学術俯瞰講義

「数学を創る」
－数学者達の挑戦－

2009年度冬学期

第13回「文化と数学」

2010/1/21　岡本和夫

数学に関する余談(常識)

- ヨーロッパ中世の自由7学科

  論理学、文法、修辞学

- マテマ4学科

  幾何学、算術、天文学、音楽

- 解析**(analysis)**と総合**(synthesis)**

Pierre de Fermat
1601-1665

フェルマーも
間違えた！

$$F(n) = 2^{2^n} + 1$$ は素数か？

$$F(0) = 2^1 + 1 = 3$$

$$F(1) = 2^2 + 1 = 5$$

$$F(2) = 2^4 + 1 = 17$$

$$F(3) = 2^8 + 1 = 257$$

$$F(4) = 2^{16} + 1 = 65537$$

$$F(5) = 2^{32} + 1 = 4294967297$$

$$= 641 \times 670047$$

オイラーが
証明した

$$F(5) = 2^{32} + 1$$

$$a = 2^7, b = 5, c = ab,$$

$$2^{32} = 2^{28} 2^4,$$

$$2^{28} = a^4,$$

$$3 = 128 - 125 = a - b^3,$$

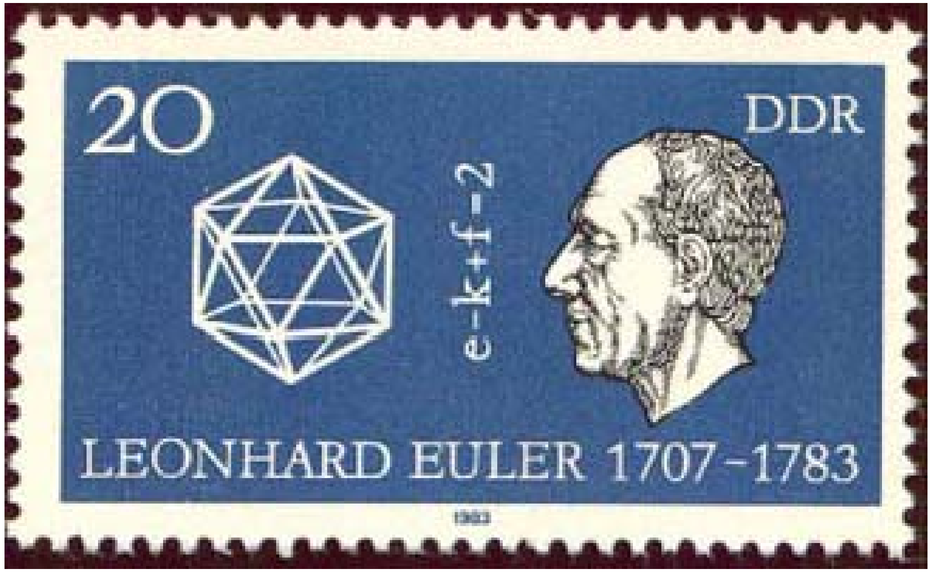
$$2^4 = 16 = 3 \times 5 + 1$$

$$F(5) = a^4((a-b^3)b+1)+1$$

$$= a^4(c+1) - c^4 + 1,$$

$$c^4 - 1 = (c-1)(c+1)(c^2+1)$$

$F(5)$は$c+1=641$で割り切れる



Leonhard Euler
1707-1783

何のために証明するのか

$F(8)$は1238926361552897で割り切れる

$F(3310)$は$5\cdot 2^{3313}+1$で割り切れる

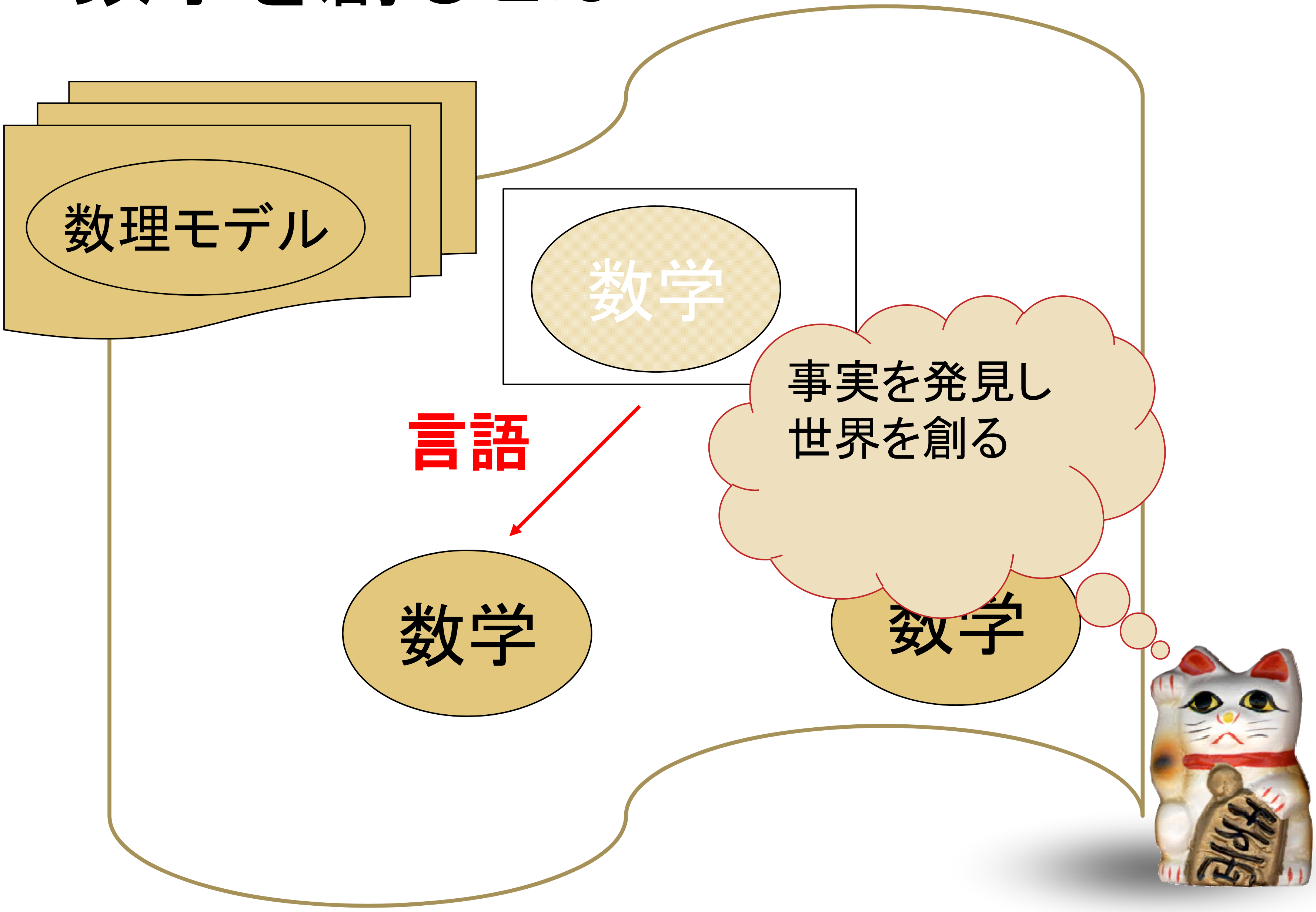
注意！　素数であることは
比較的簡単に判定できるが，
素因数を見つけることは飛躍的に困難

数学に期待されていること

- 明晰であること
- 想像力をゆたかにすること
- 知的好奇心を身につけること

- 数学を使うことの楽しみ

数学を創るとは？



純粋数学と応用数学

- 数学から数学を創る
  - 純粋数学
- 自然現象や社会現象から数学を創る
  - 応用数学

数学についてもう一言

- 学ぶ立場から言えば･･･

それから

これ

あれ

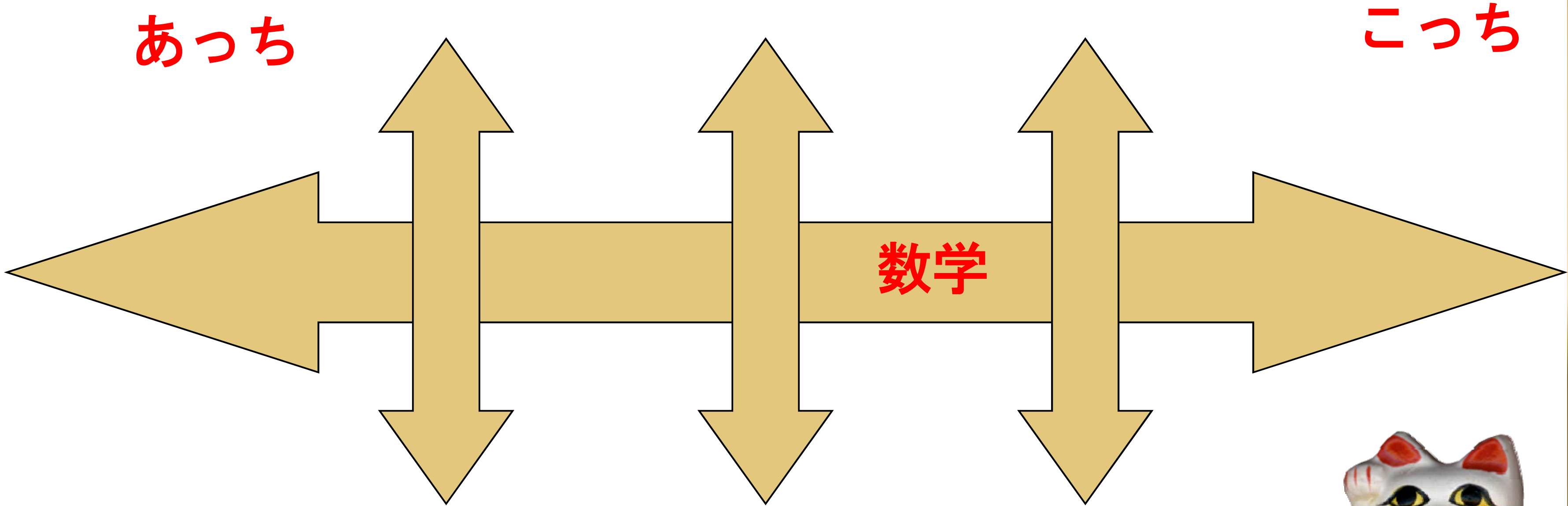
数学

こっち

あっち

数学の役割

- 科学技術の中で見れば･･･



新しい使い道

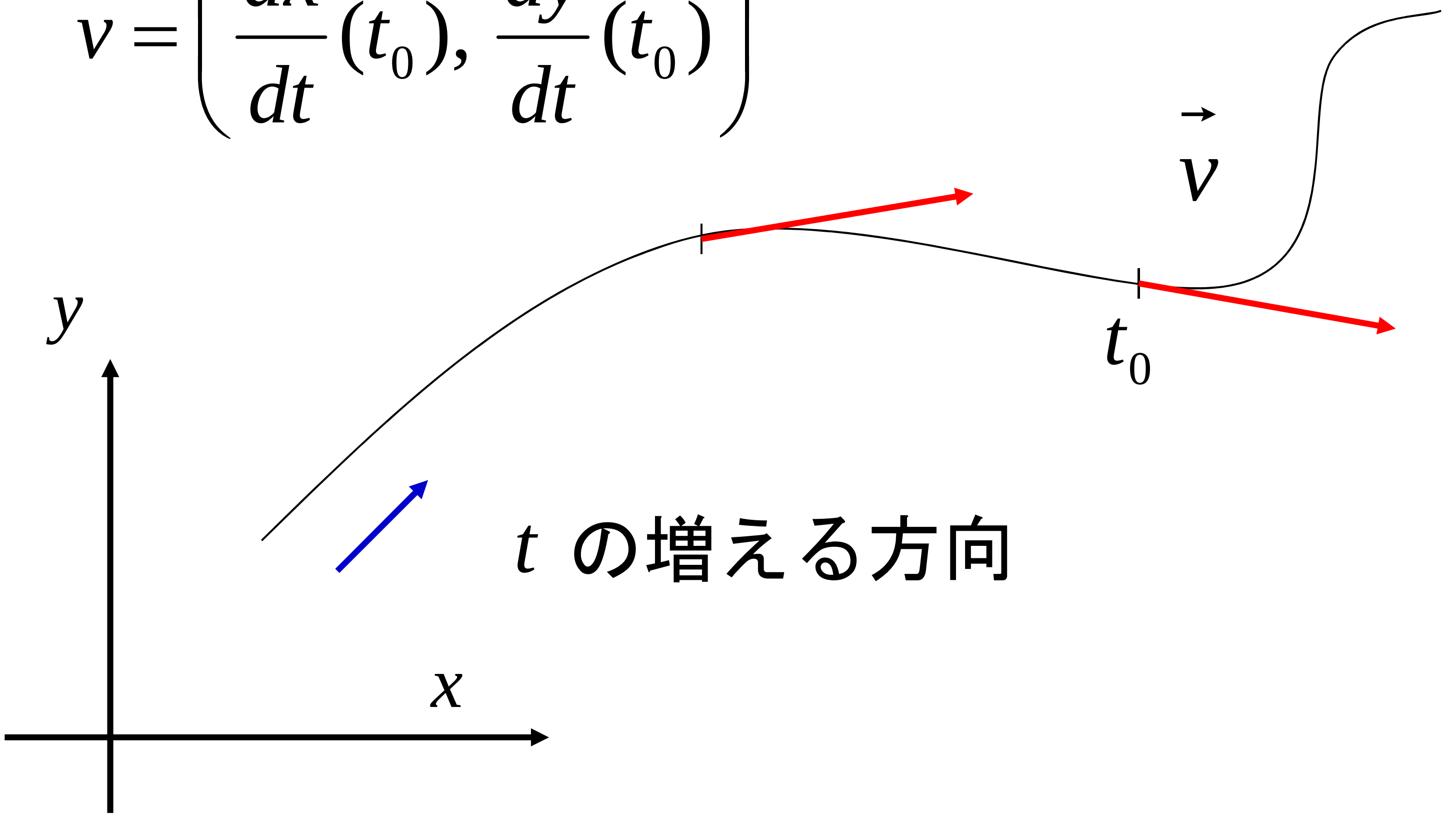
曲線を描く

CADの基礎にある数学

ここで数学を少々

曲線 $(x, y) = (x(t), y(t))$ の接線ベクトル

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0) \right)$$



ベジエ3次曲線

$$x = a_0(1-t)^3 + 3a_1t(1-t)^2 + 3a_2t^2(1-t) + a_3t^3$$

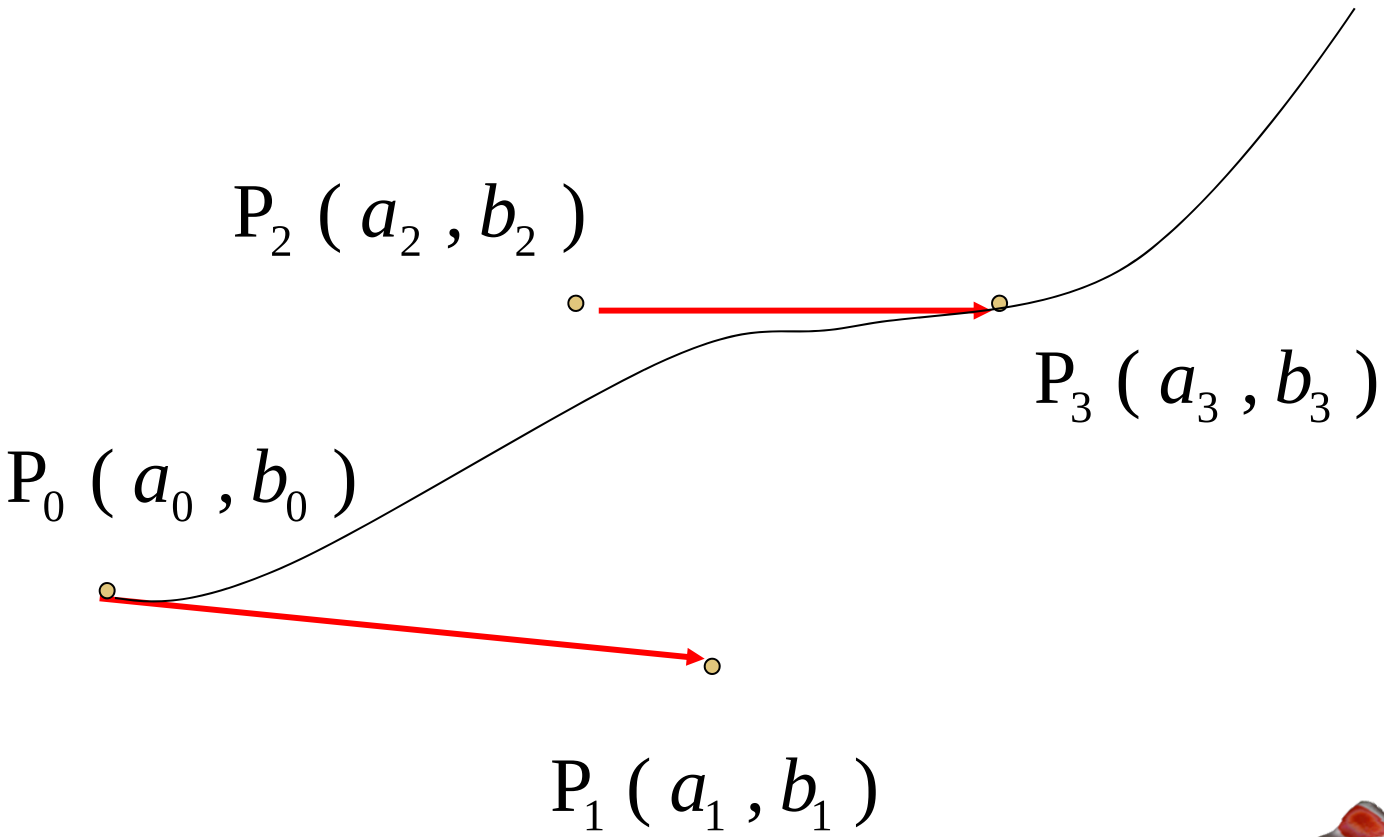
$$y = b_0(1-t)^3 + 3b_1t(1-t)^2 + 3b_2t^2(1-t) + b_3t^3$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = -3a_0 + 3a_1 \qquad \frac{dx}{dt}(1) = -3a_2 + 3a_3$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = -3b_0 + 3b_1 \qquad \frac{dy}{dt}(1) = -3b_2 + 3b_3$$

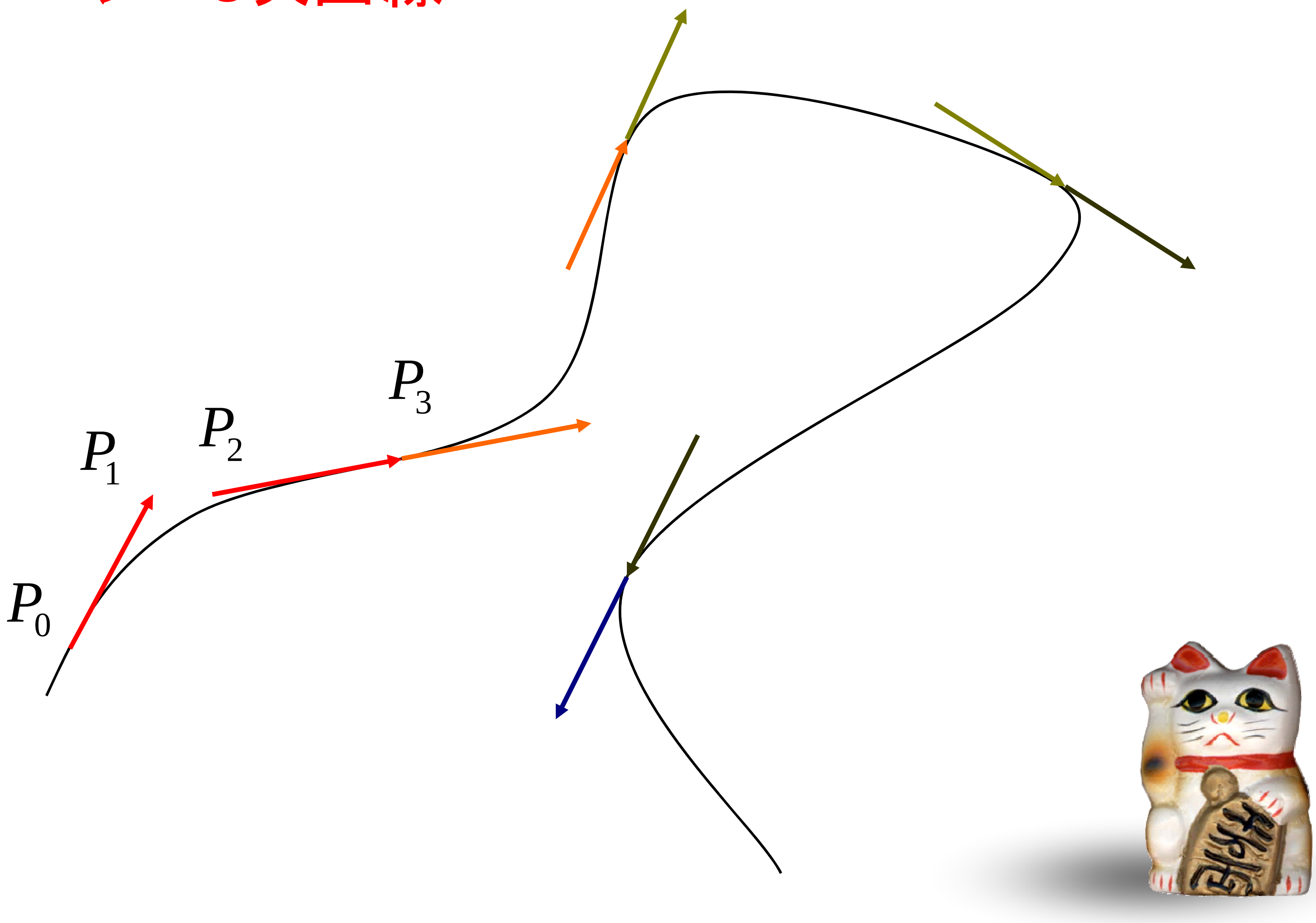
$t = 0$ における接線ベクトルは

$$-3\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$



$P_2\ (a_2, b_2)$
$P_3\ (a_3, b_3)$
$P_0\ (a_0, b_0)$
$P_1\ (a_1, b_1)$

ベジエ3次曲線



$$x = a_0(1-t)^3 + 3a_1 t(1-t)^2 + 3a_2 t^2(1-t) + a_3 t^3$$

$$y = b_0(1-t)^3 + 3b_1 t(1-t)^2 + 3b_2 t^2(1-t) + b_3 t^3$$

$$u^3 + 3uv^2 + 3u^2 v + v^3 = (u+v)^3$$

より

$$(1-t)^3 + 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) + t^3 = (1-t+t)^3 = 1$$

因数分解

$$x = a_0(1-t)^3 + 3a_1 t(1-t)^2 + 3a_2 t^2(1-t) + a_3 t^3$$

$$a = a\ (1-t)^3 + 3a\ t(1-t)^2 + 3a\ t^2(1-t) + a\ t^3$$

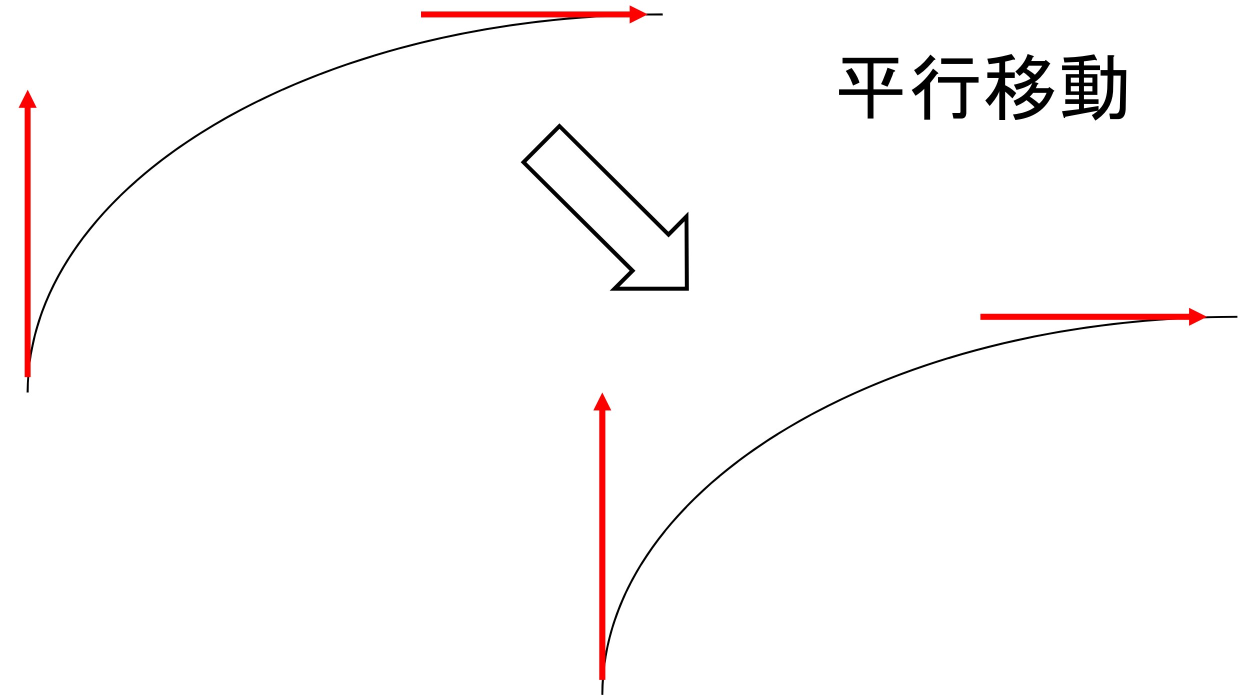
$$x - a =$$

$$(a_0 - a)(1-t)^3 + 3(a_1 - a)t(1-t)^2 + 3(a_2 - a)t^2(1-t) + (a_3 - a)t^3$$

$$y - b =$$

$$(b_0 - b)(1-t)^3 + 3(b_1 - b)t(1-t)^2 + 3(b_2 - b)t^2(1-t) + (b_3 - b)t^3$$

平行移動しても図形は変わらない



出典http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Avignon_Panorama.jpg&filetimestamp=20090930184559

Pierre Bézier
1910-1999

Photo from Systeme d'information sur le patronat français
http://sippaf.ish-
lyon.cnrs.fr/Database/Acteurs_fr.php?ID=AC000008168

まず歴史から学ぼう

- 元来私の教育主義は自然の原則に重きをおいて、数と理とこの二つのものを本にして、人間万事有形の経営はすべてソレカラ割り出して行きたい
- 都て事物を詮索するには、枝末を払いてその本源に遡り、止る所の本位を求めざるべからず。かくの如くすれば、議論の箇条は次第に減じて、その本位は益確実なるべし。

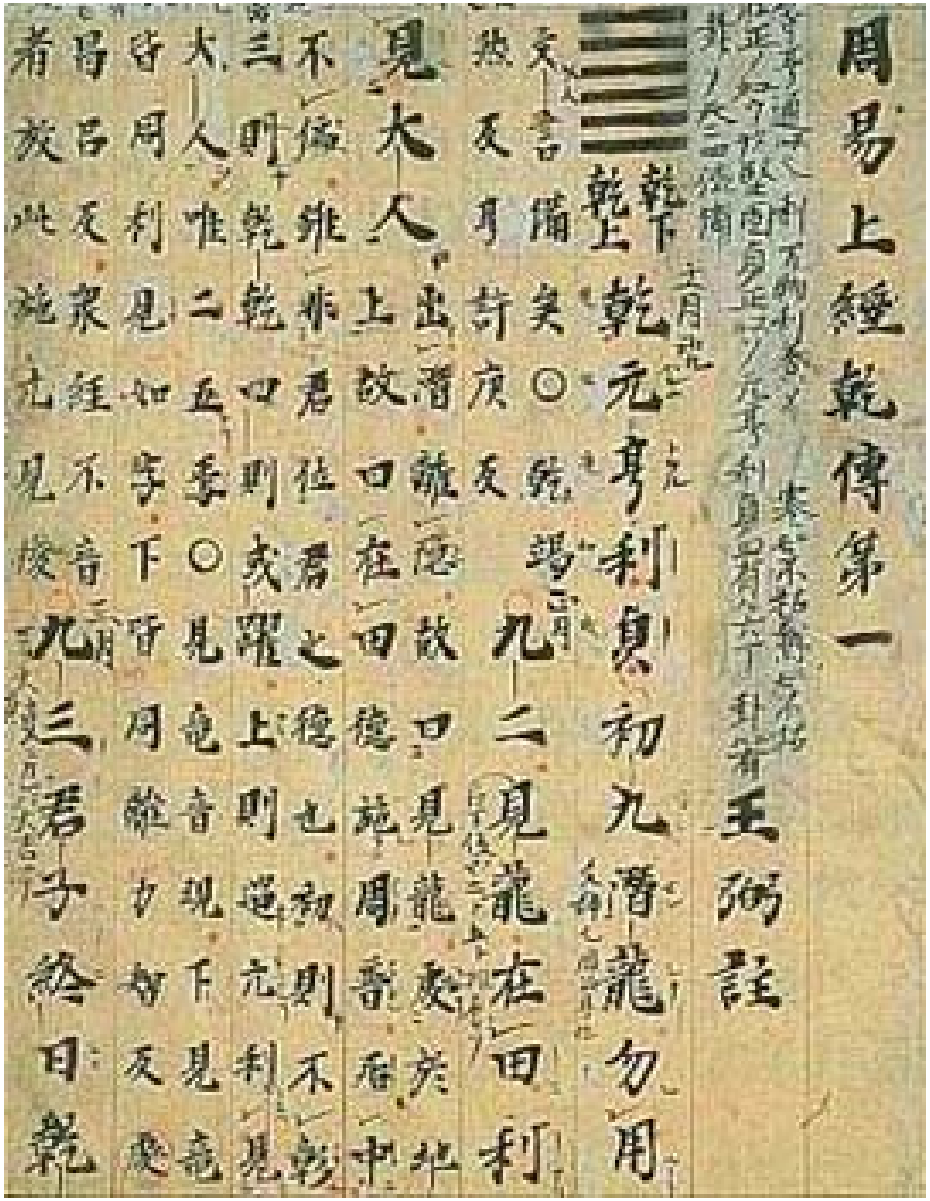
学ぶ、とはどういうことか

太極旗
太極と卦

䷊

泰

卦と爻



易经

學　　　　教

私は自分のもっている
ものしか教えることは
できないが、相手は、
それ以上のことを學ぶ
ことができる。

科学の発展

表示を変える
見方を変える

調和振動の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

単独2階微分方程式

$$v = \frac{dx}{dt}$$

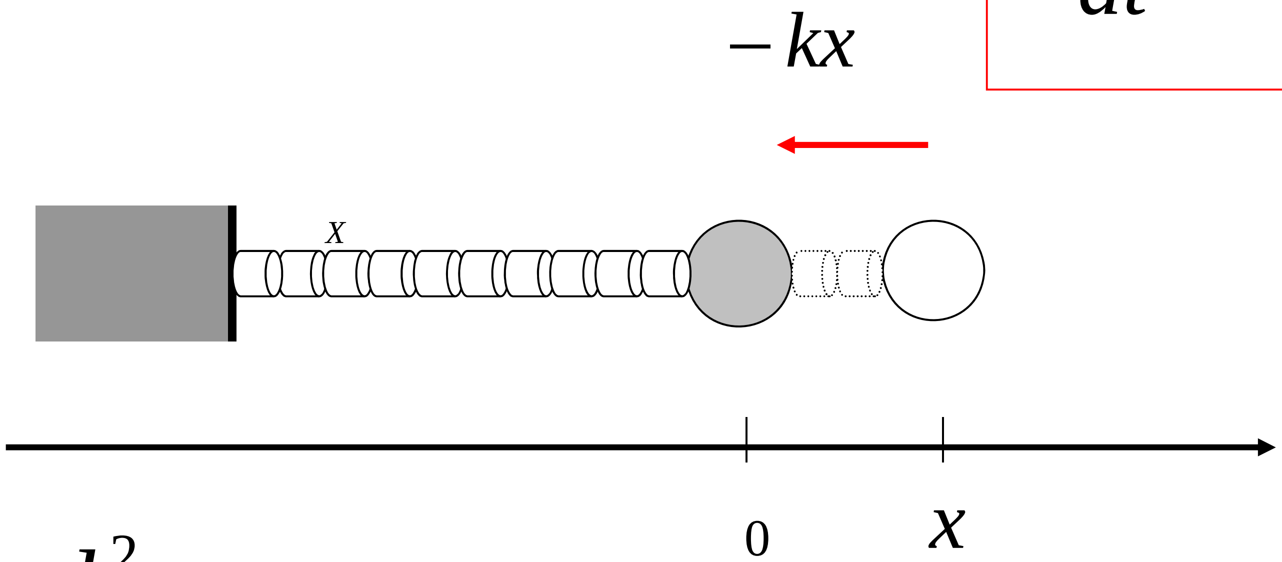
$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

連立微分方程式

フックの法則

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

全エネルギー

$$H = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

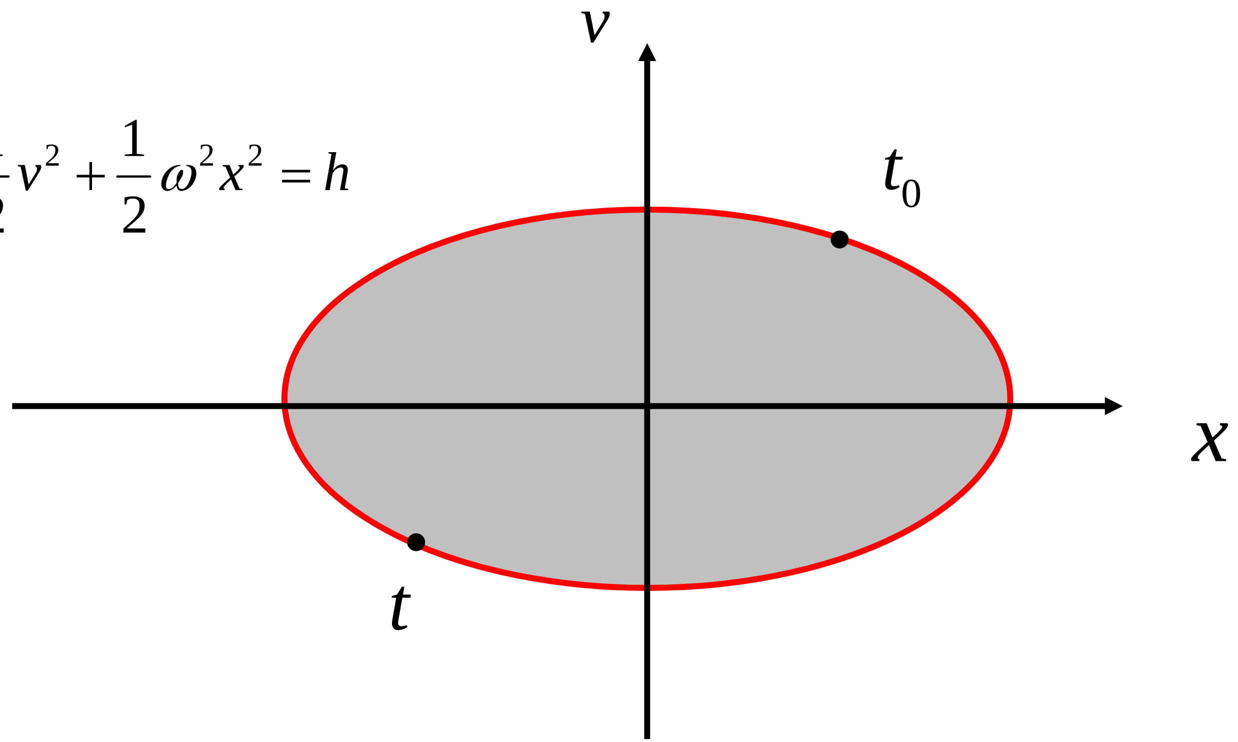
$$\frac{dH}{dt} = v\frac{dv}{dt} + \omega^2 x \frac{dx}{dt} = v(-\omega^2 x) + \omega^2 xv = 0$$

$$h = \frac{1}{2}v(t_0)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x(t_0)^2$$

$$\boxed{H = h}$$

$H = h$ は xv 座標平面内の楕円を表す

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = h$$



x 軸方向をみれば振動している

相空間という

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

力学の方程式の基本形

調和振動子　ものの見方を変える

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2$$

これは単なる記号で、関数 ψ に対して $H\psi$ だけが意味を持つと考える。

$$H\psi = -\frac{1}{2}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2\psi$$

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} x^2$$ $H\psi$ において

$$p^2\psi :\Rightarrow -\frac{d^2\psi}{dx^2} \qquad x^2\psi :\Rightarrow x^2\psi$$

x^2 は掛けられるだけだが p^2 は微分になる

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2$$

$$p :\Rightarrow \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$$

量子化、と言う

シュレーディンガー方程式

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2$$

$$\boxed{H\psi = E\psi}$$

バネの運動から
形式的にではあるが
量子力学
に発展している

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx < \infty$$

この条件を実現する E を固有値という

$$\psi_0 = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$\boxed{H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2}$$

$$H\psi_0 = \frac{1}{2}\psi_0$$

$$H\psi = E\psi \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx < \infty$$

が成り立つのは $E_n = \frac{1}{2} + n$ の場合だけ

$\psi_n = H_n(x)\psi_0$　　$H_n(x)$ は x の多項式

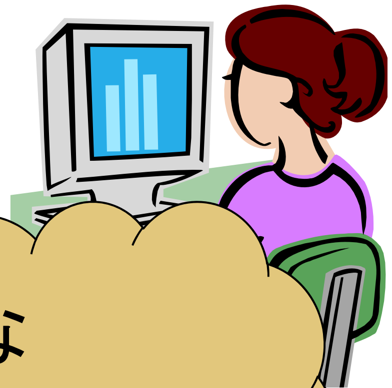
となる

若者に求められる能力

- 大学が求めるもの
- 企業が求めるもの

- 専門職能力
- 共通な能力

    コミュニケーション能



みんな
勝手なこと
言ってる！

プレゼンテーション

送り手

受け手

$$P = C \times T \times M$$

C	伝えたい内容	
T	伝える技術	$0 \leq T \leq 1$
M	受け手の意欲	$M \leq 1$

で、おまえはどうなんだ！

- 数学の中から問題を発見し数学を使って数学で表現している
- 普通の純粋数学者

（のつもり）

私の数学

可積分系
パンルヴェ方程式

少しだけ専門の話をしますと、

可積分系の理論です。

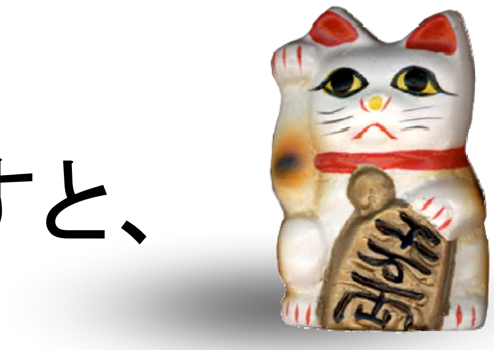
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x}$$

これは非線型の波を表す
KdV 方程式です。
津波に関係しています。

20世紀後半に、数学に新しい視点が
復活します。

標語的に言うと、
カオス、ソリトン、フラクタル
です。
KdV方程式はソリトン方程式です。

イメージをつかむため、
KdV方程式をデジタルで表すと、



0000111100 0011000010 0000000000 000000000

右側と左側はずっと**0**が並んでいる

<u>ルール</u>　左から順番に**1**を次の**0**の場所に移す。
空いた場所は**0**を書く。

0000111100 0011000010 0000000000 000000000
0000000011 1100110001 0000000000 000000000

箱球系のソリトン

0000111100 0011000010 0000000000 000000000
0000000011 1100110001 0000000000 000000000
0000000000 0011001110 1100000000 000000000

4個の固まりが追いついて

0000111100 0011000010 0000000000 000000000
0000000011 1100110001 0000000000 000000000
0000000000 0011001110 1100000000 000000000
0000000000 0000110001 0011110000 000000000

追い越す

0000111100 0011000010 0000000000 000000000
0000000011 1100110001 0000000000 000000000
0000000000 0011001110 1100000000 000000000
0000000000 0000110001 0011110000 000000000
0000000000 0000001100 1000001111 000000000

0000111100 0011000010 0000000000 000000000
0000000011 1100110001 0000000000 000000000
0000000000 0011001110 1100000000 000000000
0000000000 0000110001 0011110000 000000000
0000000000 0000001100 1000001111 000000000
0000000000 0000000011 0100000000 111100000

0000111100 0011000010 0000000000 000000000
0000000011 1100110001 0000000000 000000000
0000000000 0011001110 1100000000 000000000
0000000000 0000110001 0011110000 000000000
0000000000 0000001100 1000001111 000000000
0000000000 0000000011 0100000000 111100000
0000000000 0000000000 1011000000 000011110

2個の固まりが追いついて追い越す

0000111100 0011000010 0000000000 000000000
0000000011 1100110001 0000000000 000000000
0000000000 0011001110 1100000000 000000000
0000000000 0000110001 0011110000 000000000
0000000000 0000001100 1000001111 000000000
0000000000 0000000011 0100000000 111100000
0000000000 0000000000 1011000000 000011110
0000000000 0000000000 0100110000 000000001

状況が逆転している

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2y^3 + xy + \alpha$$

これはパンルヴェ方程式です。

Paul Painlevé
1863-1933

初めて飛行機に乗った数学者、
首相、大統領選挙は落選。

パンルヴェ方程式

- 微分方程式で定義される「新しい」超越関数を発見すること

  超幾何関数族や楕円函数族を含むこと

  対象は、「非線型可積分系」
- 一般化よりも特殊化を

  互いに双対だから同じこと
- しかし・・・

パンルヴェ方程式の歴史

- **1900**年頃　パンルヴェ方程式の発見
- **1907**年　　モノドロミー保存変形
- **1912**年　　ガルニエ系
- **1976**年頃　２次元イージング模型

  この頃から、ソリトン、カオス・・・

  非線型可積分系の復興

パンルヴェ方程式の現在

- 特殊関数として一応は認知された
- 物理数学先行、数学は？

  初期値空間の幾何学

  変換群とルート系

  特別解の構造
- ガルニエ系と野海・山田系への拡張

『純粋』数学と『応用』数学

- 数学を通したインターフェイスを数理科学と言うならば、純粋数学も応用数学もその一部で数学を構成している。
- 数学から外へ、すべての数学者が指向する必要はないけれど、孤立してはいけない。
- 数学を取り巻く世界が大切、

  応用研究も、そして教育も。

一番大切なこと！

あなたは
数学が好きですか？