学術俯瞰講義　～数学を創る～　第4回

数と図形の共進化

ことばを創り、世界を創る

2009. 10. 29

数論幾何 の 確立（20世紀後半）

- $X^n + Y^n = Z^n$ のような

整数係数の 方程式で定義される

図形 の研究

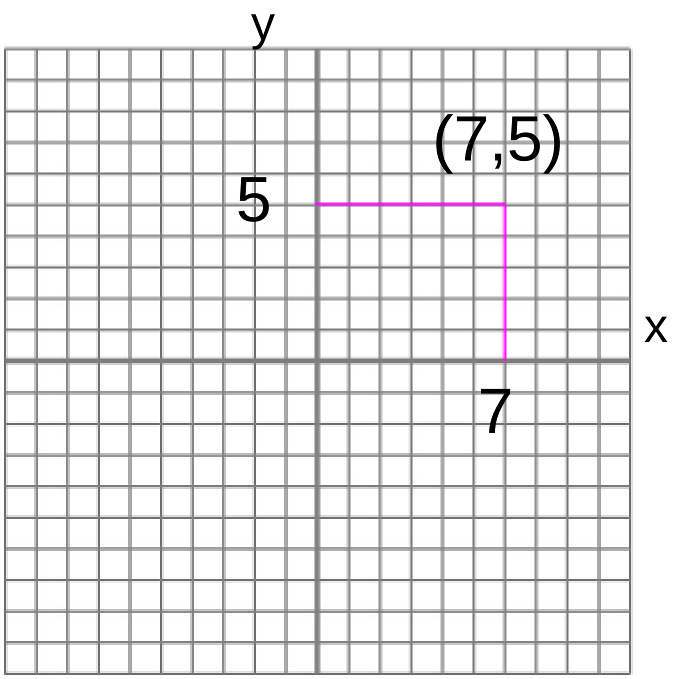
あるいは

- そのような 図形を用いた

整数の性質 の研究

数と図形のつながり—座標

- 数と図形は
  同じものの
  うらおもて



デカルト 1637『方法序説』

デカルト (1596.3.31 - 1650.2.11)

高次元空間

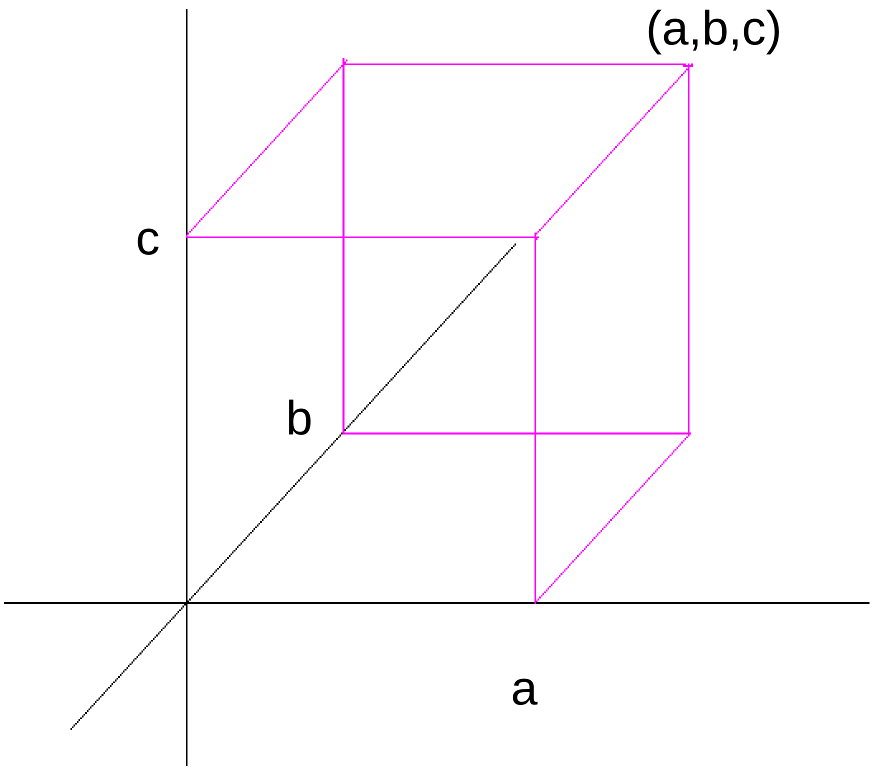
- n>3でも

n個の 数の組

$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$は

n次元空間の

点を表わす



高次元空間＝「線形代数の世界」

- 目にはみえない
- 基本的には 連立一次方程式

線形代数に 帰着

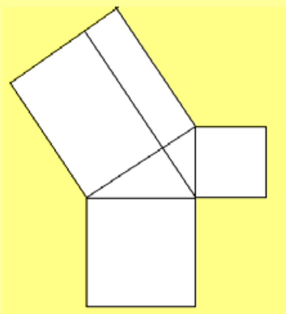
//

数学的には 解決済

幾何学での パラダイム・シフト

平面や空間内の

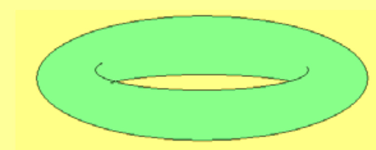
図形



研究対象

空間

そのもの



リーマン　1854

『幾何学の基礎にある仮説について』

楕円曲線とフェルマーの最終定理

- n = 3, 4の場合
  楕円曲線を定める方程式
  $y^2 = x^3 - x$ (フェルマー),
  $y^3 = x^3 - 1$ （オイラー）
  の有理数解を調べて証明

- nが5以上の素数の場合
  楕円曲線を定める方程式 $y^2 = x\,(x-a^n)\,(x-c^n)$
  そのものの非存在を示して証明

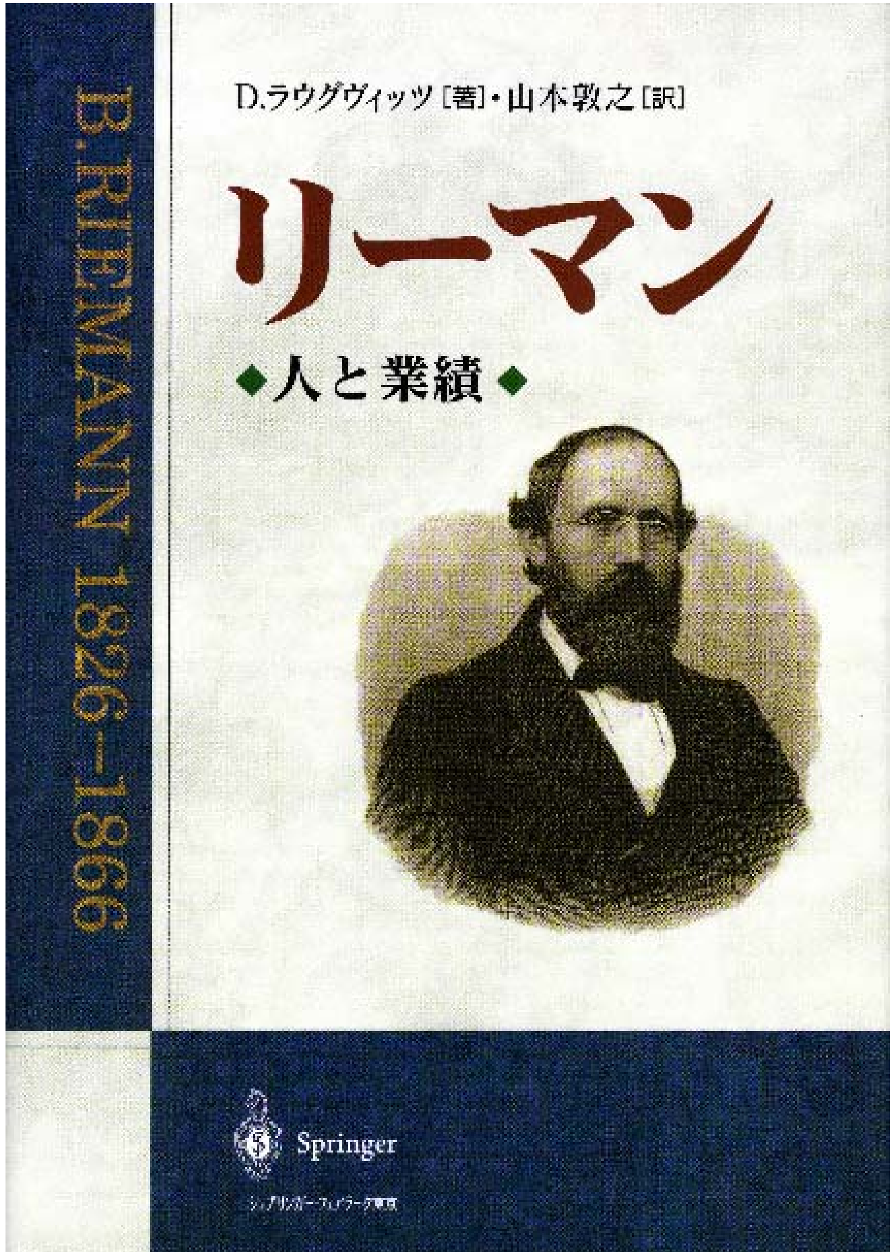
リーマン (1826.9.17 - 1866.7.20)

読書案内（伝記編）

・ラウグヴィッツ

『リーマン　人と業績』

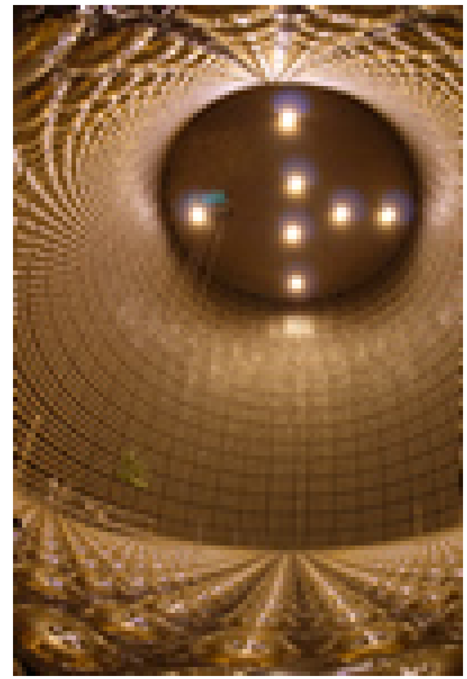
シュプリンガー東京



- リーマン—人と業績 (単行本) D. ラウグヴィッツ (著), D. Laugwitz (原著), 山本 敦之 (翻訳)
出版社: シュプリンガー･フェアラーク東京 (1998/02)

物理学での パラダイム・シフト

量子力学



素粒子

スーパーカミオカンデ

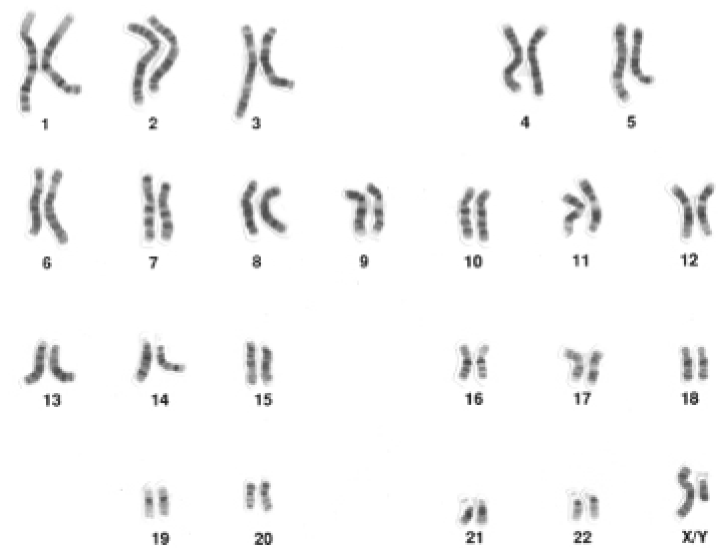
‡ 岩手県立総合教育センター
「動画から作成できる静止画（例）」の上から2番目の写真
http://www1.iwate-ed.jp/tantou/joho/material/tajuurokou/index.htm

‡ 写真提供：東京大学宇宙線研究所
神岡宇宙素粒子研究施設
http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/gallery/index.html
No.SK3-11　光電子増倍管取付ほぼ完了２

生物学での パラダイム・シフト

分子生物学

出典：
http://ja.wikipedia.org/wiki/ファイル:Hauskatze_in_Abendsonne.jpg

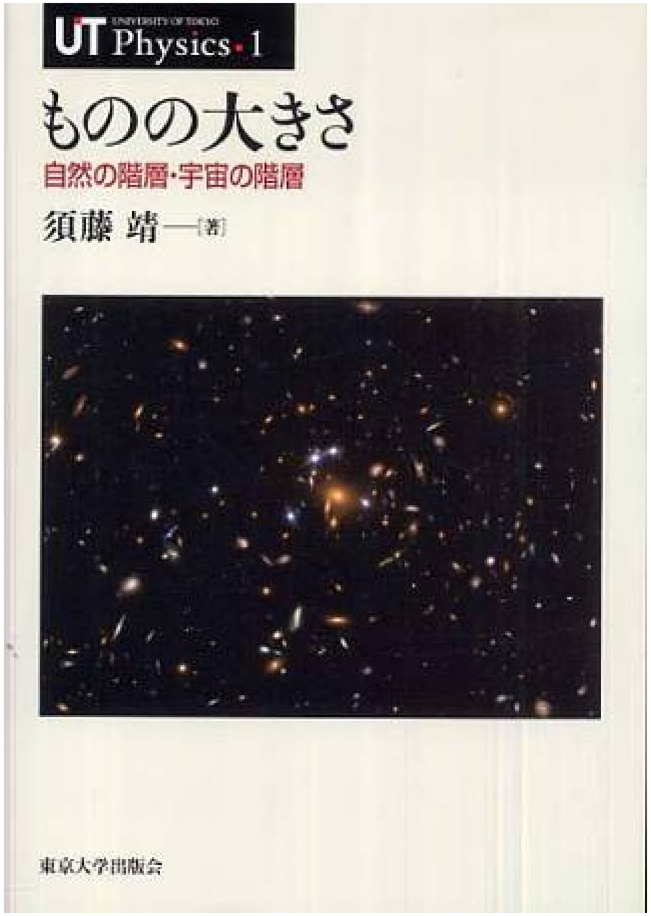


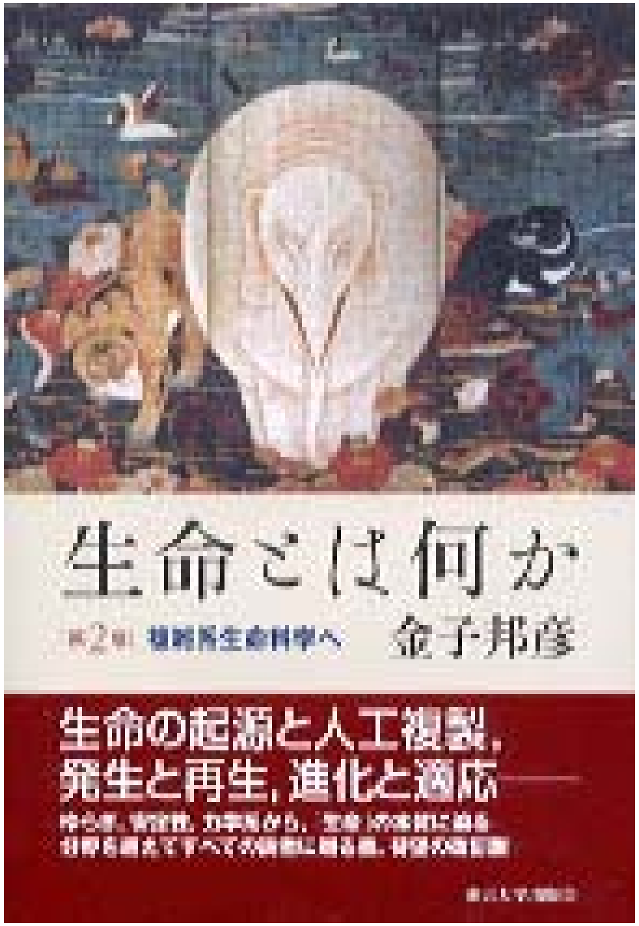
遺伝子

読書案内（他分野編）

- 須藤　靖
  『もののの大きさ』
  東京大学出版会

- 金子邦彦
  『生命とは何か　第2版』
  東京大学出版会





‡ ものの大きさ—自然の階層・宇宙の階層 (UP Physics) (単行本)
須藤 靖 (著)　東大出版会

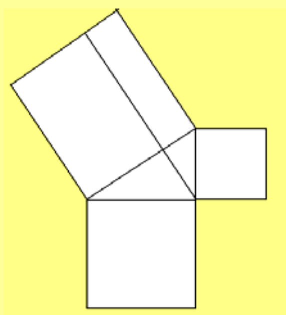
‡ 生命とは何か—複雑系生命科学へ (単行本)
金子 邦彦 (著)
出版社: 東京大学出版会; 第2版版 (2009/02)

幾何学での パラダイム・シフト

現代数学

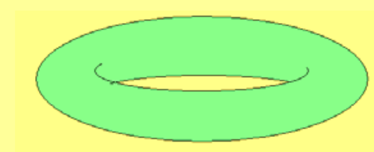
平面や空間内の

図形



空間

そのもの



多様体

幾何学のパラダイム･シフトは どこから来た？

- リーマン面
- ガウスの曲面論
- 非ユークリッド幾何
- 物理学

…………

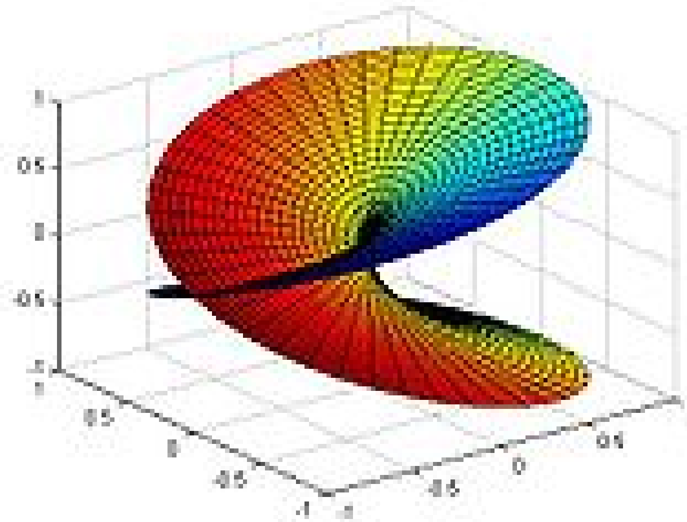
多価関数（矛盾を含む名前）

- 関数：点（＝変数の値）ごとに
  値が１つ決まる規則
- ｚの 平方根
  ｚが 実数　　　正のほうを考える
  ｚが 複素数　　２つのうち、
  どっちをとるか、決めようがない

リーマン面

- 複素平面を、
  平面が2枚重なったものと考える
  1枚めでは$\sqrt{z}$　2枚めでは$-\sqrt{z}$

- 2枚が、実は
くっついている



出典：　http://ja.wikipedia.org/wiki/ファイル:Riemann_sqrt.jpg

関数概念の 確立

- 複素平面の「２重」被覆を考える：

　「多価」関数（矛盾を含む名前）の解消

- 「２重」被覆は複素平面から
　　はみだしたもの　＝　リーマン面

ガウスの曲面論

曲面の幾何的性質で、
外側の３次元空間とは
無関係なものの発見

空間を 研究？

- 対象の記述

  既知の空間内の 図形ではないもの

  どう 創るのか？

- 研究方法

  空間を 理解するとは 何か？

数学の ことば としての 集合

- 集合を元あるいは点とする集合として

新しい対象を 創る

「現代数学」の成立　＝

「集合と位相」を基礎とした「数学」

自然科学 の ことば としての 数学

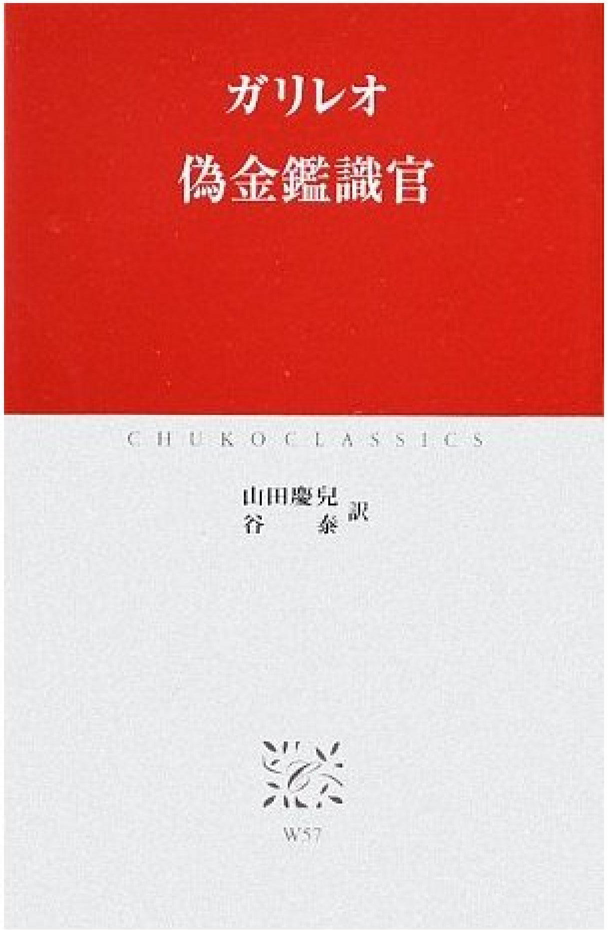
- 自然という書物は、
  数学のことばで書かれている.
  ガリレオ『偽金鑑識官』
- 現代数学は、
  集合のことばで書かれている.

読書案内（古典編）

・ガリレオ

『偽金鑑識官』

中公クラシックス



ǂ 偽金鑑識官 (中公クラシックス) (単行本)
ガリレオ (著), Galileo Galilei (原著), 山田 慶兒 (翻訳), 谷 泰 (翻訳)
出版社: 中央公論新社 (2009/05)

パラダイム･シフト

常識的な考え方：

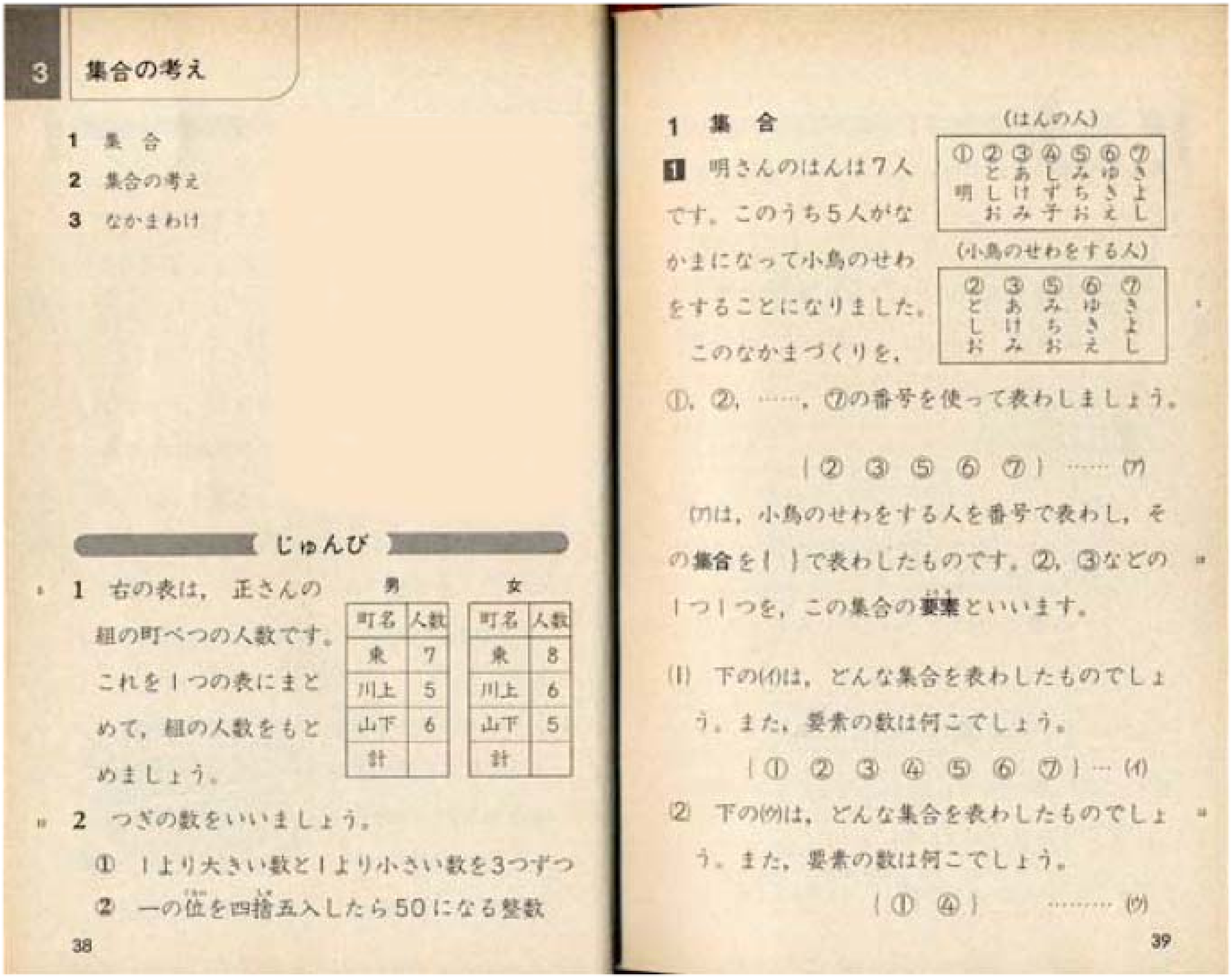
時代とともに変わる

時代はどう変わっていくのか：

世代が代われば、

新しい考えが常識になる

数学教育 の「現代」化 （1971-79）



3 集合の考え

1 集 合
2 集合の考え
3 なかまわけ

じゅんび

1 右の表は，正さんの組の町べつの人数です。これを１つの表にまとめて，組の人数をもとめましょう。

男

町名	人数
東	7
川上	5
山下	6
計	

女

町名	人数
東	8
川上	6
山下	5
計	

2 つぎの数をいいましょう。

① １より大きい数と１より小さい数を３つずつ
② 一の位を四捨五入したら５０になる整数

38

1 集 合

1 明さんのはんは７人です。このうち５人がなかまになって小鳥のせわをすることになりました。

（はんの人）

① 明
② としお
③ あけみ
④ しず子
⑤ みちお
⑥ ゆきえ
⑦ きよし

（小鳥のせわをする人）

② としお
③ あけみ
⑤ みちお
⑥ ゆきえ
⑦ きよし

このなかまづくりを，①，②，……，⑦の番号を使って表わしましょう。

｛② ③ ⑤ ⑥ ⑦｝……(ア)

(ア)は，小鳥のせわをする人を番号で表わし，その**集合**を｛ ｝で表わしたものです。②，③などの１つ１つを，この集合の**要素**といいます。

(1) 下の(イ)は，どんな集合を表わしたものでしょう。また，要素の数は何こでしょう。

｛① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦｝…(イ)

(2) 下の(ウ)は，どんな集合を表わしたものでしょう。また，要素の数は何こでしょう。

｛① ④｝ ………(ウ)

39

‡ 教科書いまむかし「高学年における集合」
http://www.dainippon-tosho.co.jp/math_history/history/age03_el/age03_el_03.html#main
大日本図書（株）

デデキントの切断 (1858.11.24)

- 実数を有理数を元にして扱う方法
- 実数 x とは　有理数の集合

  $\{r \mid r$ は有理数で、$r < x\}$　のこと

- したがって、実数の等式 $x = y$　とは、

どんな有理数 r に対しても

$$r < x \Longleftrightarrow r < y$$

となること

多様体 ＝ 幾何学の対象

既知の空間を はりあわせる

⇓

新しい空間を 創る

多様体 ＝ 幾何学の対象

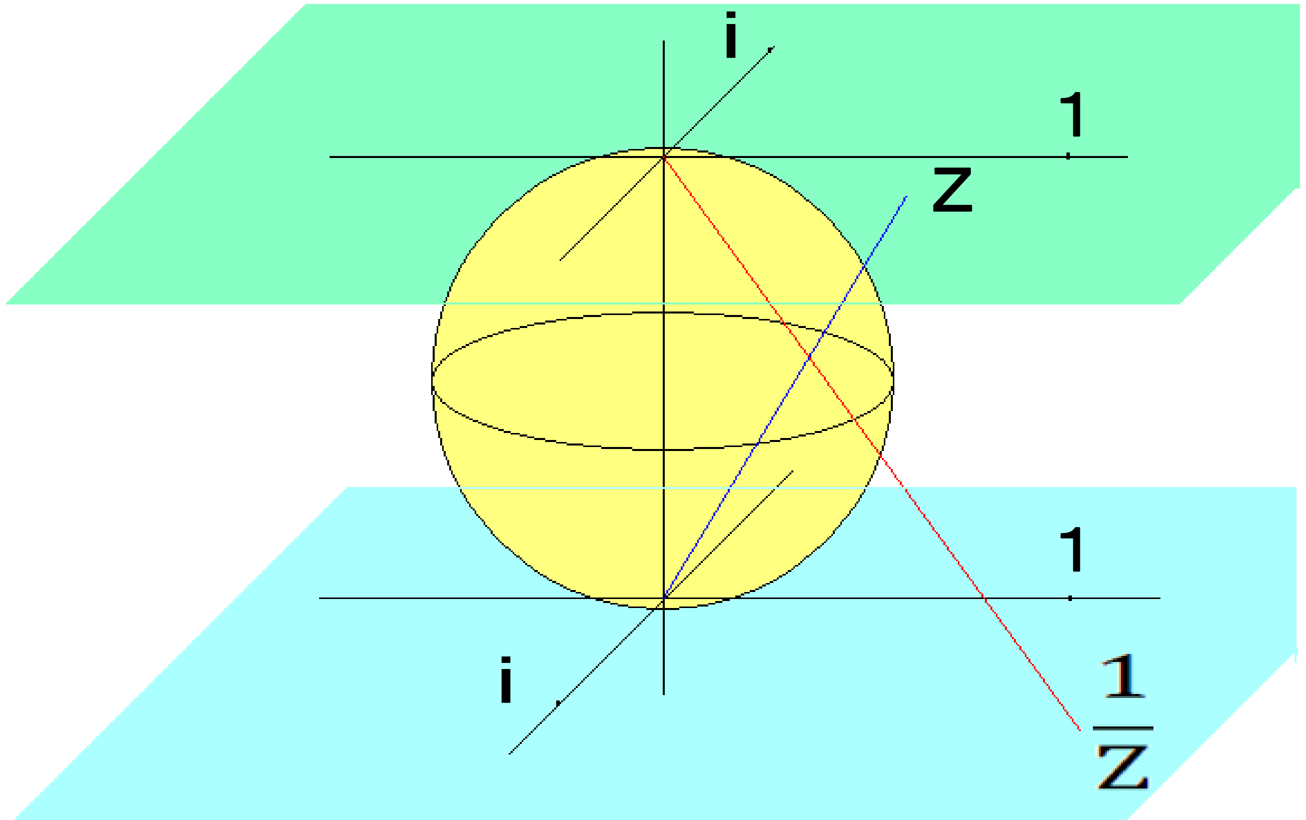
- 座標の定まったn次元

空間 R^n の中に収まらない空間

- アインシュタインの宇宙：

　一般相対性理論(1916）の基礎

リーマン球面



不変量 ＝ 幾何学の方法

次元のように,

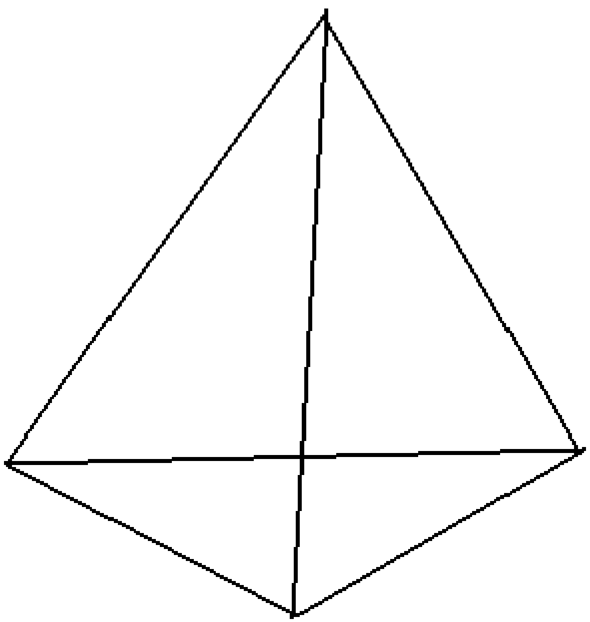
空間の構成や表示に関わらず,

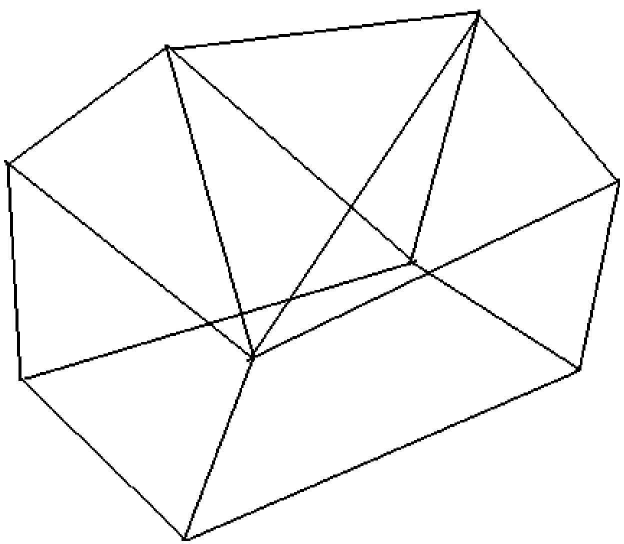
同じ空間に対しては同じ値

不変量で空間を識別

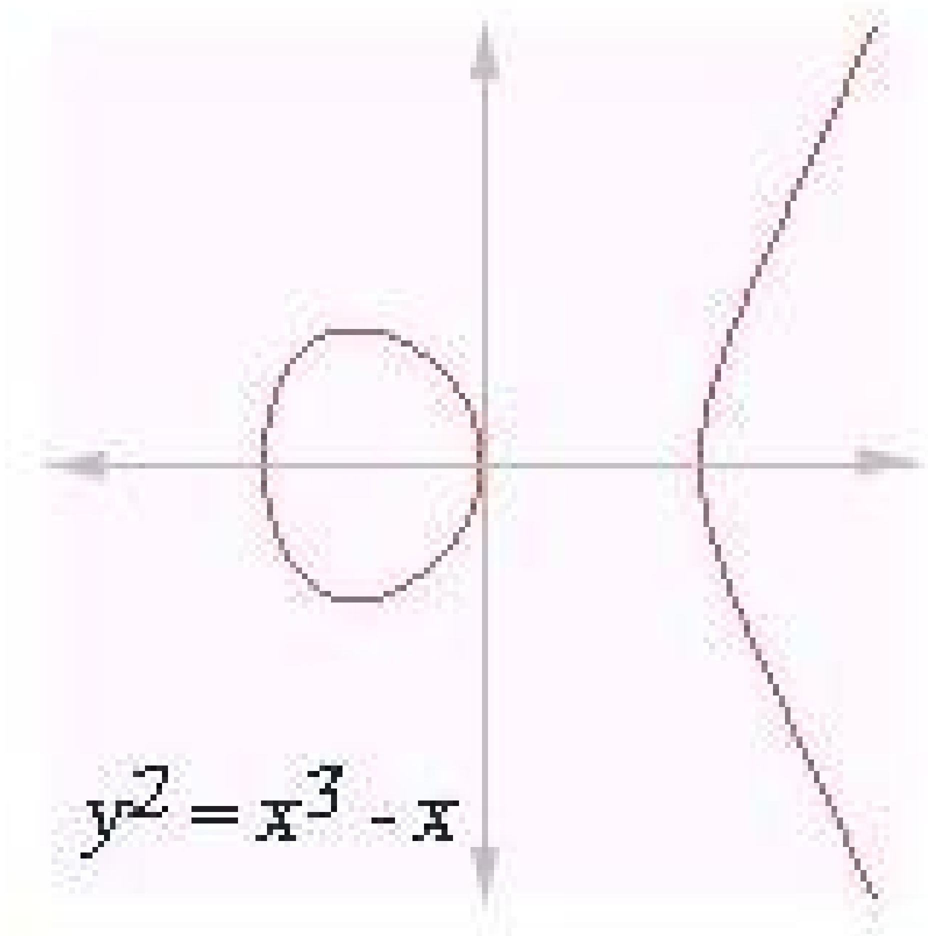
多面体のオイラー数

- （頂点の数）ー（辺の数）＋（面の数）
- $4-6+4=2 \qquad 9-16+9=2$





楕円曲線



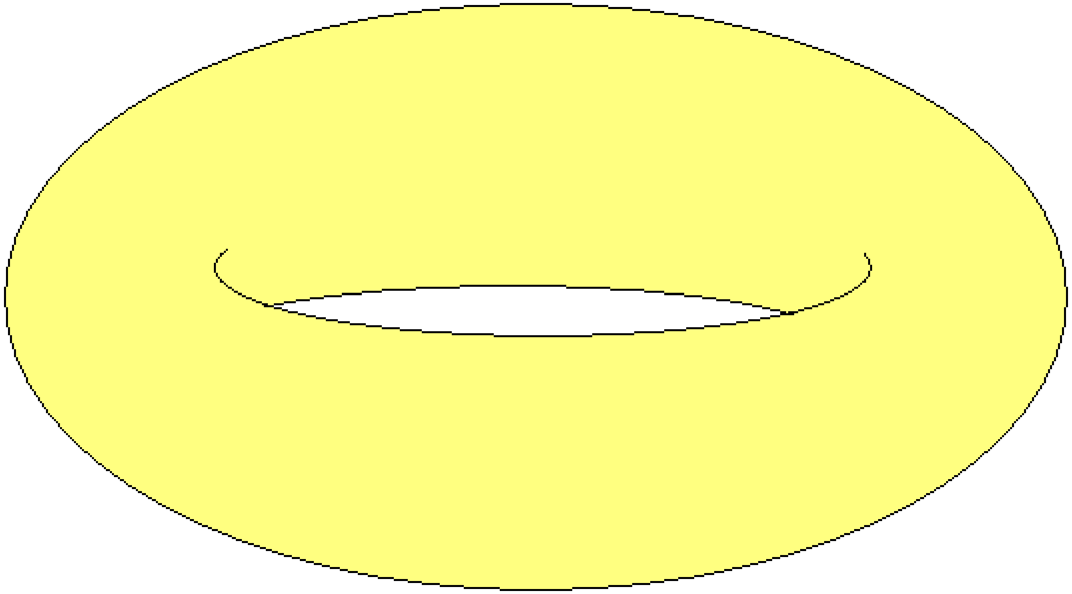
x , y

は実数

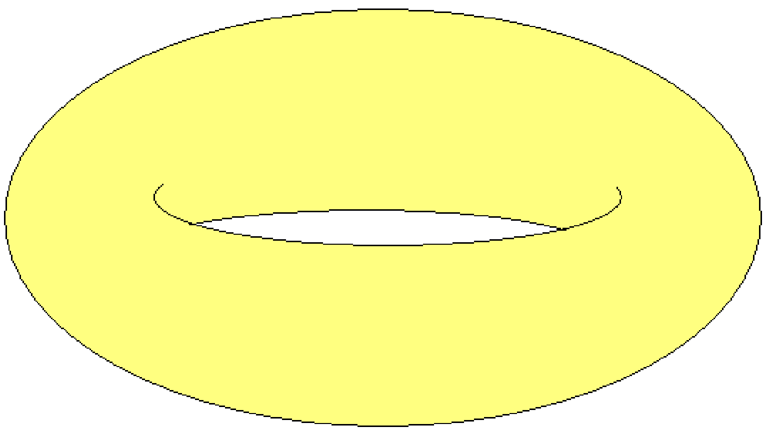
出典:http://ja.wikipedia.org/wiki/ファイル:ECexamples01.png

リーマン面としての楕円曲線

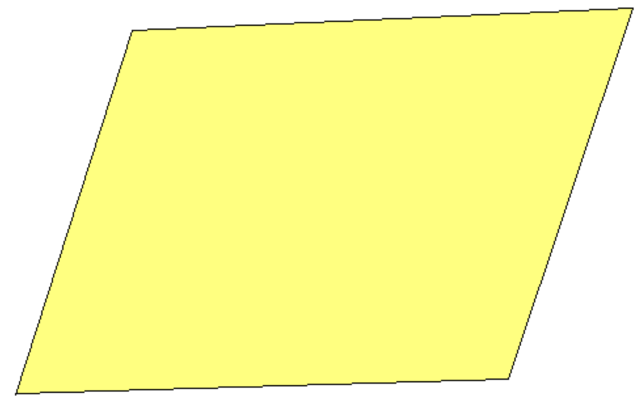
- $y^2 = x^3 - x$　　　　　x, y は複素数



楕円曲線



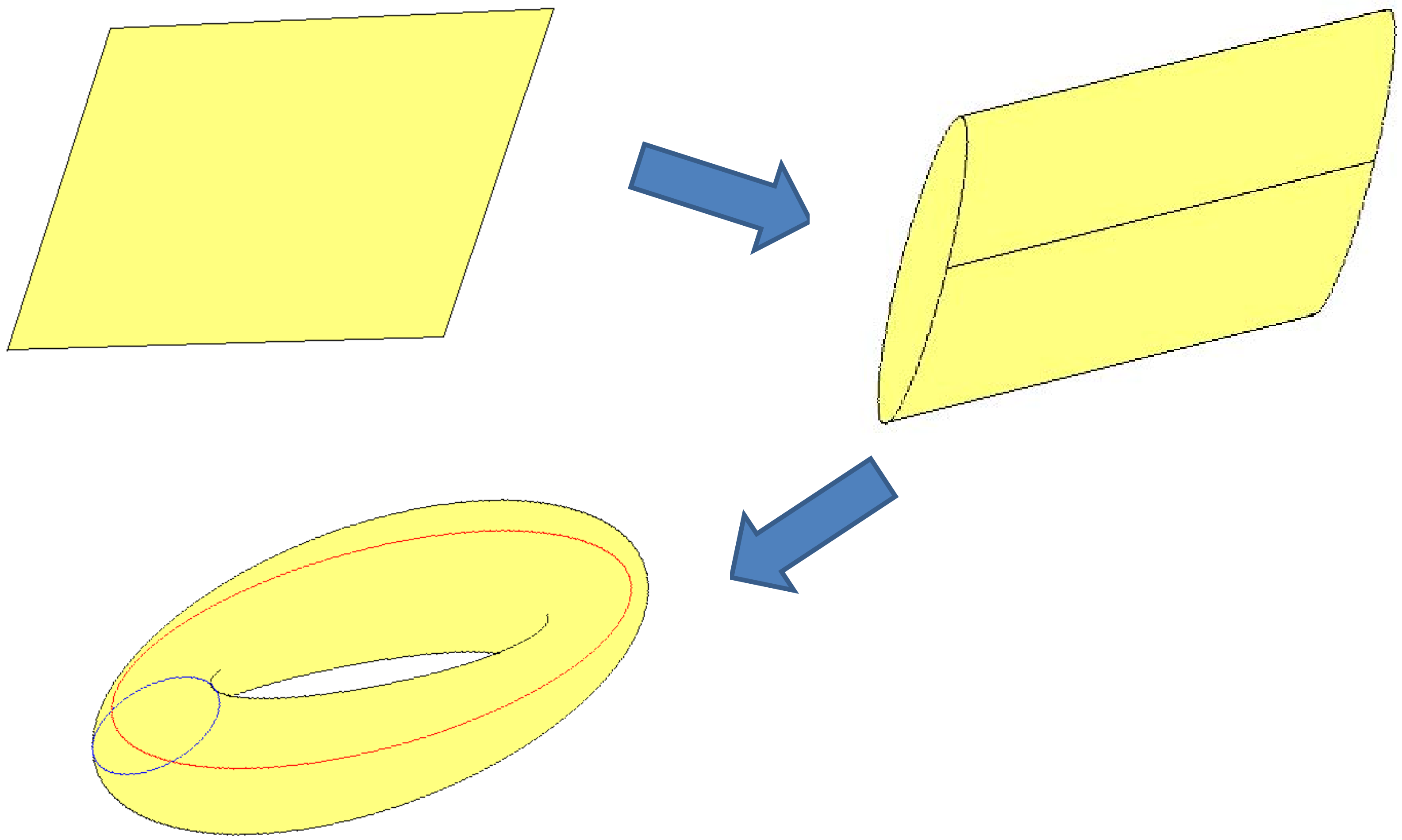
＝



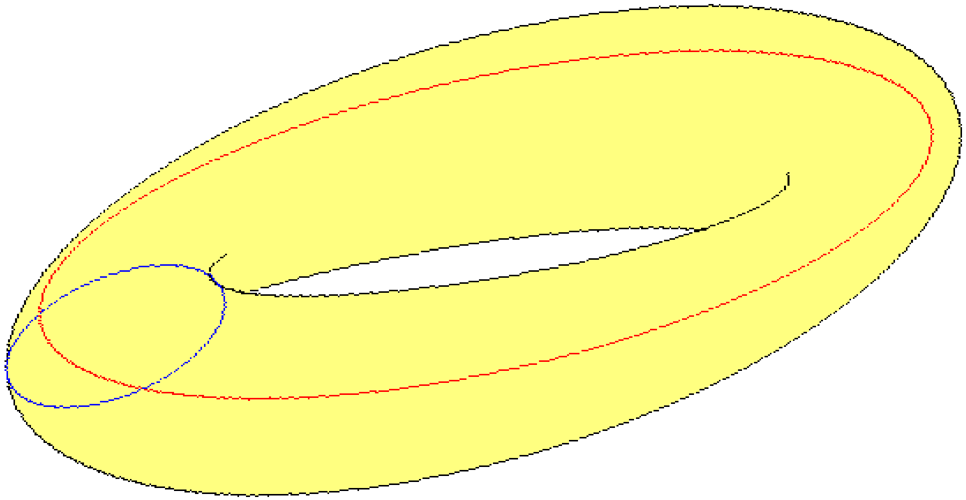
の対辺どうしを

くっつけたもの

楕円曲線のオイラー数



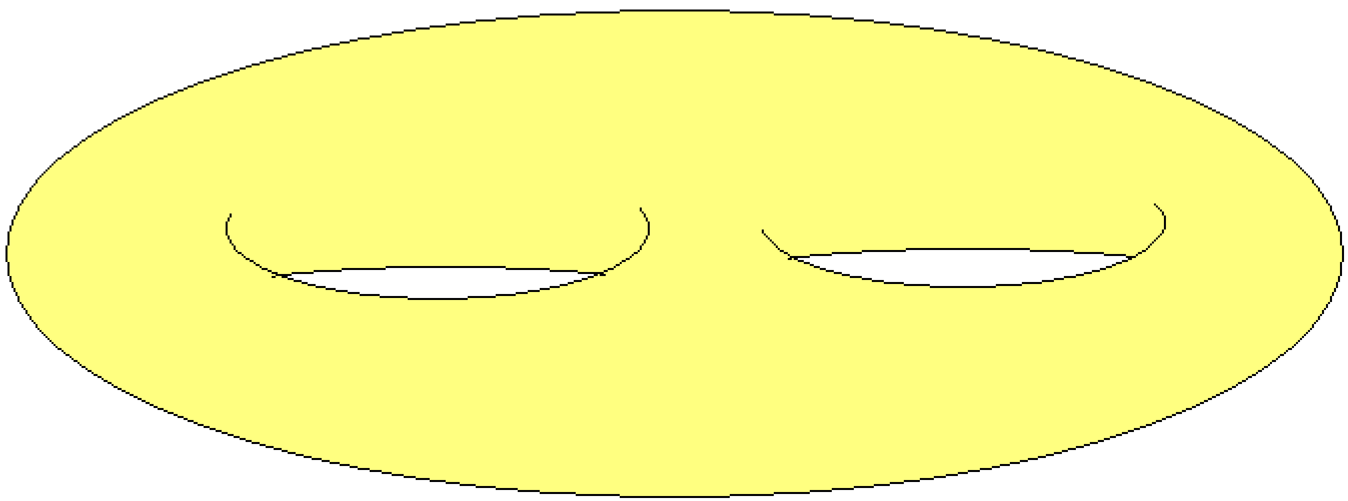
楕円曲線のオイラー数



1 － 2 ＋ 1 ＝ 0

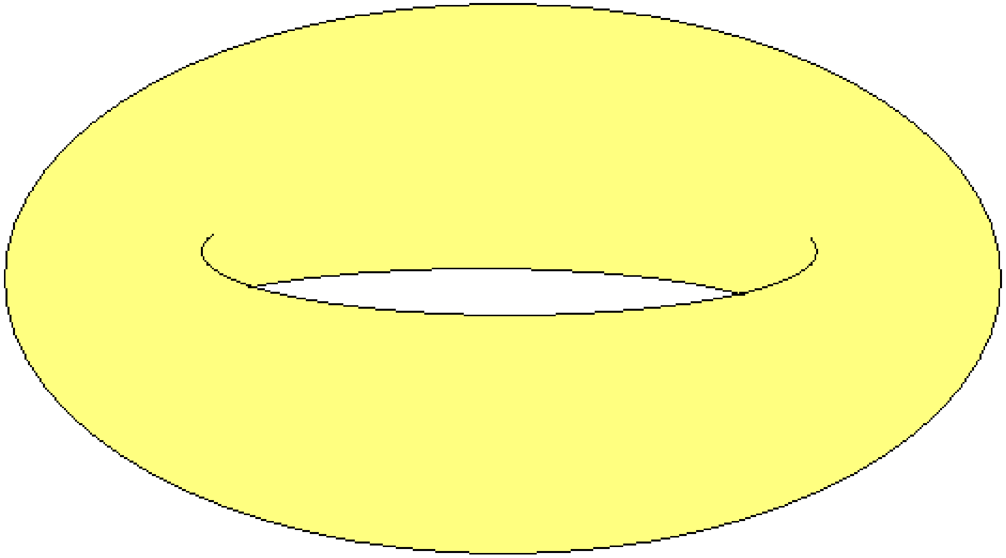
リーマン面のオイラー数

2－2g　　　　　　g：種数



g=2

楕円曲線＝種数1のリーマン面



種数0のリーマン面 ＝ リーマン球面

ホモロジー

- 種数gのリーマン面　X

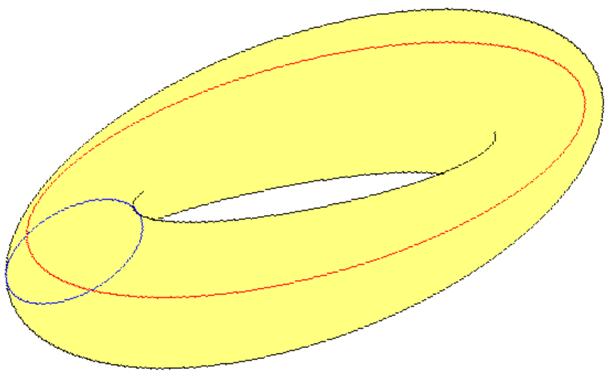
  2g　次元の空間　$H_1(X)$

- 高次元の多様体　X

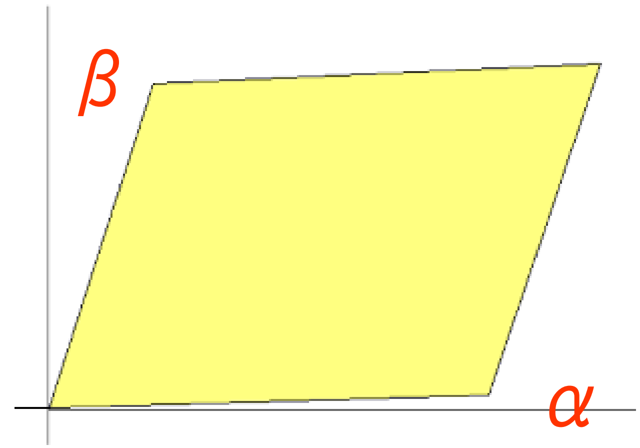
  空間　$H_q(X)$

- 1900　ポワンカレ　『位置解析』

楕円曲線のホモロジー



=



対辺どうしをくっつけた

$$H_1(E)$$
$$= \{ a\alpha + b\beta \mid a, b \text{ は実数} \}$$

ポワンカレ (1854.4.29 - 1912.7.17)

ポワンカレ予想

- ３次元球面と

「ホモロジーが同じ」

「空間として同じ」？

反例の構成. 精密化

(ポワンカレ(1904))

ポワンカレ予想

- ３次元球面と

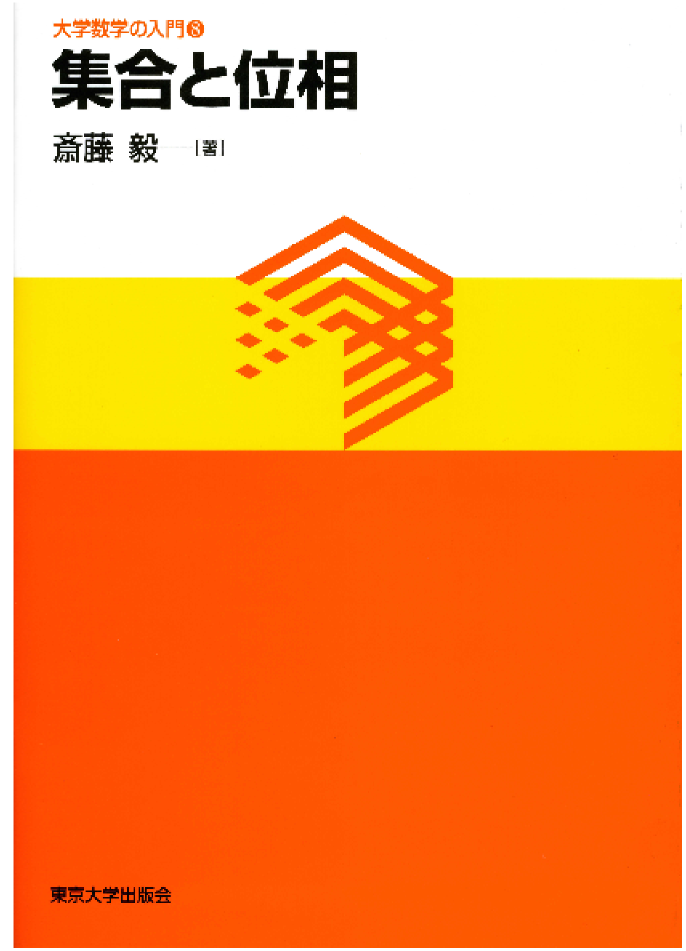
「基本群が同じ」

⇒ 「空間として同じ」

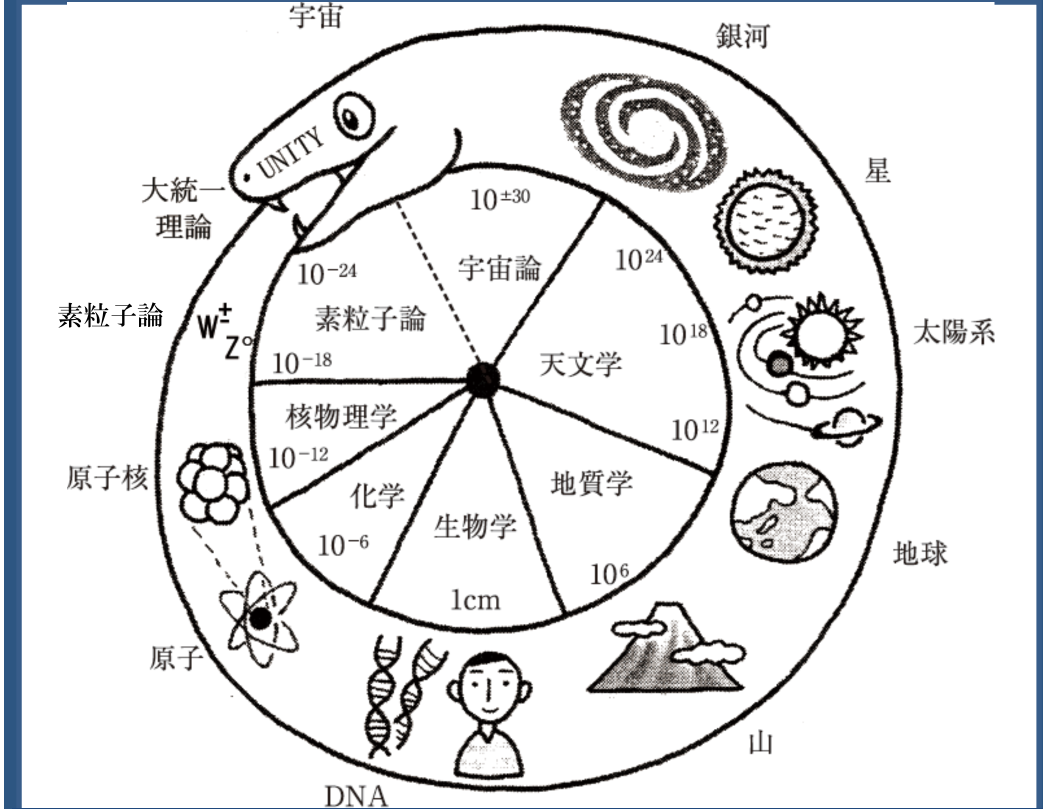
（ペレルマン(2003))

読書案内（基礎編）


大学数学の入門⑦
線形代数の世界
抽象数学の入り口
斎藤 毅―［著］
東京大学出版会


大学数学の入門⑧
集合と位相
斎藤 毅―［著］
東京大学出版会

ものの大きさ: 自然界の成り立ち



物理学は10^{-30}cmから10^{30}cmまでの大きさのものを対象とする

自然の階層

‡ 須藤靖『ものの大きさ―自然の階層・宇宙の階層』(UP Physics) 東京大学出版会 (2006/

数学の階層構造

- 個々の数、図形
- 数の体系、空間 ・・・ 集合
- 数の体系、空間相互の関係 ・・・ 圏
- 数学の対象に

  別種の対象を対応 ・・・ 関手

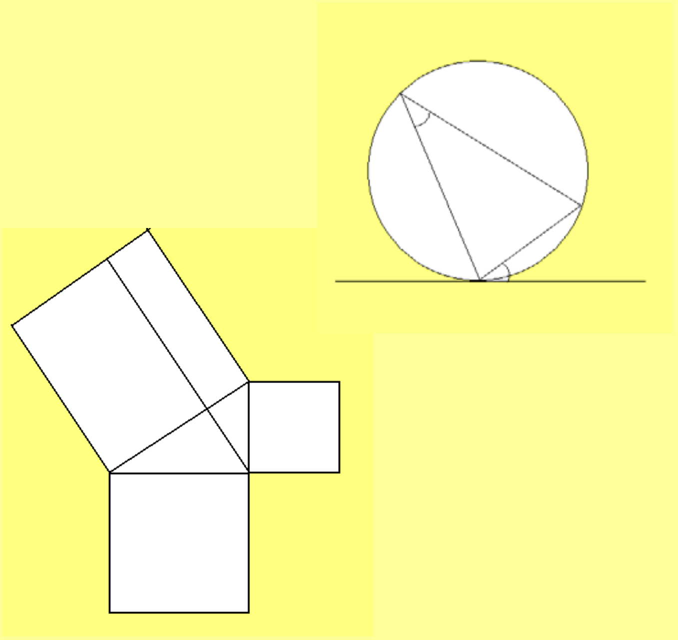
数学の階層構造　素朴な対象

数

0　$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$\sqrt{2}$　e　π

図形



数学の階層構造　集合

数の体系

有理数の世界

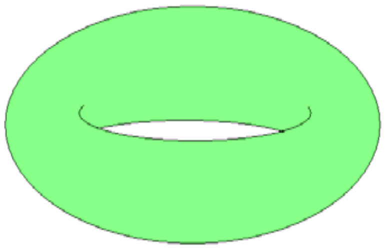
2進数の世界

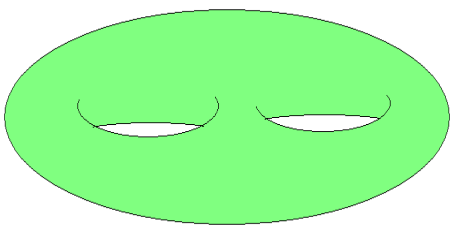
実数の世界

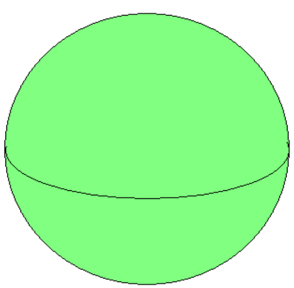
3進数の世界

・・・

空間

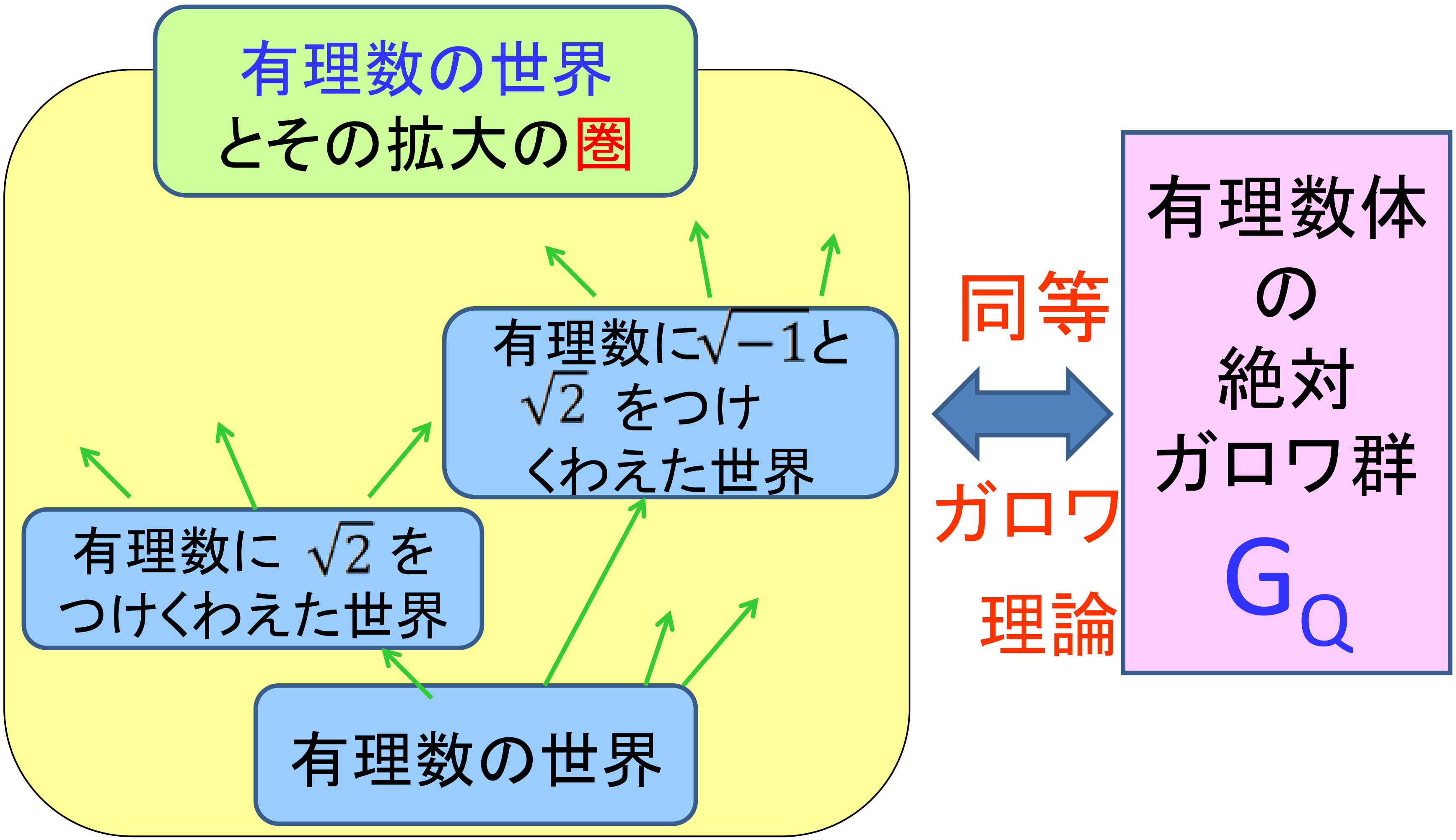






・・・

数学の階層構造　圏


有理数の世界
とその拡大の圏
有理数に$\sqrt{-1}$と
$\sqrt{2}$ をつけ
くわえた世界
有理数に $\sqrt{2}$ を
つけくわえた世界
有理数の世界
同等
ガロワ
理論
有理数体
の
絶対
ガロワ群
$G_{\mathbb{Q}}$

方程式による拡大

- $x^2 + 1 = 0$

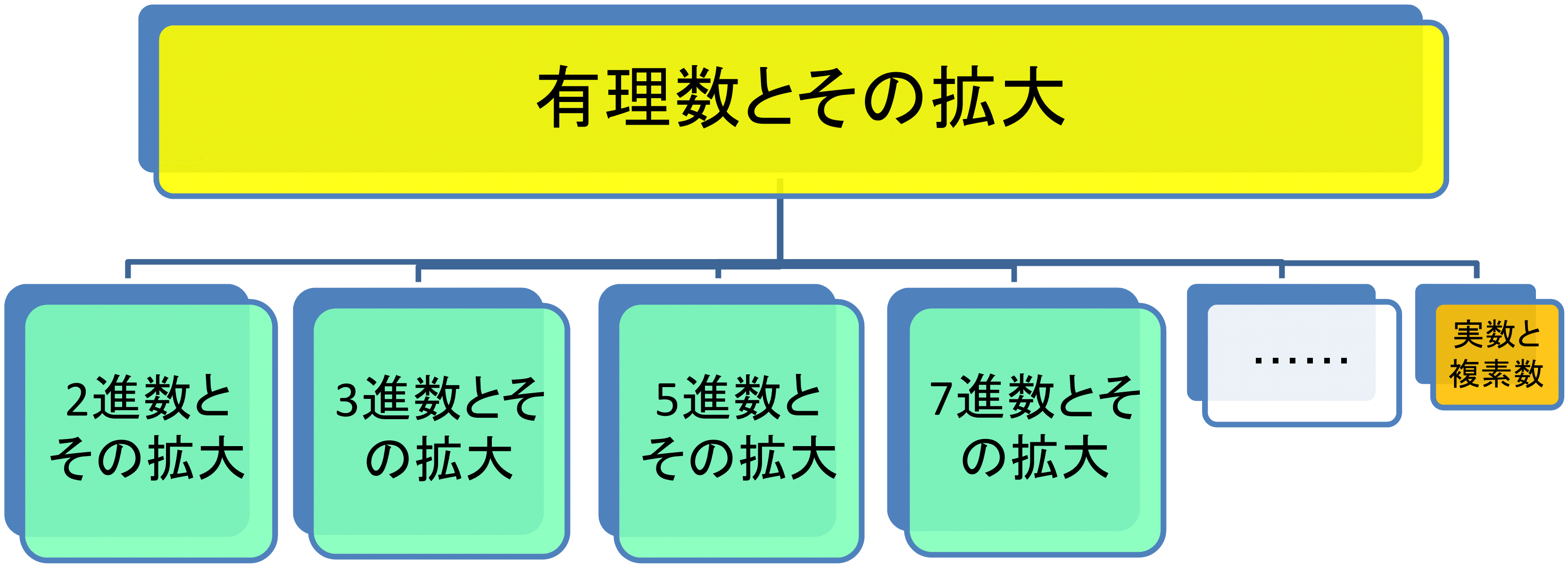
  $a + b\sqrt{-1}$ (a, b は有理数)

- $x^2 - 2 = 0$

  $a + b\sqrt{2}$ (a, b は有理数)

ガロワ　(1811.10.25-1832.5.31)

数の体系（20世紀前半）



- フェルマーの最終定理も解けるような、
  現代の数論の基本的な枠組みが、創られた。

局所大域原理

有理数体の絶対ガロワ群　$G_{\mathbb{Q}}$

２進数体の絶対ガロワ群　$G_{\mathbb{Q}_2}$

実数体の絶対ガロワ群 $G_{\mathbb{R}}=\{1, 複素共役\}$

３進数体の絶対ガロワ群　$G_{\mathbb{Q}_3}$

５進数体の絶対ガロワ群　$G_{\mathbb{Q}_5}$

・・・

局所大域原理（x^n-1の場合）

- n , a ≧ 1：たがいに素な自然数
  n でわったあまりが a の素数が
  無限個ある：算術級数定理 (1837)

4 でわったあまり：

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41,

43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, …

ディリクレ　(1805.2.13–1859.5.5)

局所大域原理

有理数体の絶対ガロワ群　$G_{\mathbb{Q}}$

２進数体の絶対ガロワ群　$G_{\mathbb{Q}_2}$

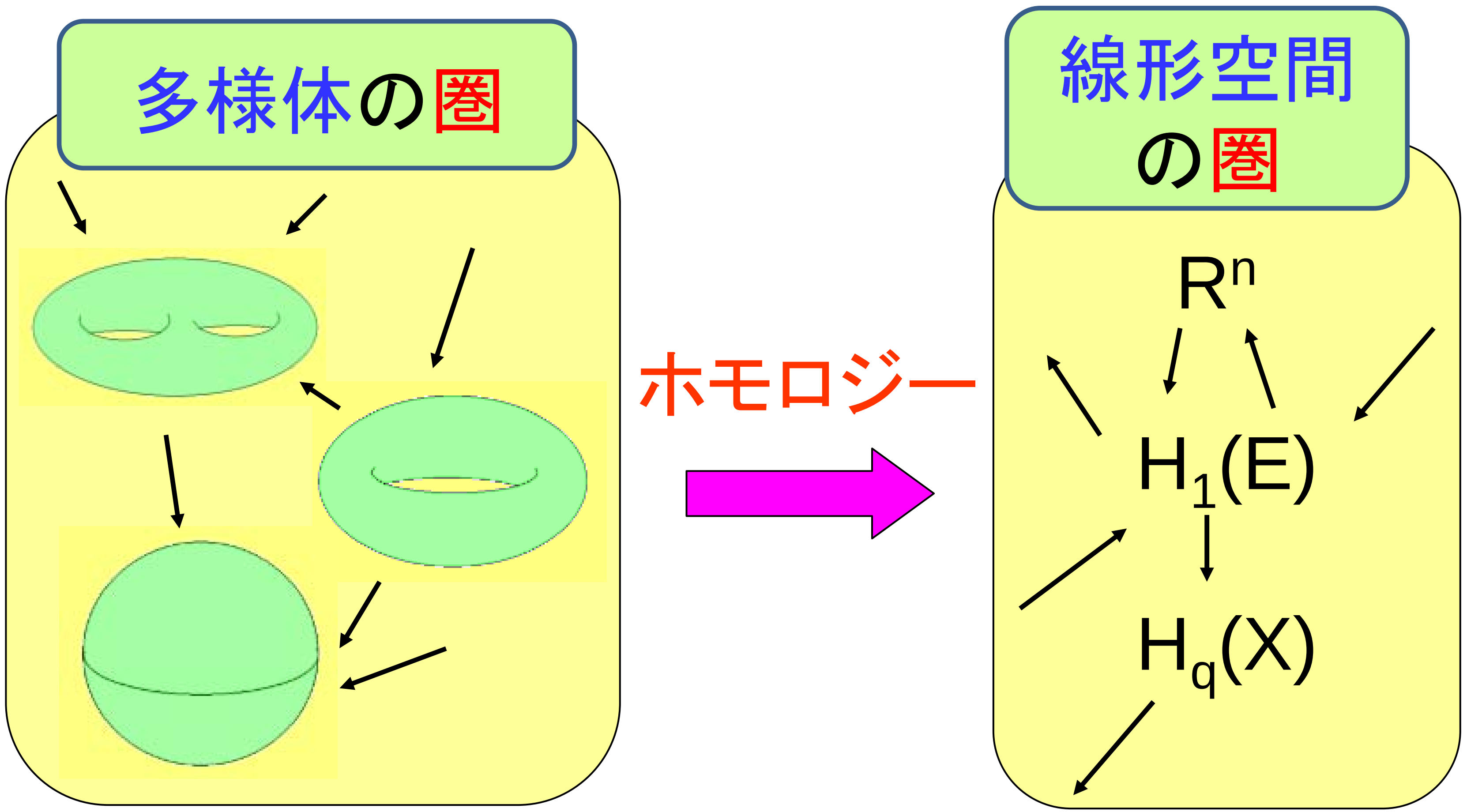
実数体の絶対ガロワ群 $G_{\mathbb{R}}=\{1,$ 複素共役$\}$

３進数体の絶対ガロワ群　$G_{\mathbb{Q}_3}$

５進数体の絶対ガロワ群　$G_{\mathbb{Q}_5}$

・・・

数学の階層構造　関手



数論幾何の世界

環の圏

数と式の世界

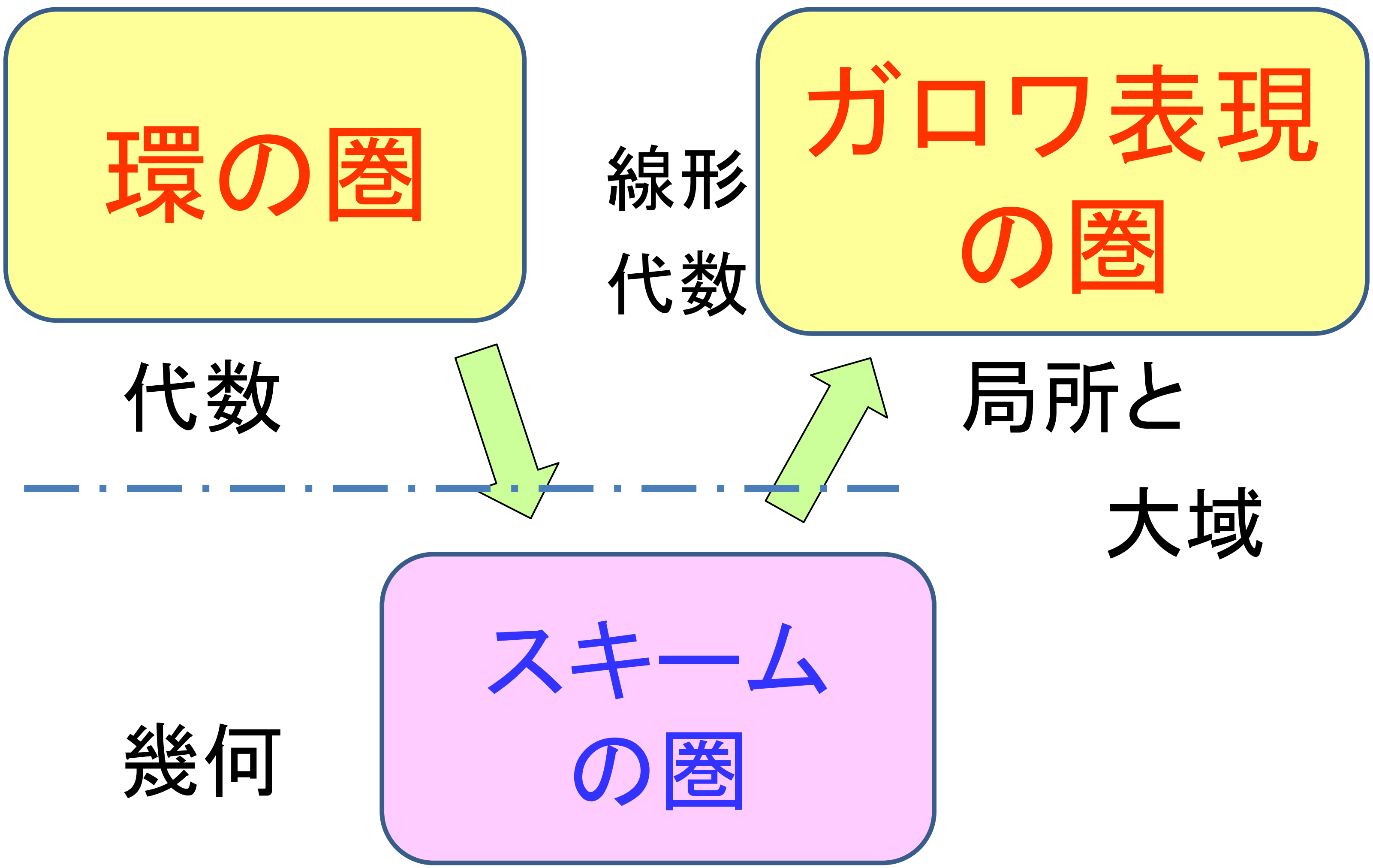
スキームの圏

方程式で
定まる空間

エタール・
コホモロジー

ガロワ表現
の圏

数論幾何の世界



楕円曲線とガロワ表現

楕円曲線　E

ガロワ表現　$H_1(E, Q_p)$

$= \{ a\alpha + b\beta \mid a, b$ は p進数 $\}$

楕円曲線とガロワ表現

ガロワ表現 $H_1(E, \mathbb{Q}_p)$ が「同じ」

↓

楕円曲線 E も「同じ」

（ファルティングス 1983）

数論幾何の確立

数と式の類似

- あまりのあるわり算

$32 \div 5 = 6$ あまり 2

$x^5 \div (x^2 + 1) = x^3 - x$ あまり x

数と式の類似

- 素因数分解

$$15624 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31$$

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

素数と点の類似

$$\frac{1}{1-x}$$

数直線上の関数

$$= 1 + x + x^2 + \cdots$$

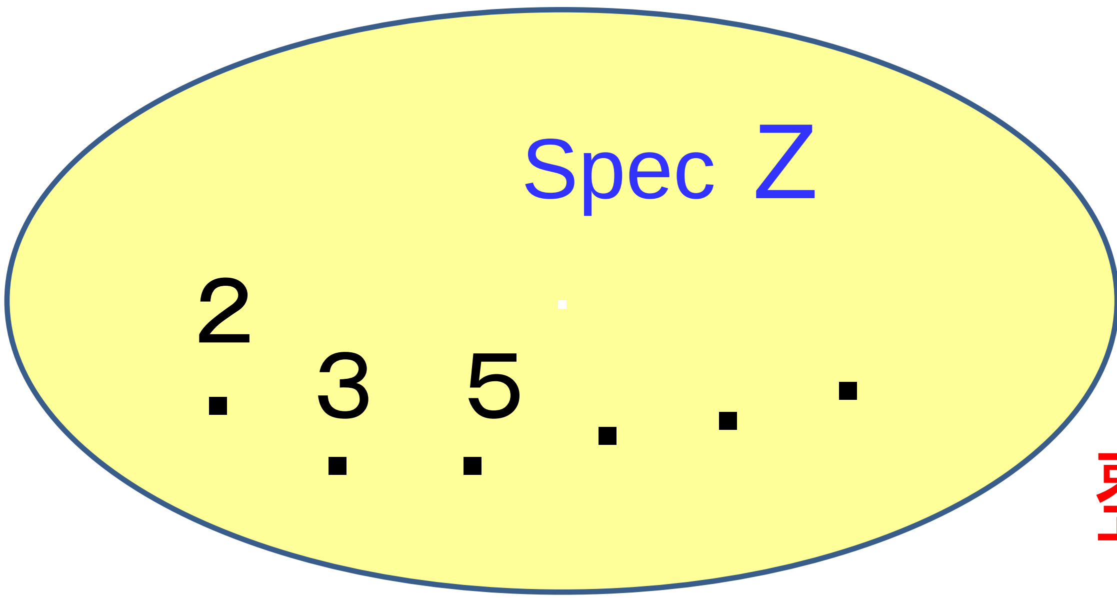
テイラー展開

点　$x = 0$　のまわりでのようす

素数と点の類似

$$\frac{1}{1-p} = 1 + p + p^2 + \cdots$$

p進展開



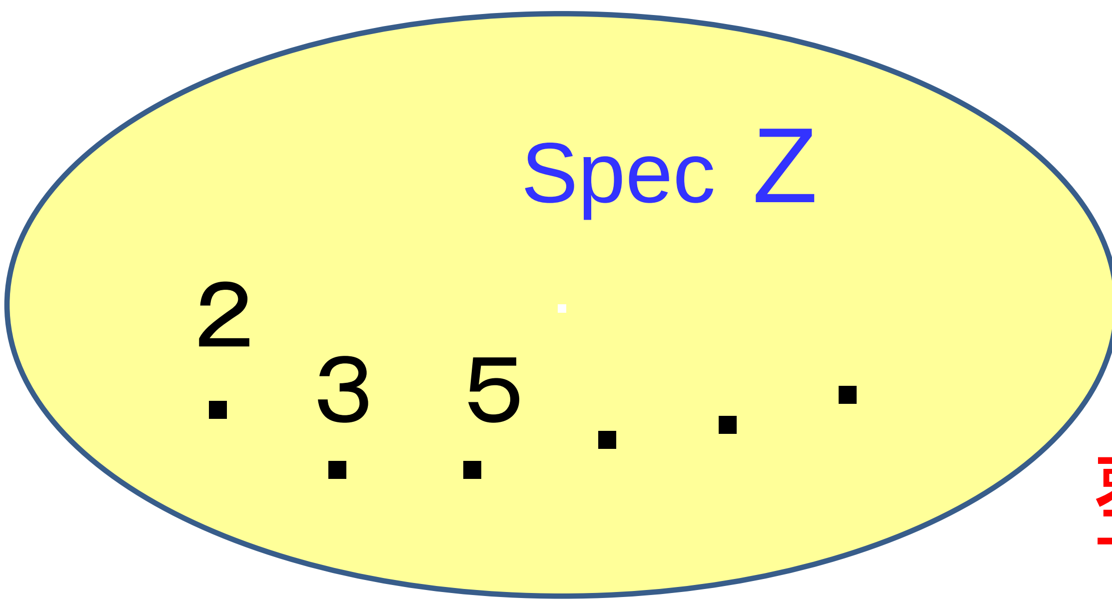
素数が点

整数が関数

関数と点の双対性

関数 ＝ 点での値が決まるもの

点 ＝ 関数の値が決まるもの



素数が点

整数が関数

フェルマーの最終定理の証明

自明でない 解 (a, b, c)

①

楕円曲線　E: $y^2 = x (x-a^n) (x-c^n)$

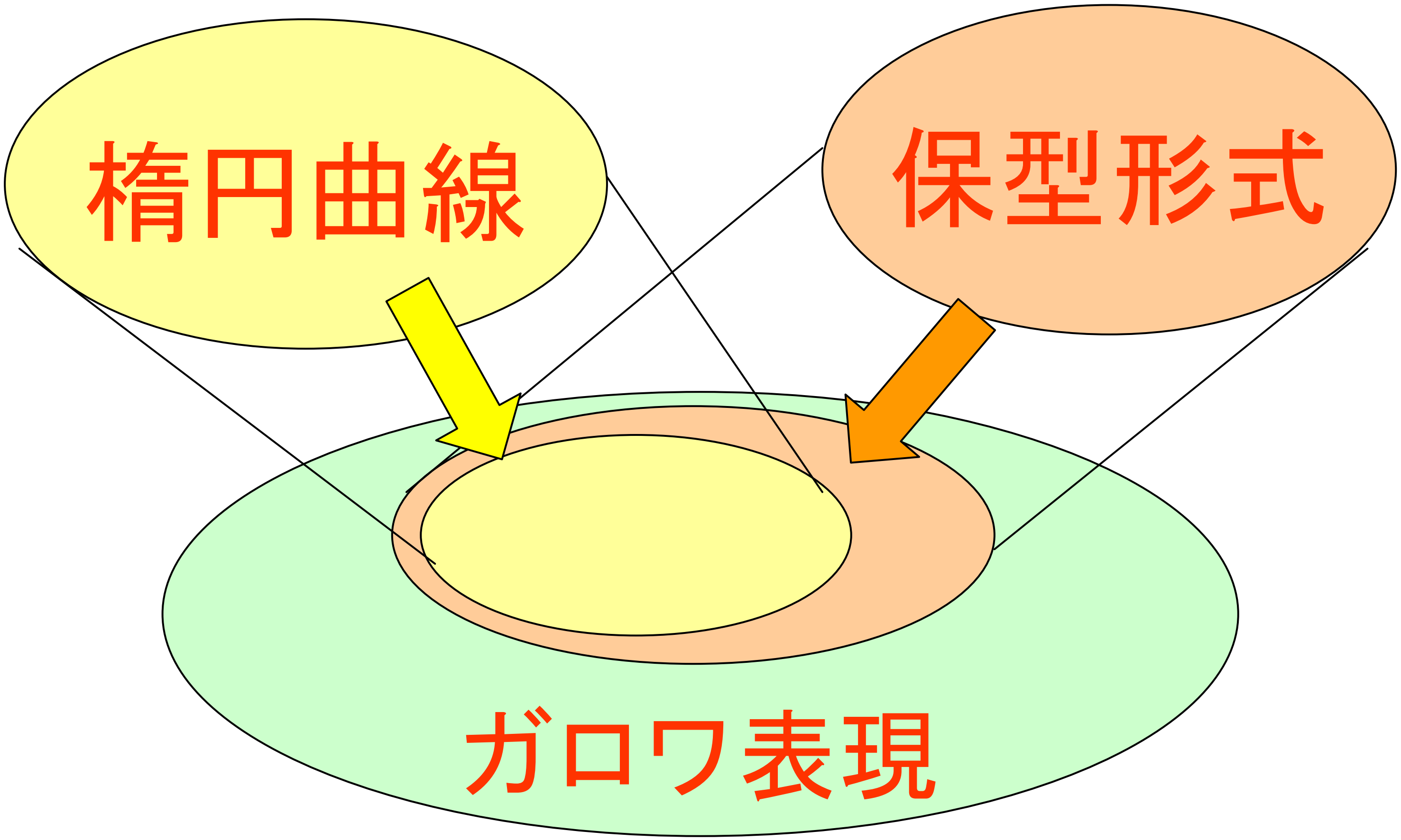
②

対応する 保型形式

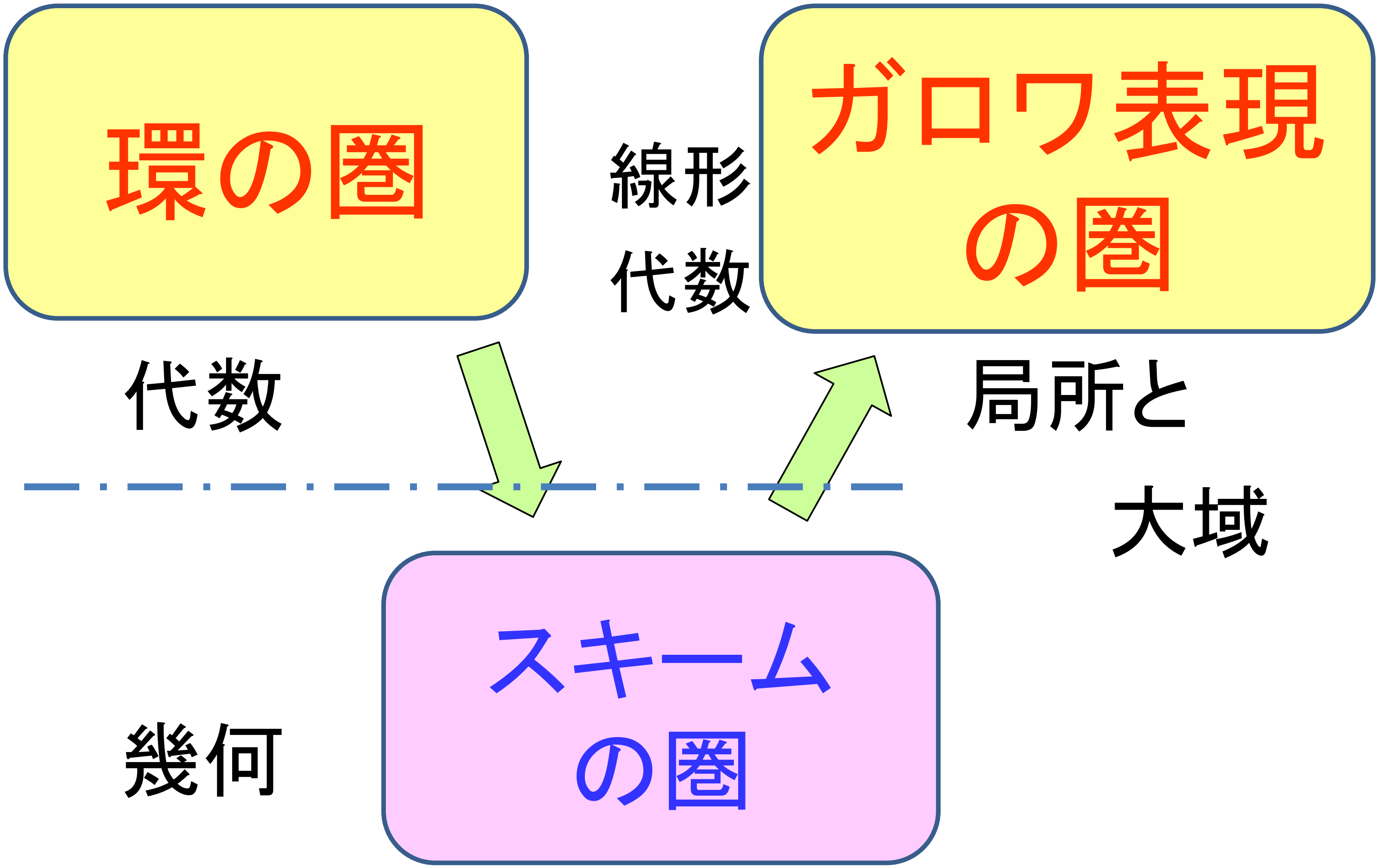
③

矛盾

谷山･志村予想の解決



数論幾何の世界



谷山･志村予想の解決