学術俯瞰講義　～数学を創る～　第3回

数の体系を創る

ことばを創り、世界を創る

2009. 10. 22

数の体系

- 自然数　　$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
- 整数　　$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$
- 有理数　　$\frac{4}{3}, -\frac{7}{8}, 0, \ldots$
- 実数　　$\sqrt{2}, e = 2.7182818\cdots,$

  $\pi = 3.141592653\cdots, \ldots$
- 複素数　　$\sqrt{-1}, \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2},$

  $\cos\frac{2\pi}{7} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{7}, \ldots$

小学校では

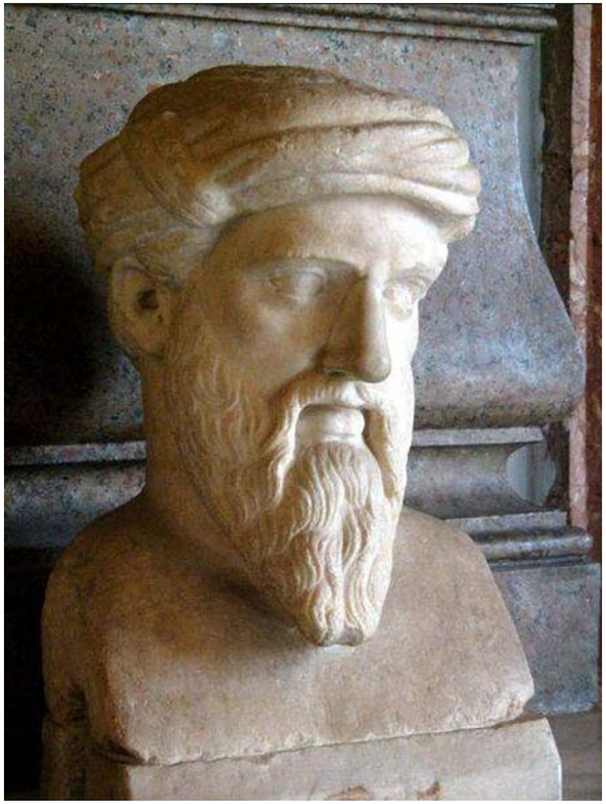
- 位取り　・・・ 小1～小4
- ０（をかけると0）　・・・　小3
- 分数 (整数から有理数へ)・・・　小4
- 小数（有理数から実数へ)・・・　小4
- 数直線（実数）　・・・　小4

中学校～

- 負の数(自然数から整数へ)･･･　中1
- 平方根(有理数から実数へ)･･･　中3
- 素数(整数)　･･･　中3
- $\sqrt{2}$ は有理数でない　･･･　高1
- 数学的帰納法(自然数)　･･･　高2
- 虚数（実数から複素数へ)･･･　高2
- 実数の定義　･･･　大1？

歴史的には

- 分数 ・・・ 古代メソポタミア
- $\sqrt{2}$ は無理数 ・・・ 古代ギリシャ
  ピタゴラス学派 （紀元前6世紀）
- 比の理論 ・・・ 古代ギリシャの実数論
  エウドクソス （紀元前４世紀）
- 位取り, 0 ・・・ インド（6世紀ころ）
- 負の数 ・・・ インド（7世紀ころ）



ピタゴラス（紀元前580?－497?)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg

歴史的には

- 小数 ・・・ 16世紀末
- 虚数 ・・・ カルダノ（1545）
- 代数学の基本定理 ・・・ ガウス（1799）

数学的には

- 自然数から整数へ　・・・　ひき算
- 整数から有理数へ　・・・　わり算
- 有理数から実数へ　・・・　長さ、面積
  微積分
- 実数から複素数へ　・・・　方程式の解

実数から複素数へ

- 3次方程式の解の公式

（カルダノの公式）

解が実数でも、

途中で虚数が必要

カルダノ (1501.9.24 - 1576.9.21)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cardano.jpg

カルダノの公式 (1535,1545)

- ３次方程式　　$X^3 = 3pX + q$

補助となる「2」次方程式

$$Y^3 + Z^3 = q,\ YZ = p$$

$$X = Y + Z,\ \omega Y + \omega^2 Z,$$

$$\omega^2 Y + \omega Z.\ (\omega^3 = 1)$$

カルダノの公式 (1535,1545)

- $X^3 = 15X + 4 = 3pX + q$

$Y^3 + Z^3 = q = 4,\ Y Z = p = 5$

$Y^3, Z^3 = 2 \pm 11\, i$

$X = Y + Z,$

$= (2 + i) + (2 - i) = 4$

実数から複素数へ

- 代数学の基本定理

（ダランベール・ガウスの定理）

方程式には必ず複素数の解がある

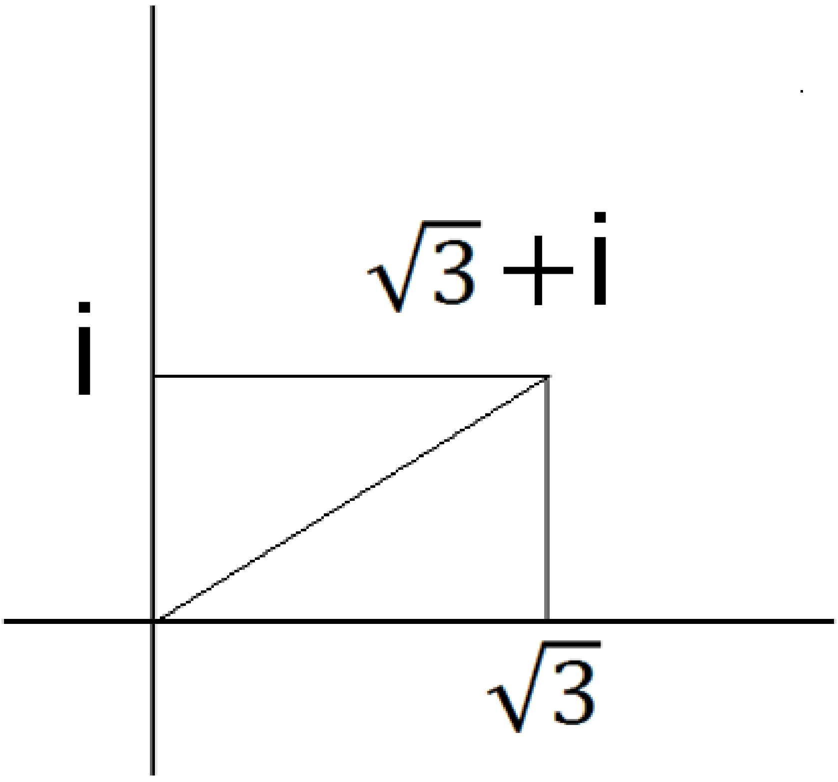
数の世界をこれ以上拡げる必要は
なくなった　（歴史の終わり？）

ガウス　(1777.4.30 - 1855.2.23)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

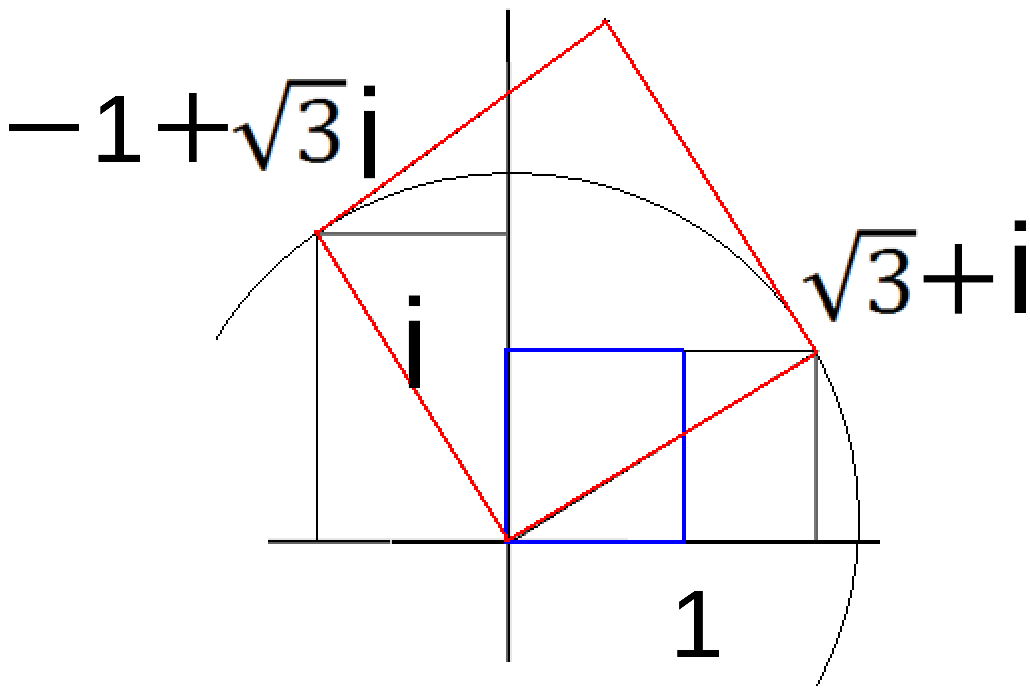
複素平面（ガウス平面）

- 複素数 ＝ 平面上の点



複素数　＝　平面上の点

- 複素数の積　：　回転して拡大



複素数と行列

$\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 倍 ： 1 を $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ に

i を $-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ に

$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ 倍：$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ に

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ に

複素数から四元数へ

- 複素数: $a + b\,i$ (a, b は実数)
- 四元数: $a + b\,i + c\,j + d\,k$

(a, b, c, d は実数)

（ハミルトン 1843.10.14）

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k$
- 交換法則はあきらめる

ハミルトン (1805.8.4 –1865.9.2)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:WilliamRowanHamilton.jpeg

19世紀後半

- 自然数の定義･･･

  ペアノの公理 (1891)

- 0 は自然数.
- n が自然数なら, n + 1 も自然数
- 0 = n + 1 とはならない
- n + 1 = m + 1 なら n = m
- 数学的帰納法の原理

ペアノ (1858.8.27 – 1932.4.20)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Giuseppe_Peano.jpg

19世紀後半

- 実数の定義　・・・

  カントル　集合論の創始者 (1872)

  デデキント　(1858.11.24)

数の世界の基礎が確立

（今度こそ歴史の終わり？）

カントル(1845.3.3 –1918.1.6)

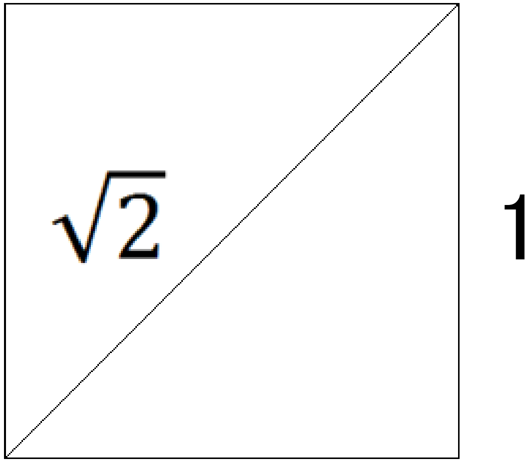
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Georg_Cantor.jpg

数学的には

- 自然数から整数へ　・・・　ひき算
- 整数から有理数へ　・・・　わり算
- 有理数から実数へ　・・・　長さ、面積
  微積分
- 実数から複素数へ　・・・　方程式の解

有理数から実数へ・・・長さ

正方形の1辺と対角線の長さの比$\sqrt{2}$は



有理数ではない

$\sqrt{2}$は有理数ではない

$\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$ （既約分数）とすると、

$2m^2 = n^2$ → nは偶数　$n=2n'$

$m^2 = 2n'^2$ → mも偶数

→ 矛盾

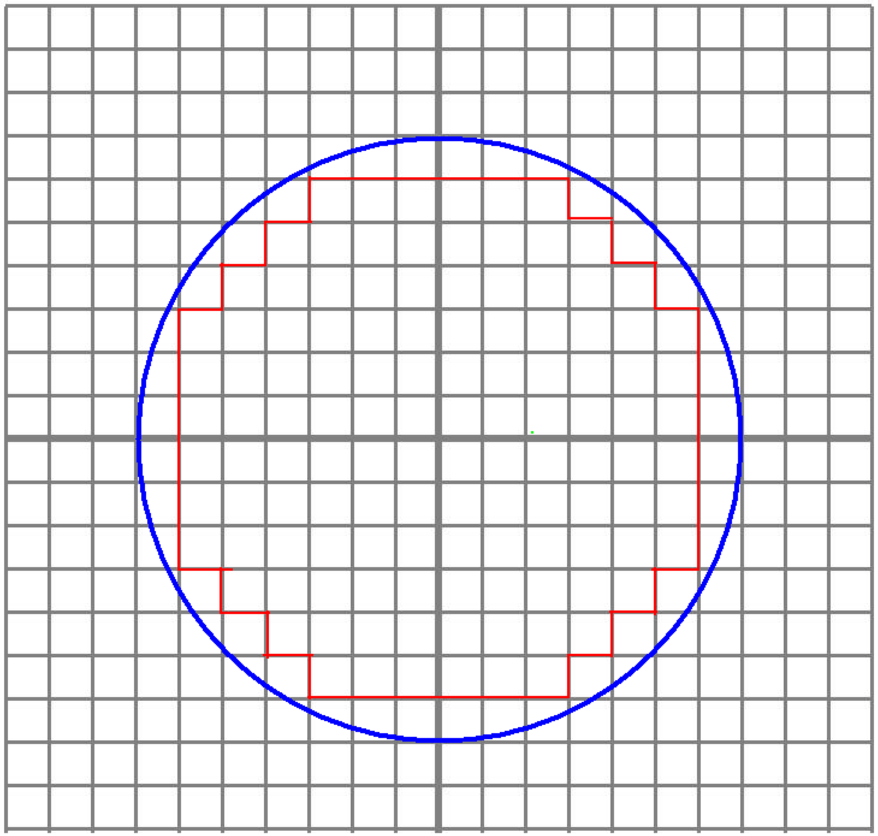
有理数から実数へ・・・面積

- 円の面積

□の数×□の面積

□を細かくした極限

円の面積



有理数から実数へ･･微積分, 極限

- 指数関数　$(e^x)' = e^x$, $e^0=1$,

$e = 2.7182818\cdots$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \cdots$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

実数とは何か

- 直線上の点
  - ・直線上の点とは何か・・・実数

    循環論法

- 有理数の極限
- （無限）小数で表わせる数

斎藤　毅

すべての道は素数へ続く

　3世紀以上もの間、数多くの数学者を退け続けてきたフェルマーの最終定理がついに証明されたことが話題になったことを覚えている方も多いだろう。これが解決されたからといって、整数に関する問題がすべて明らかになったということではない。しかしこの成果は、人間がこれまでに築きあげてきた、数に対する理解の1つの頂点を示すものである。それは同時に、整数のこれからの発展への展望を切りひらくものでもある。

　フェルマーの最終定理そのものは中学生にも説明できるといわれるように、数論では、誰もが知っている数の性質を探求する。しかし、問題が素朴だから簡単だというわけではない。素朴にみえる問題の難しさは、手がかりが見えないところにある。19世紀の数学界に君臨したガウスは、数論を「数学の女王」と呼んだ。それは、数論それ自体の魅力とともに、数学を1つに結びつける数論のもつ力をさすものだろう。数学の1つの分野での発見は、数に対する理解への隠されていた手がかりとして、数論の進展につながるのである。

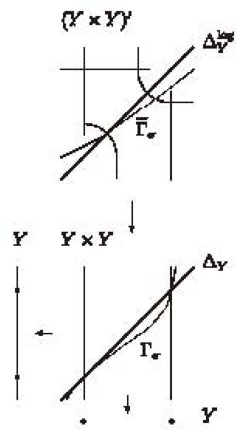
　人類の数に対する理解は、数の世界を広げることで進んできた。1つ、2つと数えることではじまる自然数から、引き算で整数へ、割り算で分数へという具合である。それに対し、ふつうの数と思われている実数は、数直線上の点としてとらえられる。これがあまりに自然な考え方だったため、そのほんとうの意味が明らかにされたのは、19世紀も終わりに近づいてからだった。

　このように数の世界を広げる方法が認識されると直ちに、同じようにして数の世界を広げる方法がいくらでもあることが発見された。2, 3, 5, 7, …と、素数がいくらでもあることは、古代ギリシャのユークリッド「原論」で証明されていることだが、その素数1つ1つに、2進数の世界、3進数の世界、…という数の体系が見いだされた。フェルマーの最終定理が20世紀に証明できたのは、整数を2進数、3進数、…と考えることが、整数を実数と考えるのと同じくらい自然なことであり、重要なことであるということがわかったからだ、ということができる。

　19世紀の解析学の大きな成果である関数論は、素数の分布の研究に応用され、現代数学の最大の未解決問題とよばれるリーマン予想を生み出した。20世紀の抽象数学の花形である代数幾何は、ヴェイユ予想の解決をもたらし、素数を「点」と考える視点が確立した。群の無限次元表現論は、類体論の非可換化を可能にし、現代の数論の中心的問題であるラングランヅ対応へと導いた。フェルマーの最終定理の素朴さの影に隠されていた手がかりは、このラングランヅ対応だった。

　この、代数幾何を使って整数論を研究する数論幾何が、私の研究分野である。これは、p進体、代数幾何、ガロワ表現が交錯する活発な研究領域である。数のもつ隠された対称性は、ガロワ群の中に読み取ることができる。ガロワ群と代数幾何は、ヴェイユ予想の証明を可能にしたエタール・コホモロジーによって結びついている。この結びつきを通して、両者の関わりを調べる、幾何的な分岐理論が専門である。ラングランヅ対応と分岐理論の関係についての研究は、現在世界的に活発に研究が進んでいるp進局所ラングランヅ対応への契機を与えるものとなった。

　数論と微分方程式は、一見かけ離れているように見えるが、グロタンディークらによるエタール層の理論と、佐藤幹夫、柏原正樹らによって創始された微分方程式のD加群の理論の間には、表面的なものにとどまらない密接な類似がある。この数年は、超局所解析と分岐理論の類似を研究し、特性多様体の定義やオイラー数の公式などの成果があがっている。



http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/gcoe/summary/documents/pamphlet_Part16.pdf

数の体系を創る

- 人類の数に対する理解は、数の世界を広げることで進んできた。
- １つ、２つと数えることではじまる自然数から、引き算で整数へ、割り算で分数へという具合である。
- それに対し、ふつうの数と思われている実数は、数直線上の点としてとらえられる。
- これがあまりに自然な考え方だったため、そのほんとうの意味が明らかにされたのは、19世紀も終わりに近づいてからだった。

エウドクソスの比の理論 （量の理論）

- 量の比(実数)を、

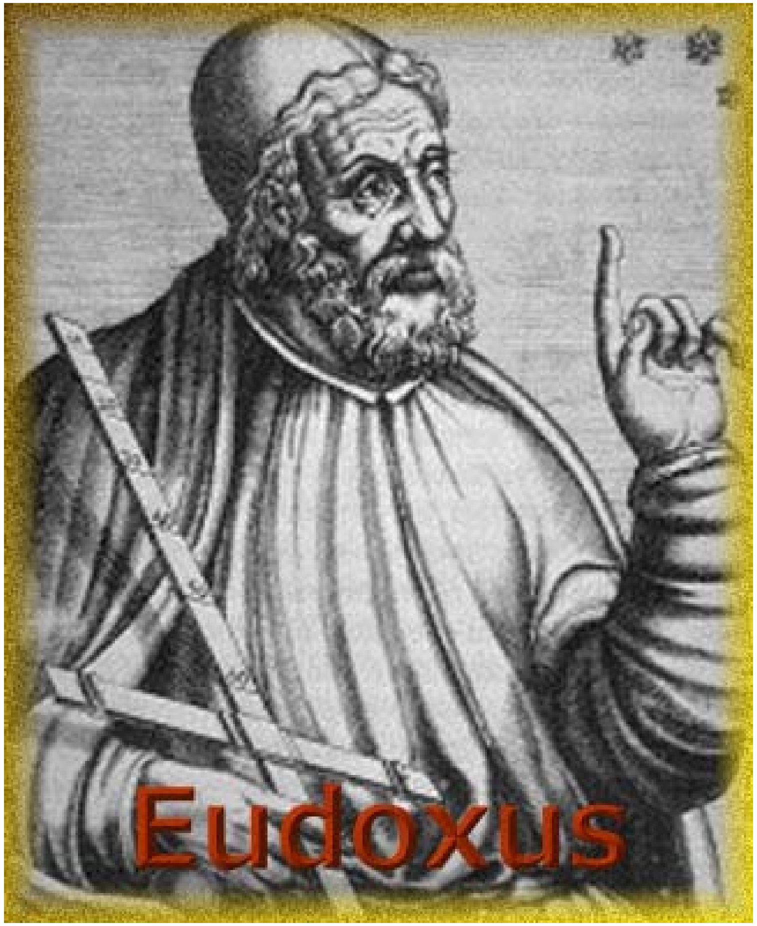
  整数をもとにして扱う方法

- A : B = a : b とは、

  どんな自然数 m, n > 0 に対しても,

  $mA > nB \iff ma > nb$

  $mA < nB \iff ma < nb$



エウドクソス？（紀元前400? - 350?）

デデキントの切断 (1858.11.24)

- 実数を有理数を元にして扱う方法
- 実数 x とは　有理数の集合

  $\{r \mid r$ は有理数で、$r < x\}$　のこと
- したがって、実数の等式 $x = y$　とは、

どんな有理数 r に対しても

$$r < x \Longleftrightarrow r < y$$

となること

http://ja.wikipedia.org/wiki/ファイル:Dedekind stamp.jpg

デデキント(1831.10.6 – 1916.2.12)

１ ＝ ０．９９９９９９・・・・

の理由は、

どんな有理数ｒに対しても

ｒ＜１ $\Longleftrightarrow$ ｒ＜０．９９９９９９・・・・

だから

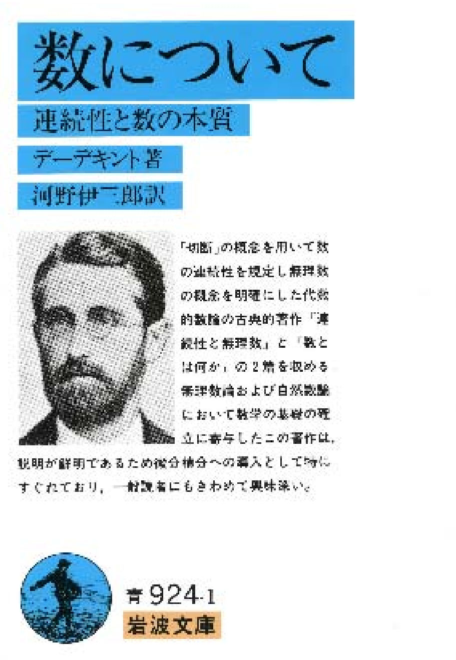
読書案内

- 彌永昌吉
  『数の体系(上・下)』 岩波新書
- 吉田洋一
  『零の発見』 岩波新書
- デデキント
  『数について』 岩波文庫

彌永 昌吉(著)
『数の体系 上』
岩波書店(1972/03)

彌永 昌吉(著)
『数の体系 下』
岩波書店(1978/04)

吉田 洋一(著)
『零の発見—数学の生い立ち』
岩波書店(1986/11)



デーデキント (著),
河野 伊三郎 (翻訳)
『数について—連続性と数の本質』
岩波書店(1961/01)

数の体系 (19世紀)

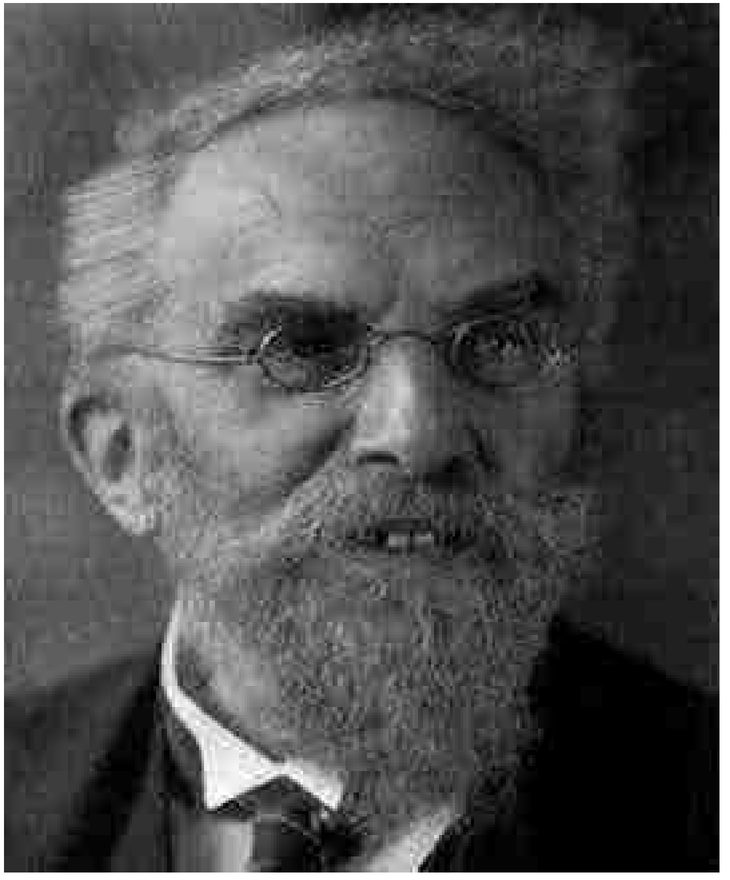
- 自然数　$0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$
- 整数　$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots.$
- 有理数　$\frac{4}{3}, -\frac{7}{8}, 0, \ldots.$
- 実数　$\sqrt{2}$, $e = 2.7182818\cdots$,

  $\pi = 3.141592653\cdots, \ldots.$
- 複素数　$\sqrt{-1}, \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2},$

  $\cos\frac{2\pi}{7} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{7}, \ldots.$

新しい数の世界の発見 (1897)

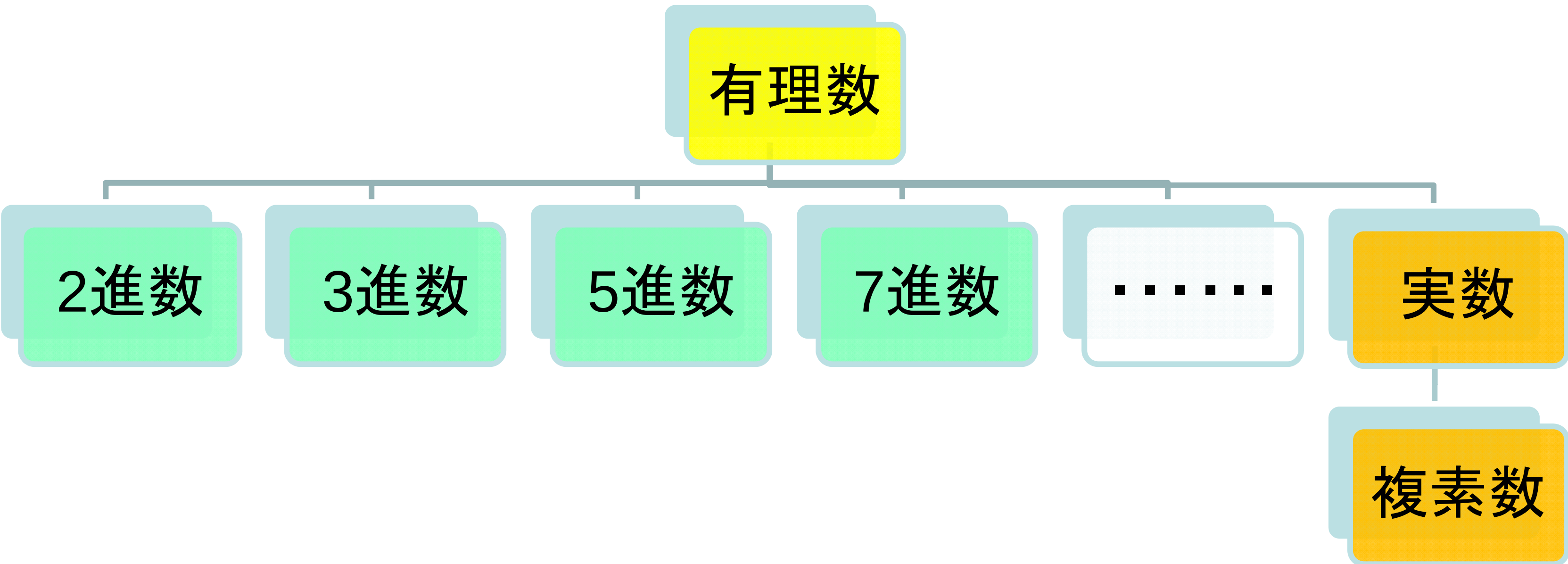
- 有理数を基礎に実数を構成
  （デデキント、カントル）
- 数の世界を拡大する方法の発見
- 同じ方法を使って、
  有理数の世界を違った方向へ拡大
  整数論の大革命 （ヘンゼル）



http://paginas.fe.up.pt/~sam/homepage/inftheory.htm

ヘンゼル (1861.12.29–1941.6.1)

数の体系　（1897以降）



数の世界を拡大する方法

- 実数とは、有理数の極限

（カントル1872）

- 素数 p = 2, 3, 5, 7, ･･･　ごとに,

１つずつ極限の定め方（位相）があり,
数の体系が構成できる

（ヘンゼル1897）

このほかの方法はない（オストロフスキ）

極限の定め方・・・位相

- 実数

  $1,\ 0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ \cdots\cdots \quad \to \quad 0$

- 7 進数

  $1,\ 7,\ 49,\ 343,\ 2401,\ \cdots\cdots \quad \to \quad 0$

7 進数 ・・・ 7倍すると$\frac{1}{7}$に縮む世界

- （整数全体の集合）　を　7倍すると

  （7の倍数全体の集合）.

- （整数全体の集合）　を　7等分

  （7の倍数全体の集合）,

  （7でわると1あまる整数全体の集合）,

  ・・・・・・・・

  （7でわると6あまる整数全体の集合）.

数の世界をひろげる意味

- 方程式が解けやすくなる

$$x^2 - a = 0 \quad (a \text{ は整数})$$

- 有理数としては,

- ａ を素因数分解してみないと わからない.

数の世界をひろげる意味

$$x^2 - a = 0$$

- 実数としては,

$a > 0$ なら解けて

$a < 0$ なら解けない

数の世界をひろげる意味

$$x^2 - a = 0$$

- 7進数としては、

a を7で割ったあまりが,

$1 = 1^2$, $2 = 3^2 - 7$, $4 = 2^2$

ならば解ける(ヘンゼル)

3, 5, 6 なら解けない

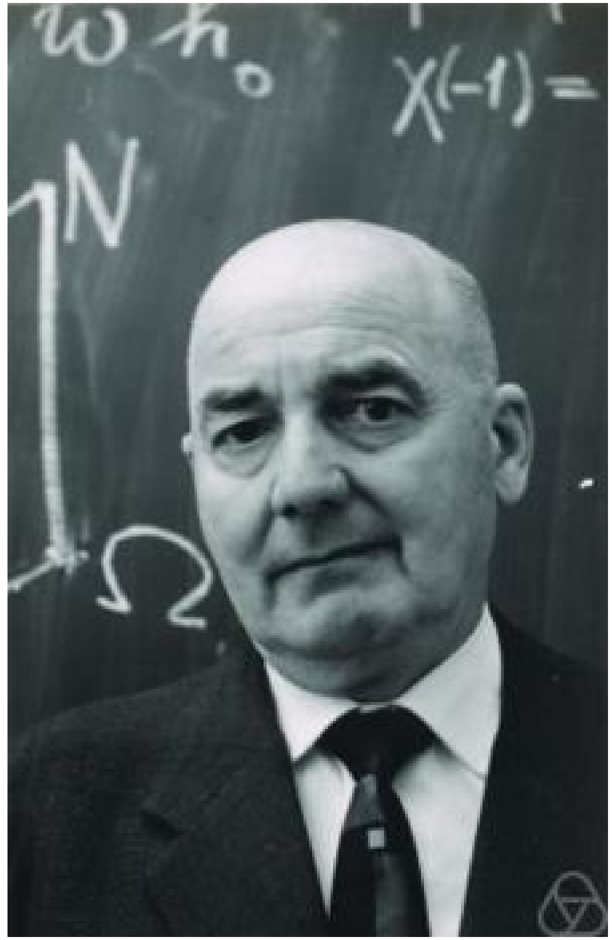
局所大域原理 (ハッセ原理 1921）

2次式については,

- 有理数として解ける

$$\Updownarrow$$

- すべての素数pに対しp進数として解けて、
- 実数としても解ける

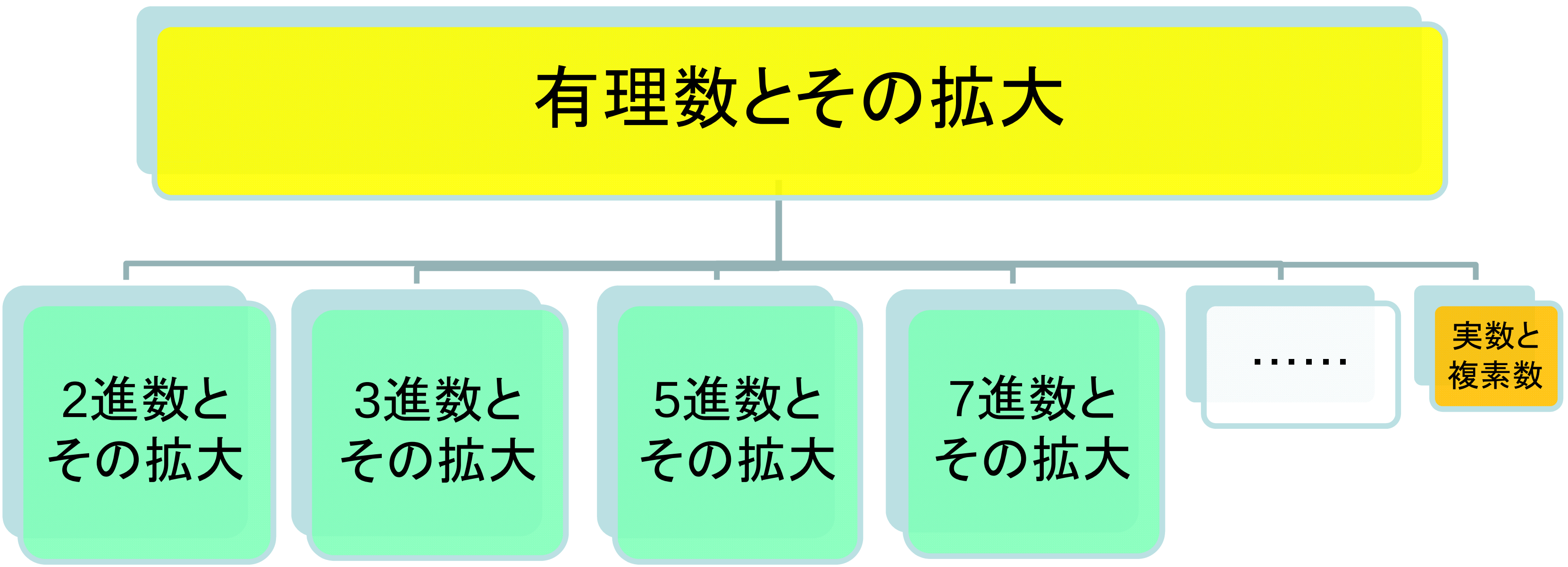


(c)Konrad Jacobs

ハッセ　(1898.8.25–1979.12.26)

http://ja.wikipedia.org/wiki/ファイル:Helmut_Hasse.jpg

数の体系(20世紀前半)



- フェルマーの最終定理も解けるような、
  現代の数論の基本的な枠組みが、創られた。