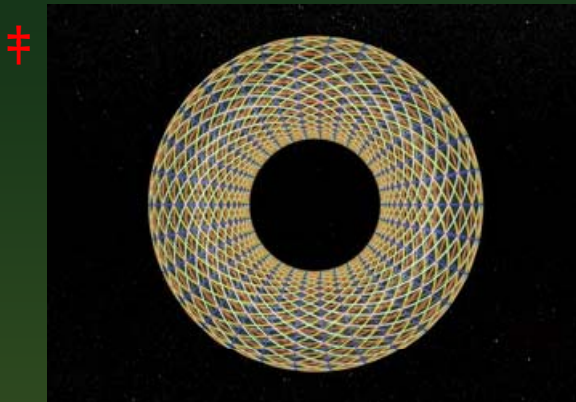
- さらに角運動量が保存されること(重心に対する面積速度一定)と、エネルギーが保存されることから、さらに2つの関係式が得られる。
- 4次元の空間のなかに2つの関係式をとともにみたす部分集合があることになるが、これが、運動量、角運動量、エネルギーが定まった運動を記述する状態の空間となる。
- 楕円軌道の解をもっている時に、この状態の空間は、2次元のトーラスとなる。



- エネルギーを決める。
- 重心からの距離で位置エネルギーが決まると、速さが決まる。
- 面積速度が一定になるための方向が2通り(近日点、遠日点では1通り)に決まる。



- これらの楕円は、トーラス上のビラルソーの円周に関する。
- 回転面として得られるトーラス上の各点を通る円周が4本ある：
経線，緯線，2つのビラルソーの円周である。
- このビラルソーの円周を正射影すると、焦点を共有する短軸、長軸の長さが同じ楕円になる。

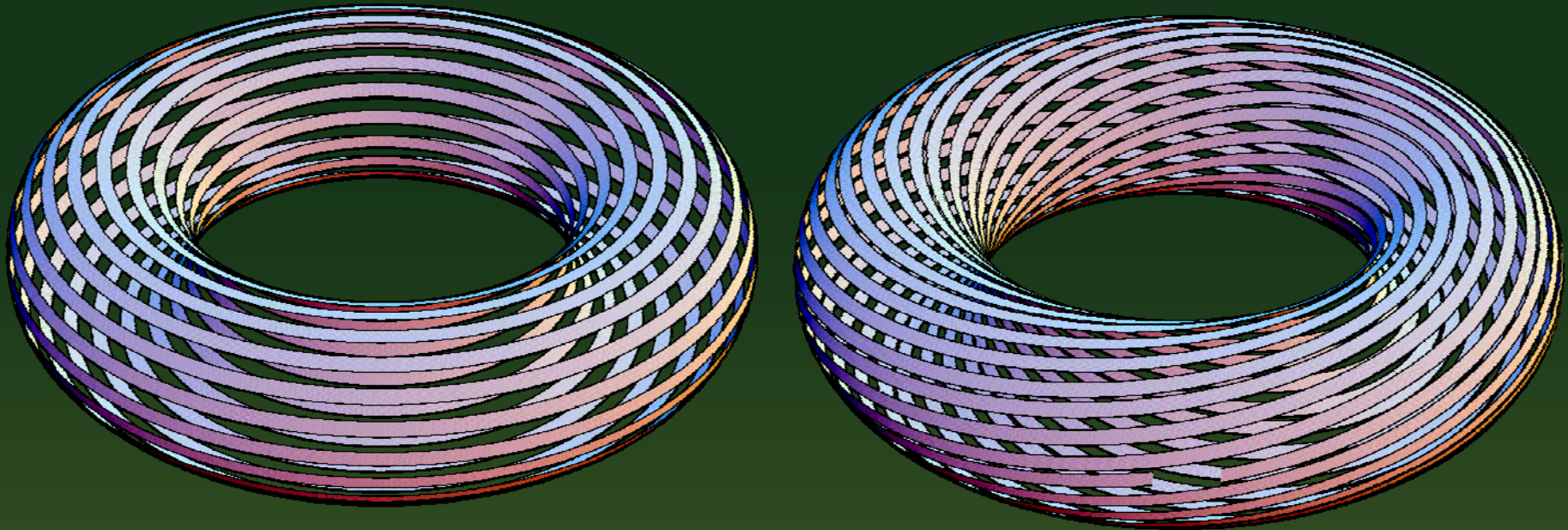


- この2次元の状態の空間を得た議論には、万有引力(逆2乗の法則)は使っていない。

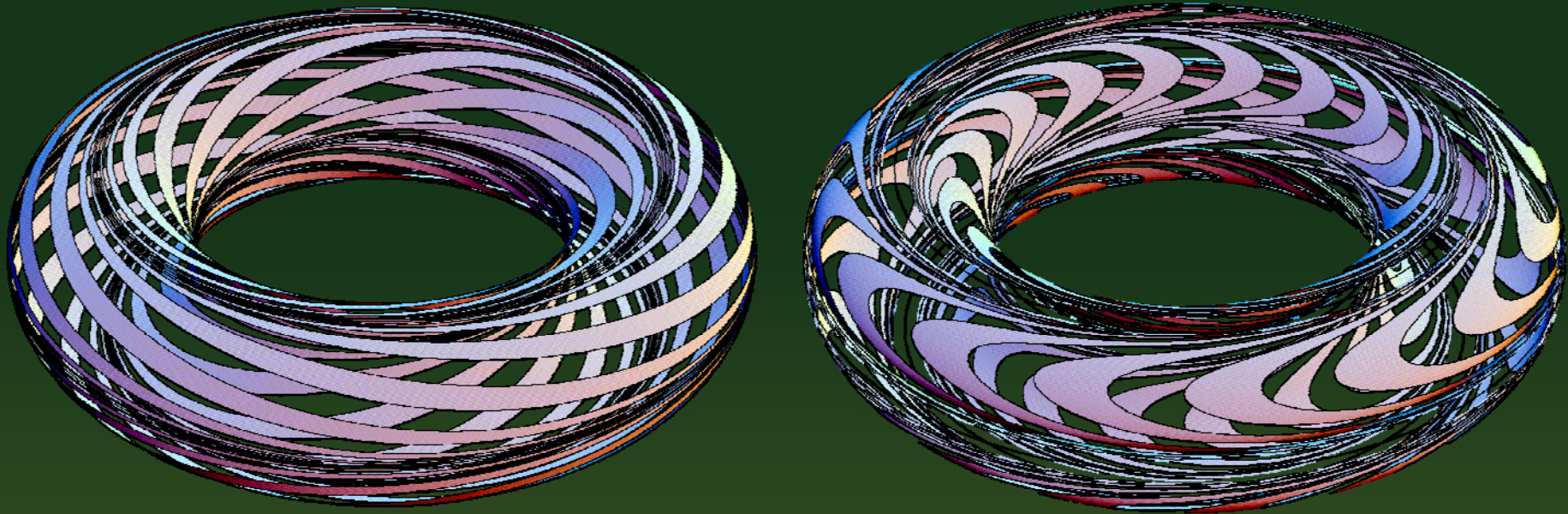
逆2乗の法則の
[BASICのプログラム](#)

逆2乗からずれた場合の
[BASICのプログラム](#)

- 一般に、トーラスを状態の空間とするフローを考える。

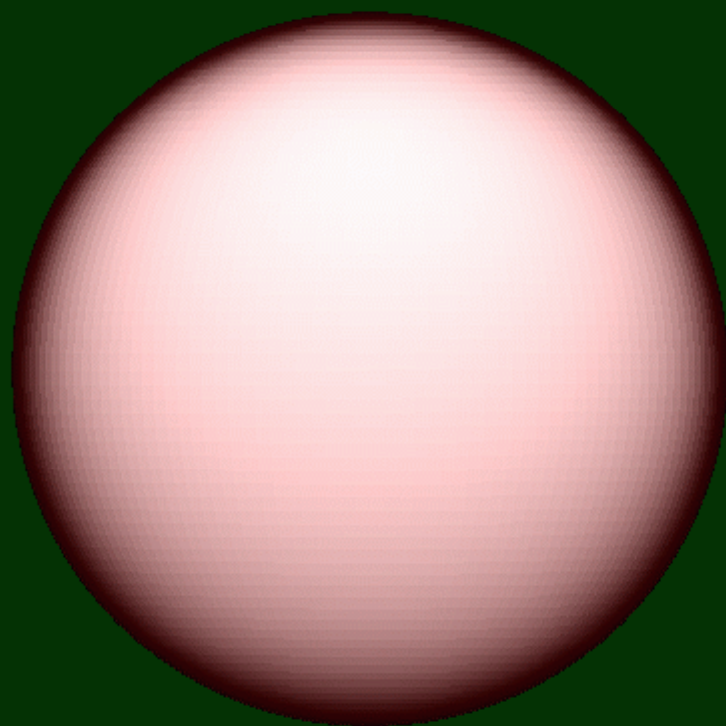


- 左は、すべての軌道が楕円の場合、右は、逆2乗の法則が近似的にしか成り立たない場合を表わしている。

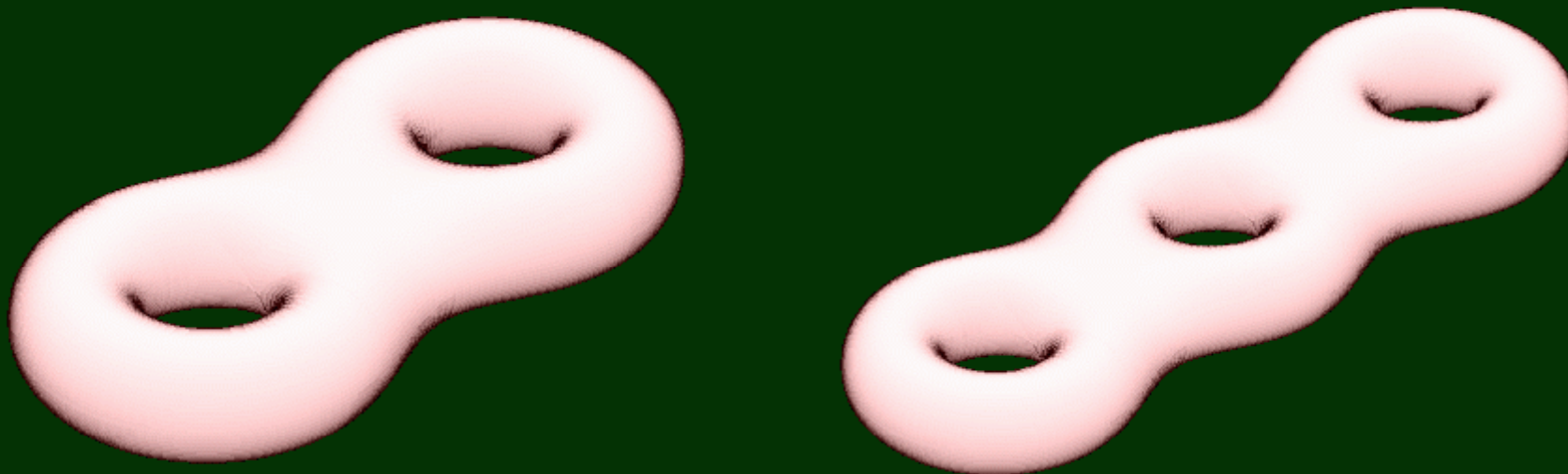


- トーラス上にはこの図のようなフローも存在する。
- ハミルトン力学系では、面積(体積)が保存される。
- 従って、上の図のフローは、ハミルトン力学系の解としては現れない。

このような2次元の状態の空間は、一般には、曲面となる。



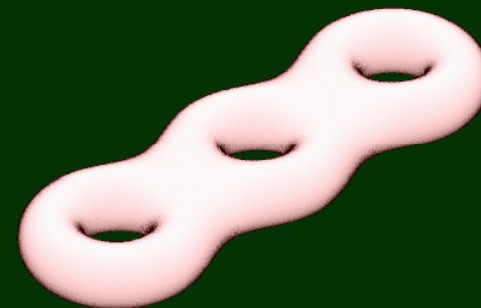
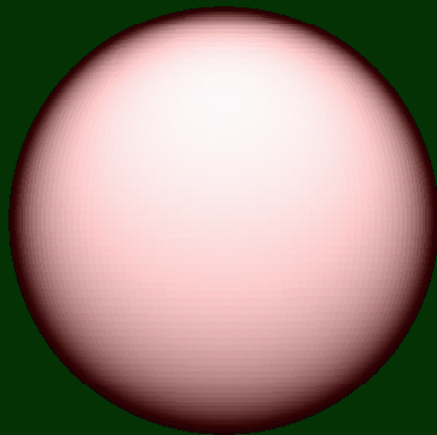
有界な(コンパクトな)曲面には、次のようなものもある。

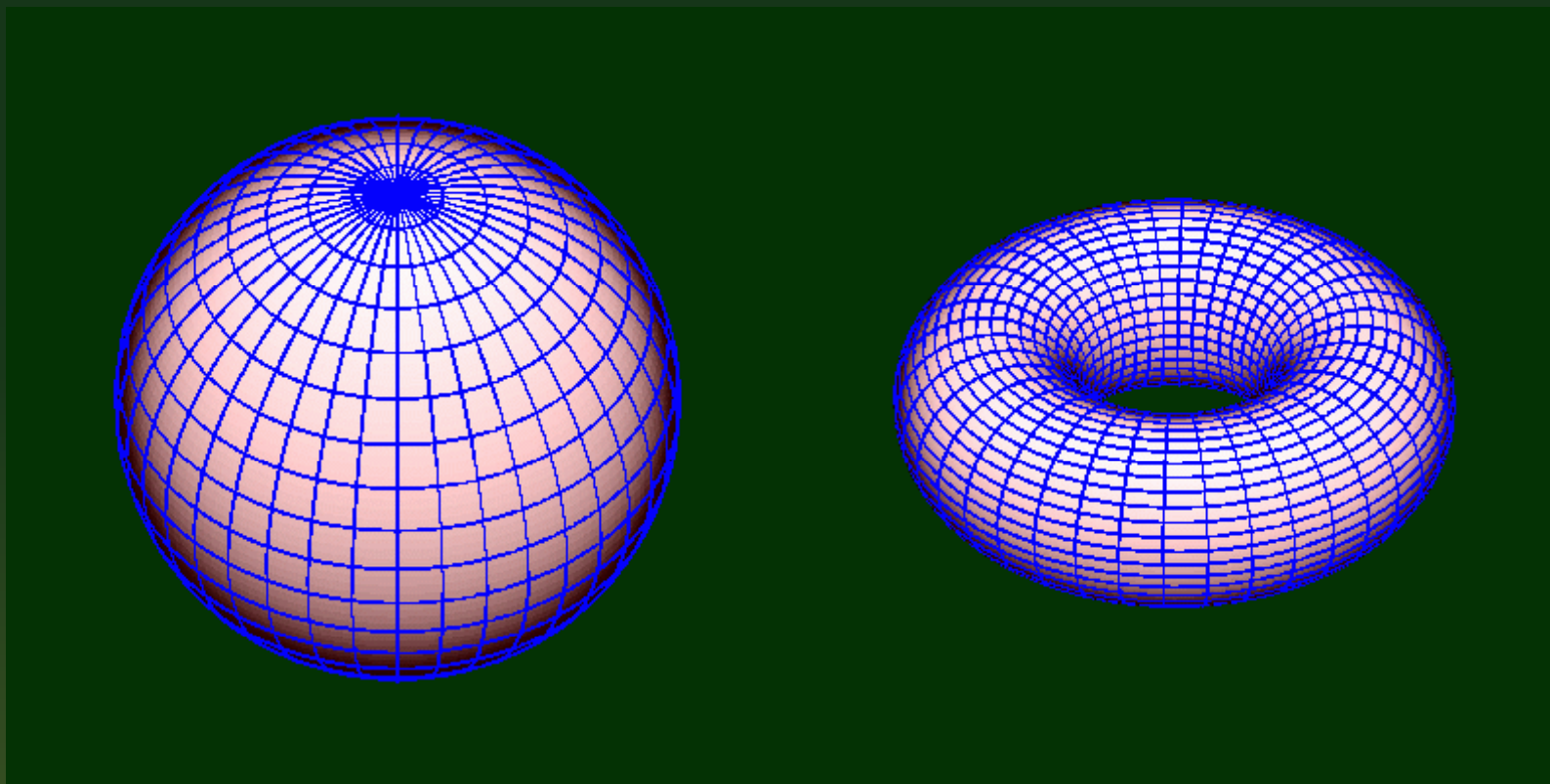


このような曲面の上のフローの様子は、トーラスの上のフローとは異なっているはずである。

特に、球面上、種数2以上の曲面上では、必ず停留点(ベクトル場の零点)が現れる。

種数とは、補集合が連結であるように埋め込める円周の個数である。





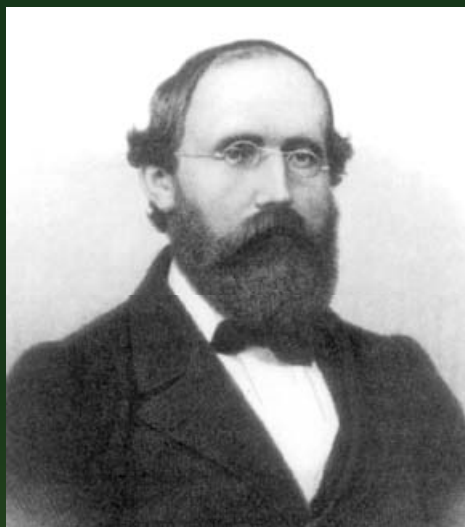
球面とトーラスの上の典型的なフローを描くと図のようになる。

曲面の研究は、アルキメデス(紀元前287—紀元前212)以前からあるが、オイラー(1707—1783)以後、19世紀前半に大きな進歩を遂げた。

ガウス(1777—1855)



曲率が空間内の配置に依らず、曲面に沿う距離で定まることを発見した。



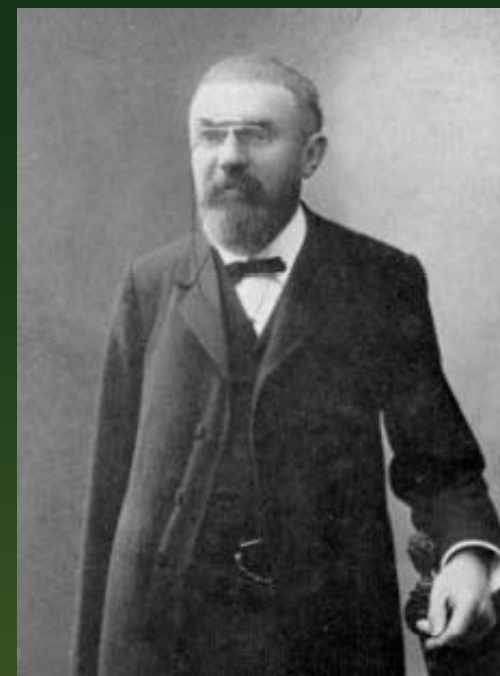
リーマン(1826-1866)

計量を持つ空間
を定式化した。

リーマン面の理論、リーマンの
写像定理。



クライン(1849-1925)





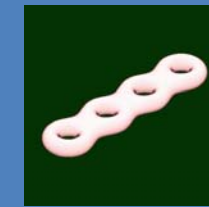


ポアンカレ(1854-1912)

1760	L. Euler	曲面の主曲率、Euler の公式
1760	J. L. Lagrange	極小曲面の方程式
1784	G. Monge	曲率線、曲率半径の定義
1784	A. M. Legendre	Legendre 変換
1813	P. C. F. Dupin	共役方向の概念、Dupin の定理
1826	A. L. Cauchy	空間曲線の主法線、曲面の接平面の定義
1827	C. F. Gauss	球面表示、全曲率、Gauss の定理、測地三角形の Gauss の定理
1836	C.G.J.Jacobi	Jacobi 場、共役点
1847	J. F. Serret	空間曲線の Frenet-Serret の公式
1848	O. Bonnet	一般の Gauss-Bonnet の定理
1854	B. Riemann	幾何学の基礎にある仮説について Riemann 幾何の始まり
1867	Bonnet	Gauss-Codazzi-Mainardi の方程式による曲面の基本定理の証明
1866	Darboux	学位論文: 直交三重系について
1872	F. Klein	エルランゲンの目録 幾何学の比較的群論的考察
1898	J. S. Hadamard	完備単連結負曲率曲面の位相型
1899	D. Hilbert	完備負曲率曲面の埋め込み不能定理

曲面は3角形に分割して、多面体の表面とすることができる。

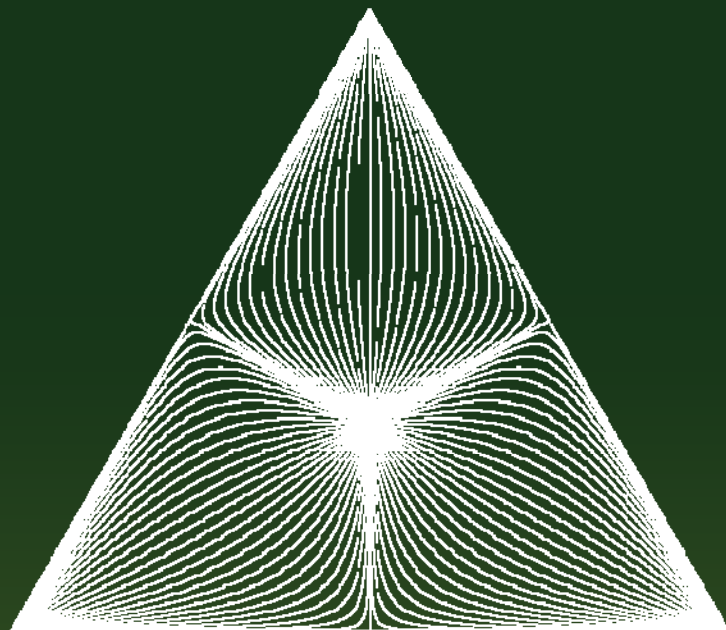
このとき、オイラー数 = 頂点の個数 - 辺の個数 + 面の個数 は
分割の取り方に依らず、次のようになる。

向きづけ可能な閉曲面					
オイラー数	2	0	-2	-4	-6
種数	0	1	2	3	4

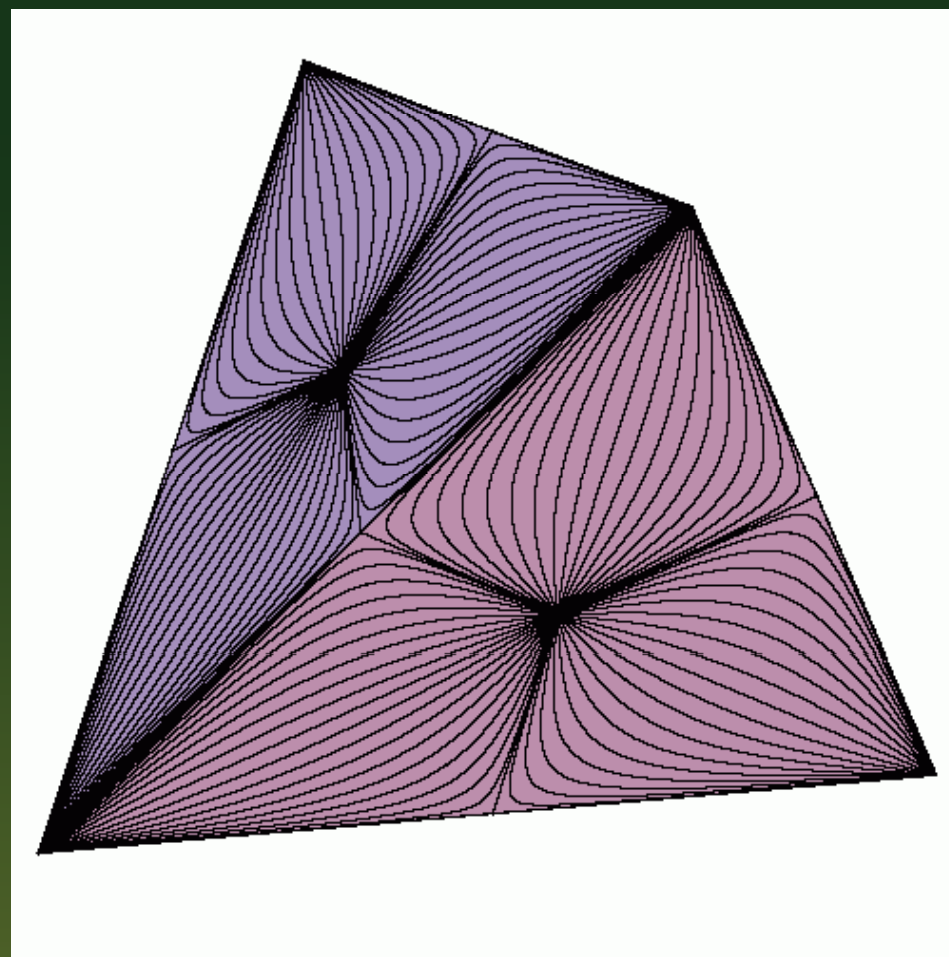
球面上、種数2以上の曲面上では、必ず停留点(ベクトル場の零点)が現れることは、オイラー数が0と異なることによる。

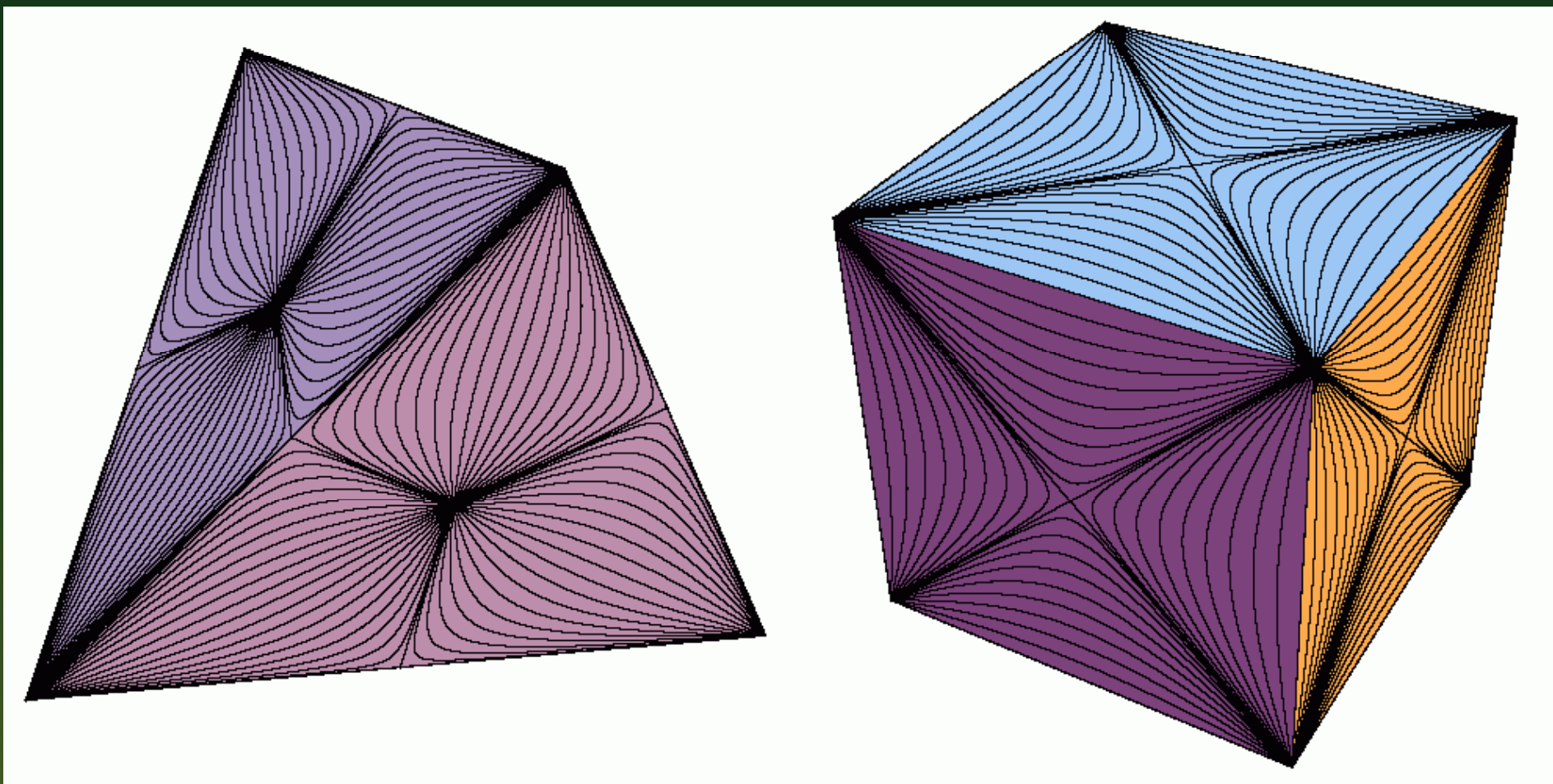
その理由を見てみよう。

三角形分割した曲面の三角形に次のような模様を描く。

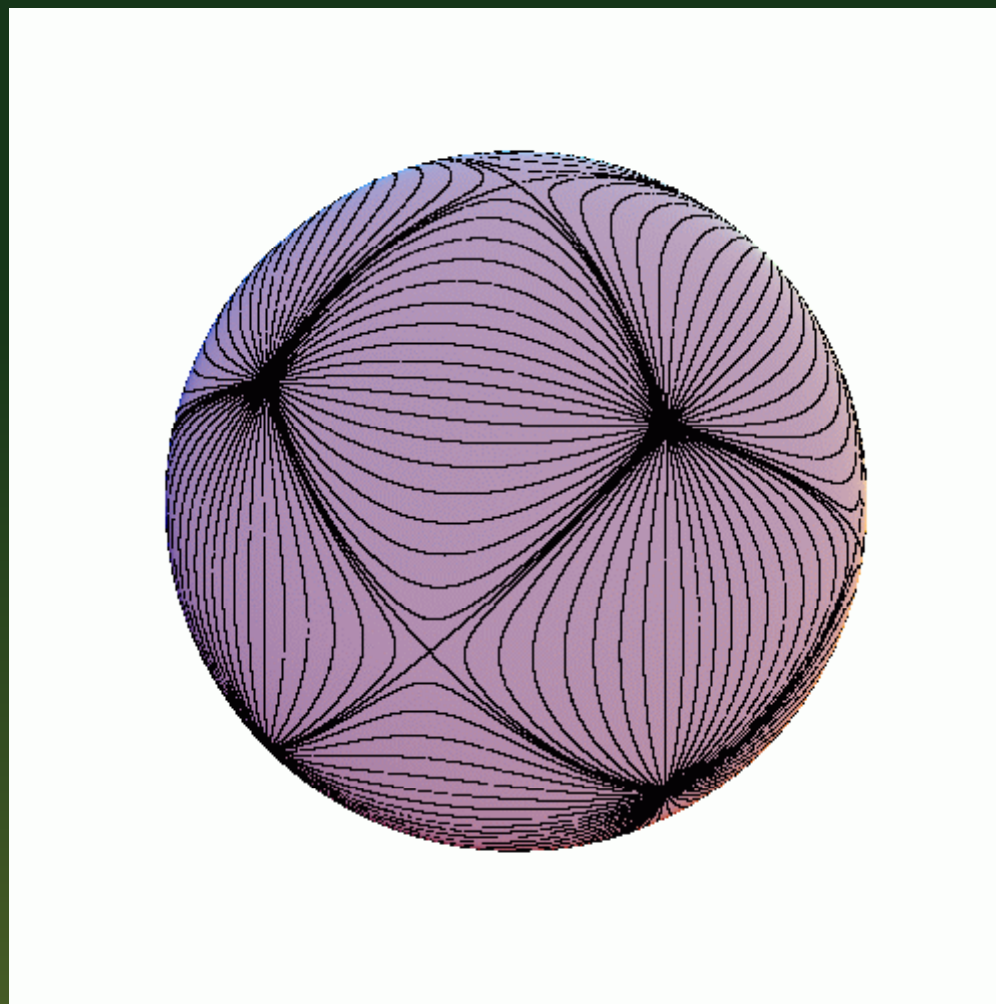


そうすると、つぎのようになる。



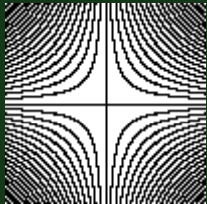


曲面の上で書くと、つぎのようになる。



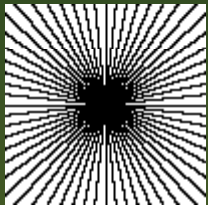
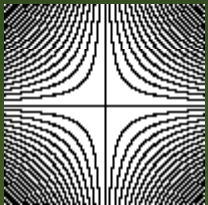
オイラーの多面体定理における

頂点 v 、面 f に対して  が対応し、

辺 e に対して  が対応する。

従って、球面上の模様に対して、オイラーの多面体定理は次のように書かれる。

ポアンカレ-ホップの定理

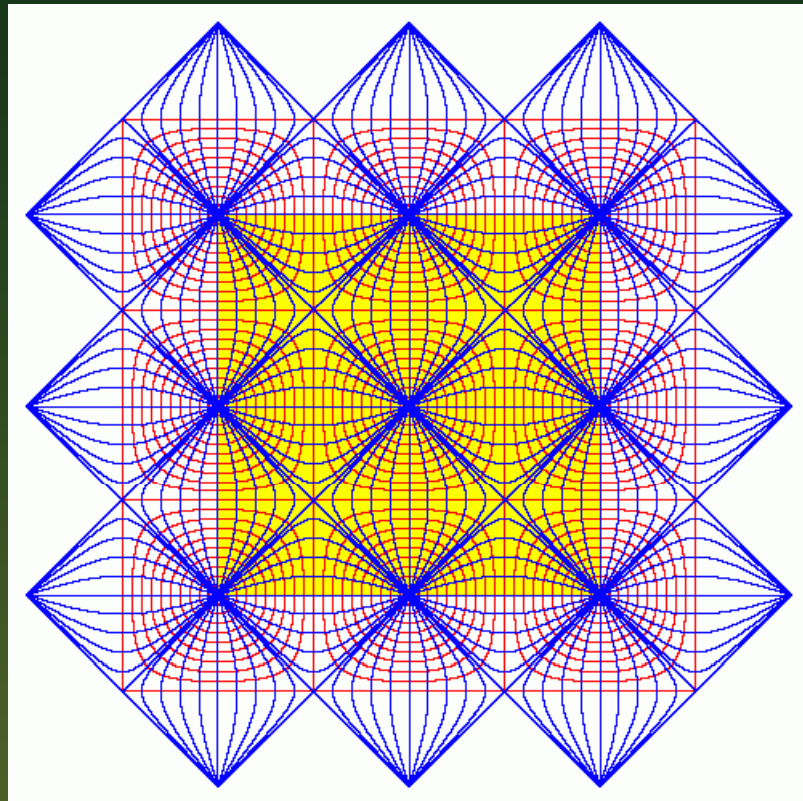
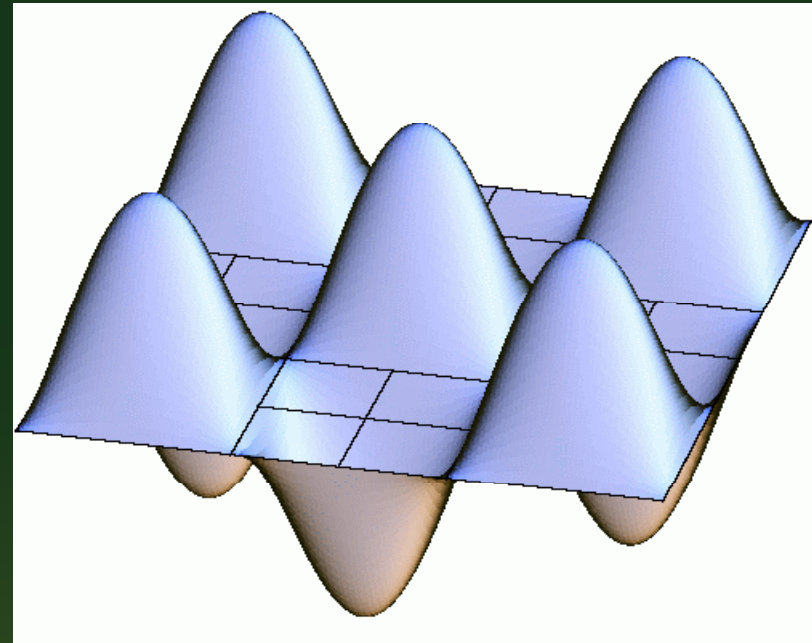
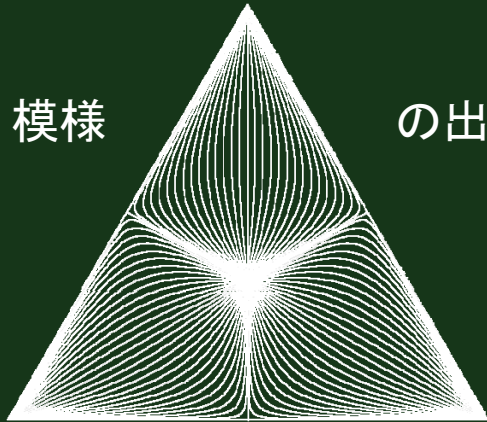
 の個数 $-$  の個数 $= 2$



右辺は一般の曲面ではオイラー数となる。

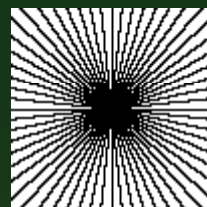
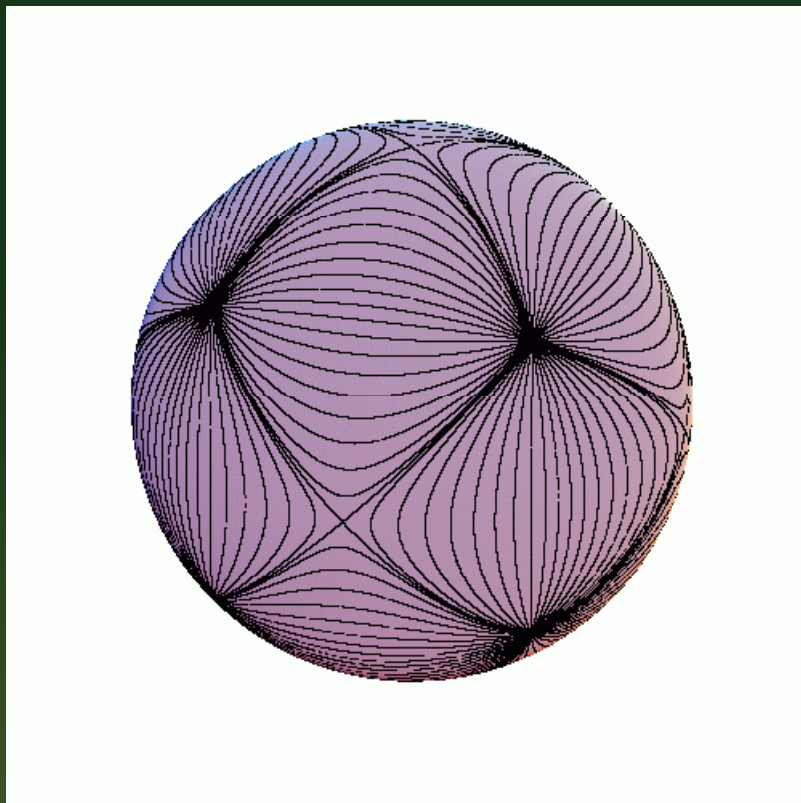
模様

の出所は、 $\cos x \cos y$ のグラフ



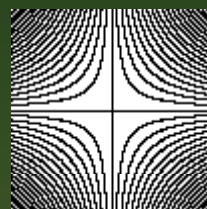
等高線(赤色)に対し、それに直交する
最大傾斜線(青色)がある。
最大傾斜線の模様で三角形をうめている。

この模様に沿う流れがあると思うと、



は、

極大点または極小点、



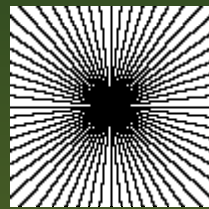
は、

鞍点に対応する。

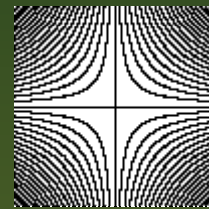
オイラーの多面体定理の証明は
「辺を消去して、面の数を減らす」、
「辺と頂点を縮める」
という2つの操作によった。

これは、最大傾斜線の模様に対しては
コブの消去に対応する。

曲面を変形して、



と

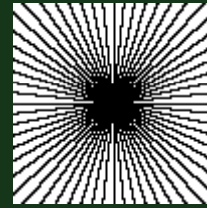


の対を

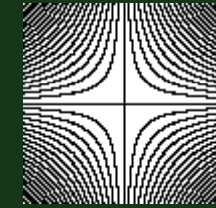
消滅させることが出来る。

ポアンカレ-ホップの定理

コンパクトな曲面上のフローが、

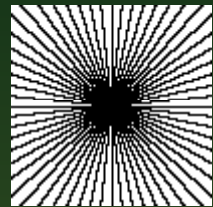


と



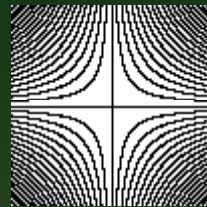
の形の

停留点のみを持つとする。このとき、



の個数

−






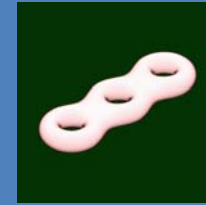
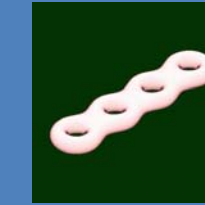
の個数

=

曲面のオイラー数

特に、あるコンパクトな曲面上に停留点を持たないフローが存在したとすると、その曲面のオイラー数は0である。

あるコンパクトな曲面上に停留点を持たないフローが存在したとすると、その曲面は、トーラス（またはクラインの壺）と同相である（同じ形である）。

向きづけ可能な閉曲面					
オイラー数	2	0	-2	-4	-6
種数	0	1	2	3	4

参考

三重大大学の蟹江先生のページにあるオイラーの解説

<http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/humanind/jinmei.htm>

DIMENSIONS

<http://www.dimensions-math.org/>

極小曲面 —Plateau 問題から現代の曲面論へ—

<http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH/26.shtml>

佐々木武

G. Darboux Theorie Generale des Surfaces

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/sasaki/darf.pdf>

河野俊丈

幾何学模型アーカイブからの眺望

<http://mathsoc.jp/publication/tushin/1402/1402kohno.pdf>