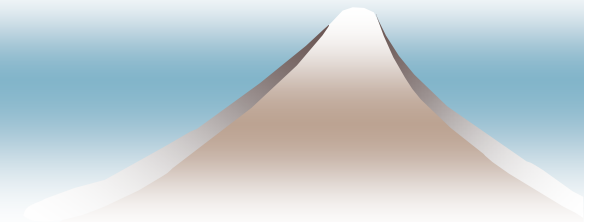


Creating Mathematics That Describes Brain and Information

(2) the brain mechanism:
the mathematical principles of the expression, memory, and
learning of information inside the brain

RIKEN
Brain Science Institute

Shunichi Amari



space odyssey in the brain

Big bang: Energy, matter, astronomical objects, molecule (order)

(13.7 billion years) Physics, Chemistry Energy and Entropy

Life : a material form that reproduces itself perpetually

(3.6 billion years) Life science

heredity, molecular mechanism, self conservation

Brain and nervous systems :

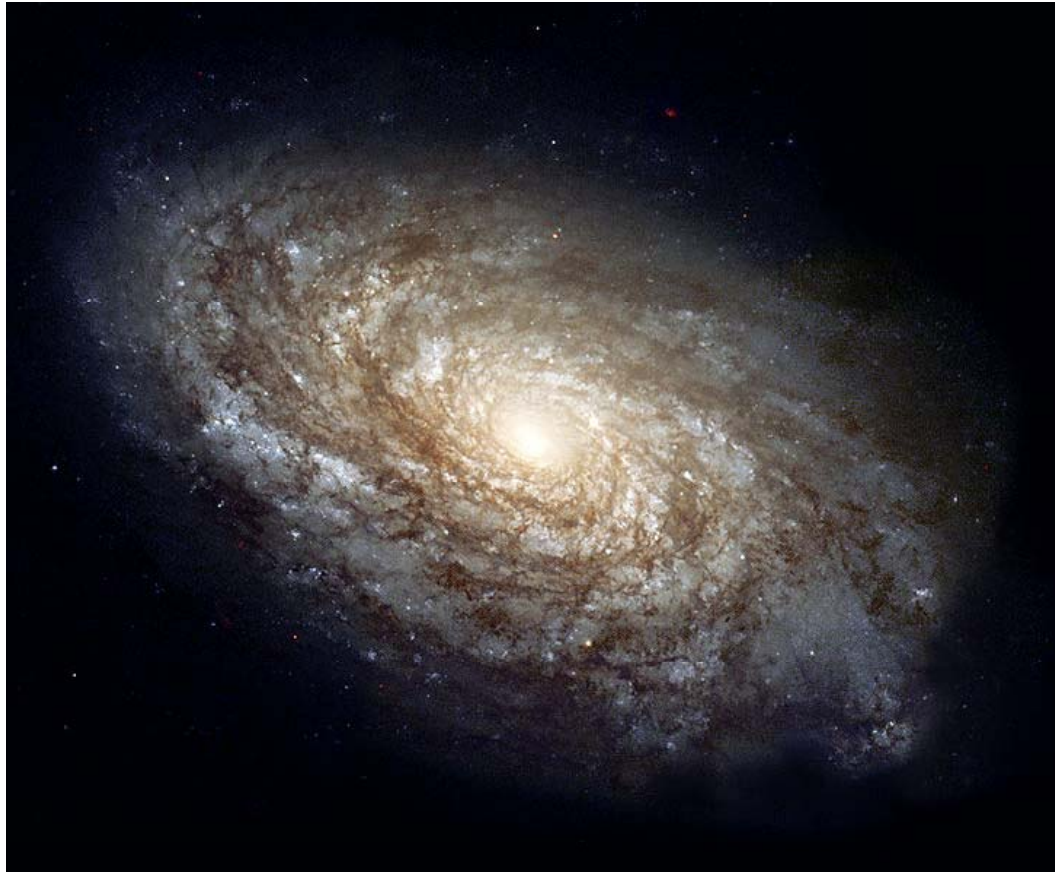
They act as they utilize, memorize, learn, or judge

surroundings (500 million years) neuroscience

Human : a life with mind that lives within the society;

culture and society (200 thousand years)

Brain science, information science, human science



From NASA

[http://en.wikipedia.org/wiki/File:NGC_4414_\(NASA-med\).jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:NGC_4414_(NASA-med).jpg)

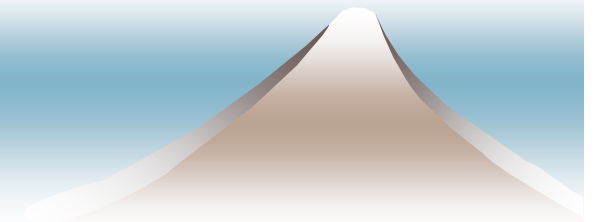
**Big bang: Energy, matter – astronomical objects – molecule
(order)**

(13.7 billion years) Physics, Chemistry Energy and Entropy



**4.6 billion
years ago:
Birth of the
earth**

From NASA
http://en.wikipedia.org/wiki/File:The_Earth_seen_from_Apollo_17.jpg

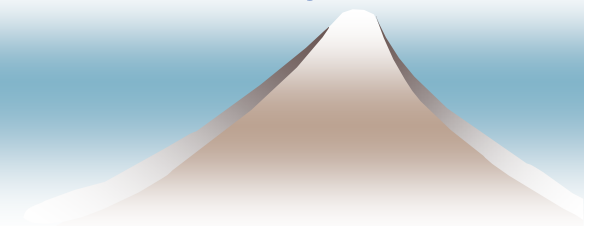


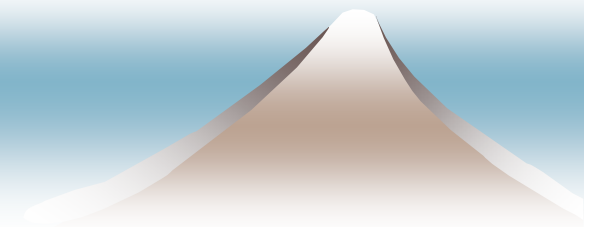
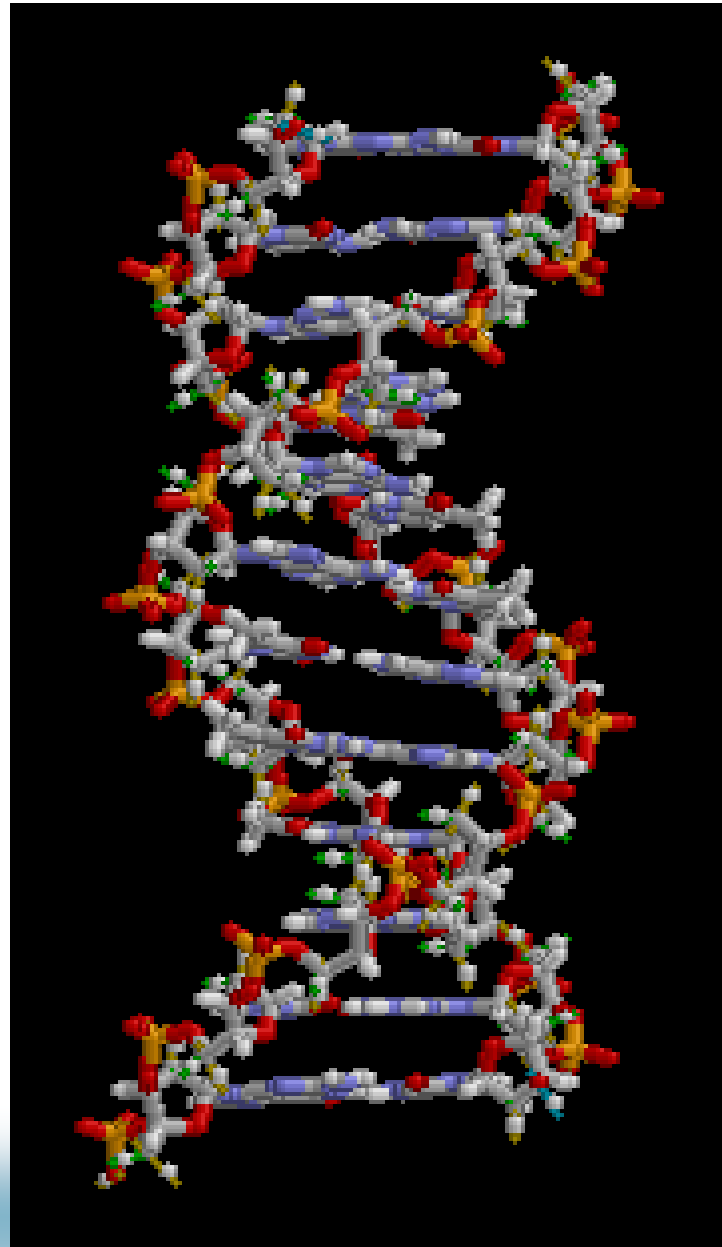


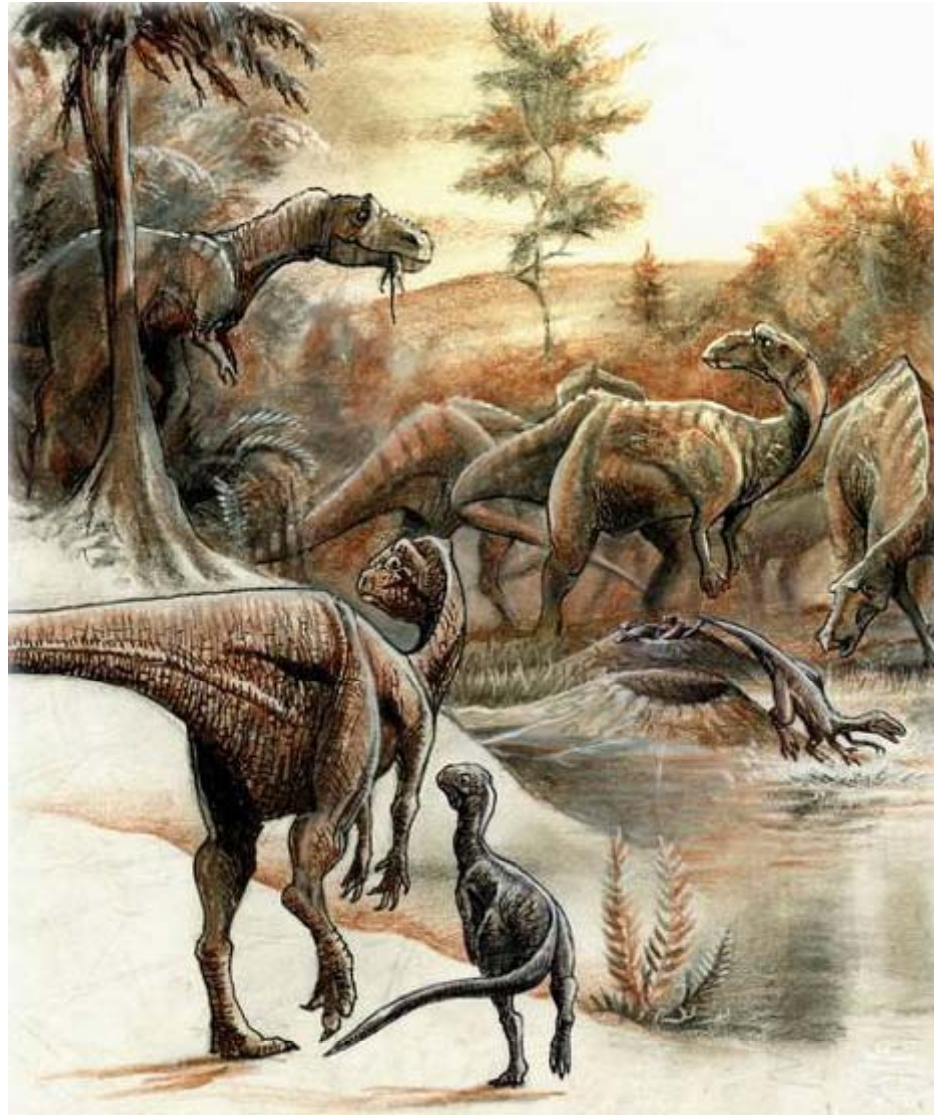
Life : a material form that reproduces itself perpetually

(3.6 billion years) Life science

heredity, molecular mechanism, self conservation







http://ja.wikipedia.org/wiki/ファイル:Egg_Mountain.jpg

A multicellular organism

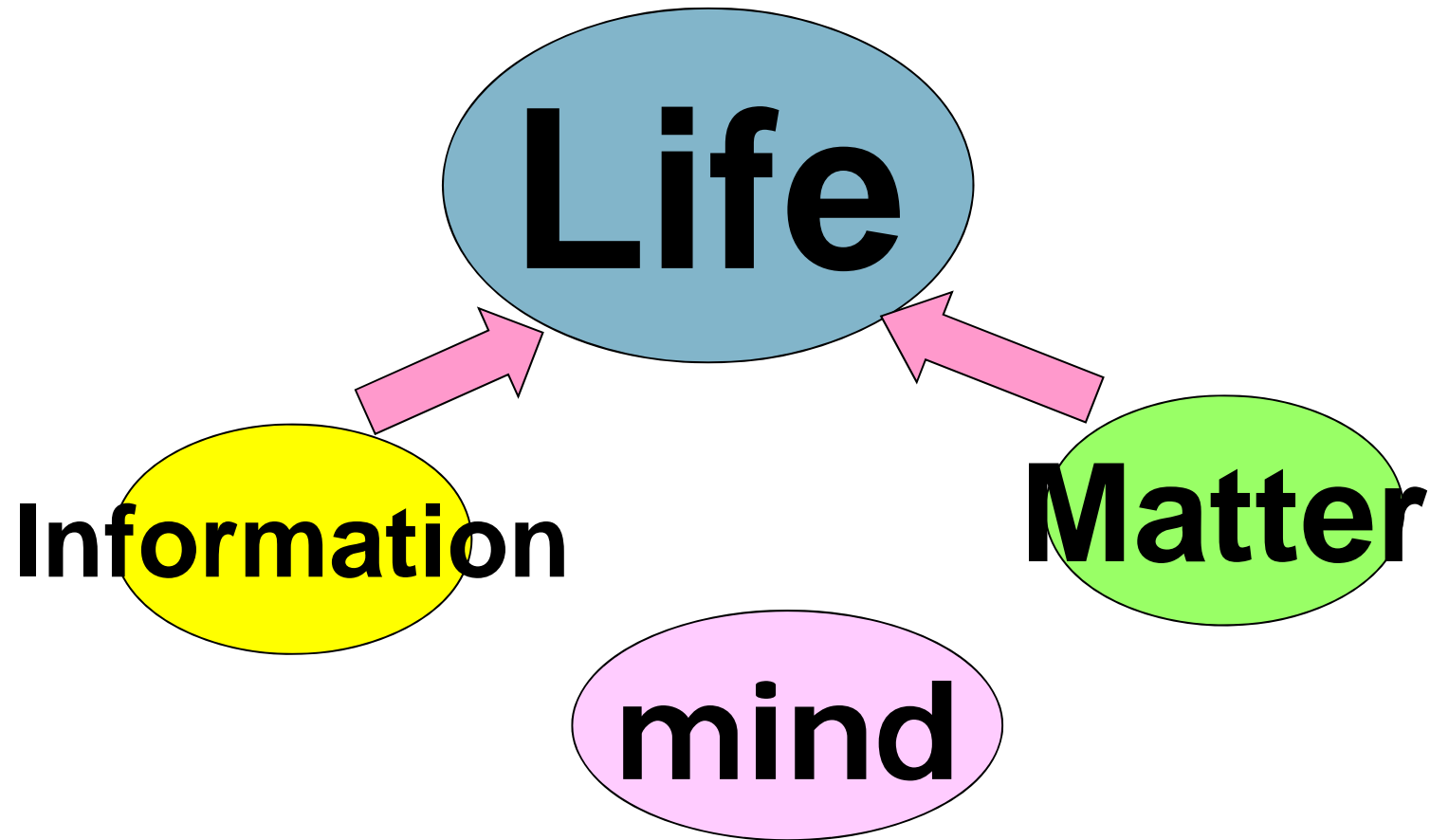
Brain and nervous system: They act as they utilize, memorize, learn, or judge surroundings (600 million years) **neuroscience**

Anthropoids, and then Human

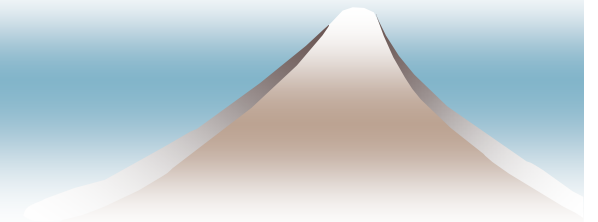
Human beings: life that living in mind and society;
culture and society (100 thousand years) **Brain science,**
Information Science, Human Science



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lightmatter_chimp.jpg



**The law of matter; life and information; brain;
Mind and civilization**



The theory of mind

Do Robots Have Consciousness?



Powerful computers
Brain simulation

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Robot_asimo.jpg

ヒトの脳は約1400gである。豆腐のようにやわらかい脳は、かたい頭蓋骨と、硬膜、くも膜、軟膜で覆われて保護されている。さらにもくも膜と軟膜の間にあるくも膜下腔には脳脊髄液が満たされ、衝撃から脳を守るクッションの役目をしている。

脳は大脳、小脳、脳幹に分けられる。大脳は1000gほどで、右半球の右脳と左半球の左脳に分かれている。思考や記憶などの高度な精神活動や、感覚の中核である。大脳半球は、表面のしわ「脳溝」に沿って、大きく四つの領域に分けられる。「前頭葉」「頭頂葉」「側頭葉」「後頭葉」である。前頭葉は高等な動物ほど面積が大きい。ヒトでは、大脳の表面積の3分の1を占める。右脳と左脳は「脳梁」と呼ばれる神経線維の束でつながっている。

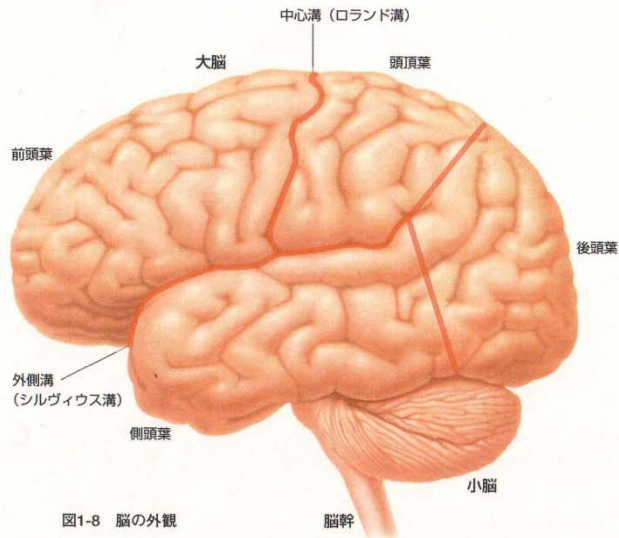


図1-8 脳の外観

ヒトでは発達した 大脳皮質が脳幹を覆っている

小脳は130gほどで、表面には大脳よりも細かいしわがある。小脳も左右の半球に分かれており、運動学習の中核である。

脳幹は220gほどの生命維持の中核で、間脳、中脳、橋、延髄から成る。間脳は、視床と視床下部、脳下垂体、松果体から成り、延髄の先は脊髄につながっている。ヒトでは大脳が大きく発達しているために、脳幹の大部分は外からは見ることができない。

図1-9 脳の正中断面図

大脳
新皮質は感覚、思考、判断の中核。
古皮質は本能、情動、記憶の中核。

脳幹 (間脳・中脳・橋・延髄) 生命維持の中核

松果体 体内時計を調節するホルモンを分泌
視床 嗅覚以外の感覚情報を大脳皮質の感覚野に中継
視床下部 自律神経を制御し、体温調節、摂食、性行動などを調整。
脳下垂体 ホルモンを分泌して体の状態を調節

頭蓋骨 やわらかい脳を守るかたい骨
硬膜 頭蓋骨と結合している厚い膜
くも膜 膜からクモの巣のような突起が出ている。軟膜との間のくも膜下腔には脳脊髄液が充満し、血管がたくさん走っている。
軟膜 大脳に密着している薄い膜

脳梁 左右の大脳半球を結ぶ神経線維の束

中脳 聴覚情報の中継や、眼球運動、瞳孔調整などの視覚反射をつかさどる。

橋 左右の大脳半球と小脳半球の情報を中継。筋肉運動の調節にも関係。

延髄 呼吸、心拍、くしゃみ、せき、唾液分泌などの中核。

小脳 平衡感覚と筋肉運動をつかさどる。運動学習の中核。

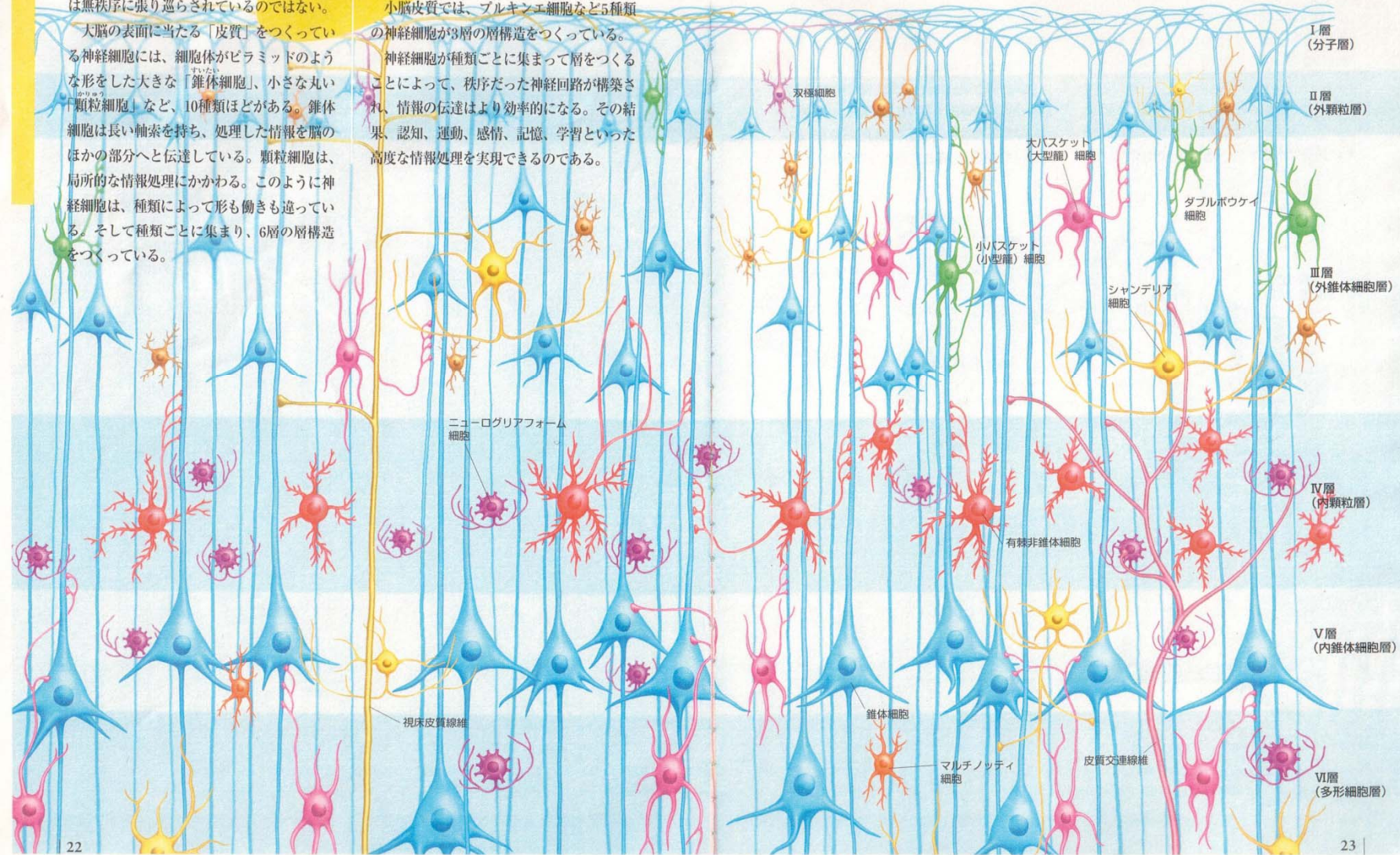
大脳には数百億もの神経細胞があり、それぞれ平均数万個のシナプスを持っている。複雑で巨大なネットワークであるが、神経回路は無秩序に張り巡らされているのではない。

大脳の表面に当たる「皮質」をつくっている神経細胞には、細胞体がピラミッドのような形をした大きな「錐体細胞」、小さな丸い「顆粒細胞」など、10種類ほどがある。錐体細胞は長い軸索を持ち、処理した情報を脳のほかの部分へと伝達している。顆粒細胞は、局所的な情報処理にかかわる。このように神経細胞は、種類によって形も働きも違っている。そして種類ごとに集まり、6層の層構造をつくっている。

神経細胞の層構造が高度な情報処理を実現する

小脳皮質では、プルキンエ細胞など5種類の神経細胞が3層の層構造をつくっている。神経細胞が種類ごとに集まって層をつくることによって、秩序だった神経回路が構築され、情報の伝達はより効率的になる。その結果、認知、運動、感情、記憶、学習といった高度な情報処理を実現できるのである。

図1-6 大脳皮質の6層構造



神経細胞の細胞体の構造は、ほかの細胞と変わらない。遺伝情報が書かれたDNAを含む「核」、エネルギーをつくり出す「ミトコンドリア」などで構成されている。ほかの細胞との大きな違いは、細胞体から突起が出ていることである。

細胞体から出て複雑に枝分かれしている「樹状突起」は、ほかの神経細胞から電気信号の情報を受け取る「入力アンテナ」である。樹状突起が受け取った電気信号は、「出力装置」である「軸索」を通して、次の神経細胞に伝達される。細胞体から出ている軸索は普通1本で、軸索の先端はいくつにも枝分かれしている。

軸索は「髄鞘（ミエリン鞘）」と呼ばれる、絶縁体の鞘で覆われている。脳の中では軸索が密集しているが、電気信号が混ざってしまうことがないのは、髄鞘のおかげだ。髄鞘は、つごとに少しのすき間があり、軸索がむき出しになっている。このくびれを「ランビエ絞輪」と呼ぶ。電気信号は、くびれからくびれへと絶縁体である髄鞘をジャンプしながら伝わっていく（跳躍伝導）。伝導速度は、速いものでは秒速120mにもなる。

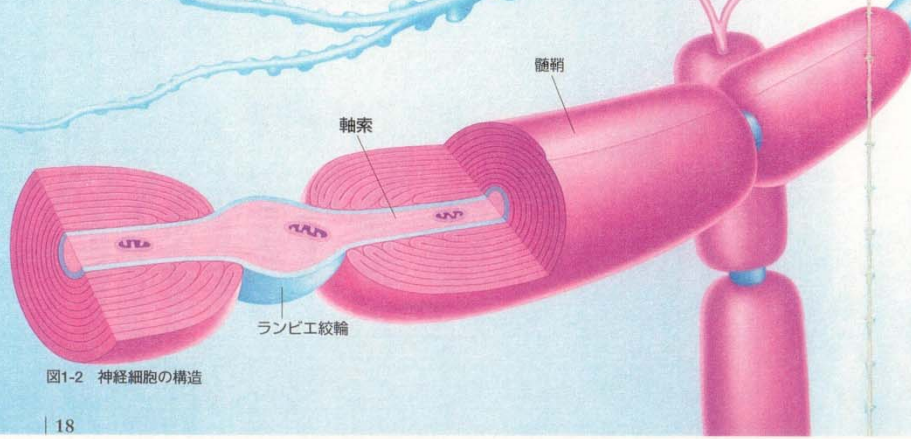


図1-2 神経細胞の構造

神経細胞は細胞体、軸索、樹状突起からなる。

神経細胞とともに脳を構成しているもう一つの細胞が「グリア細胞」である。ヒトのグリア細胞の数は、神経細胞の10倍もある。グリア細胞は、神経細胞を支えたり、栄養を供給したりして神経細胞の働きを助けている。最近、グリア細胞は神経成長因子や栄養因子などを分泌しており、神経細胞の維持さらには再生にとって非常に重要であることがわかってきた。

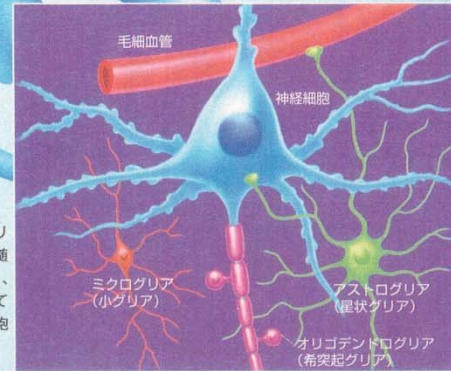
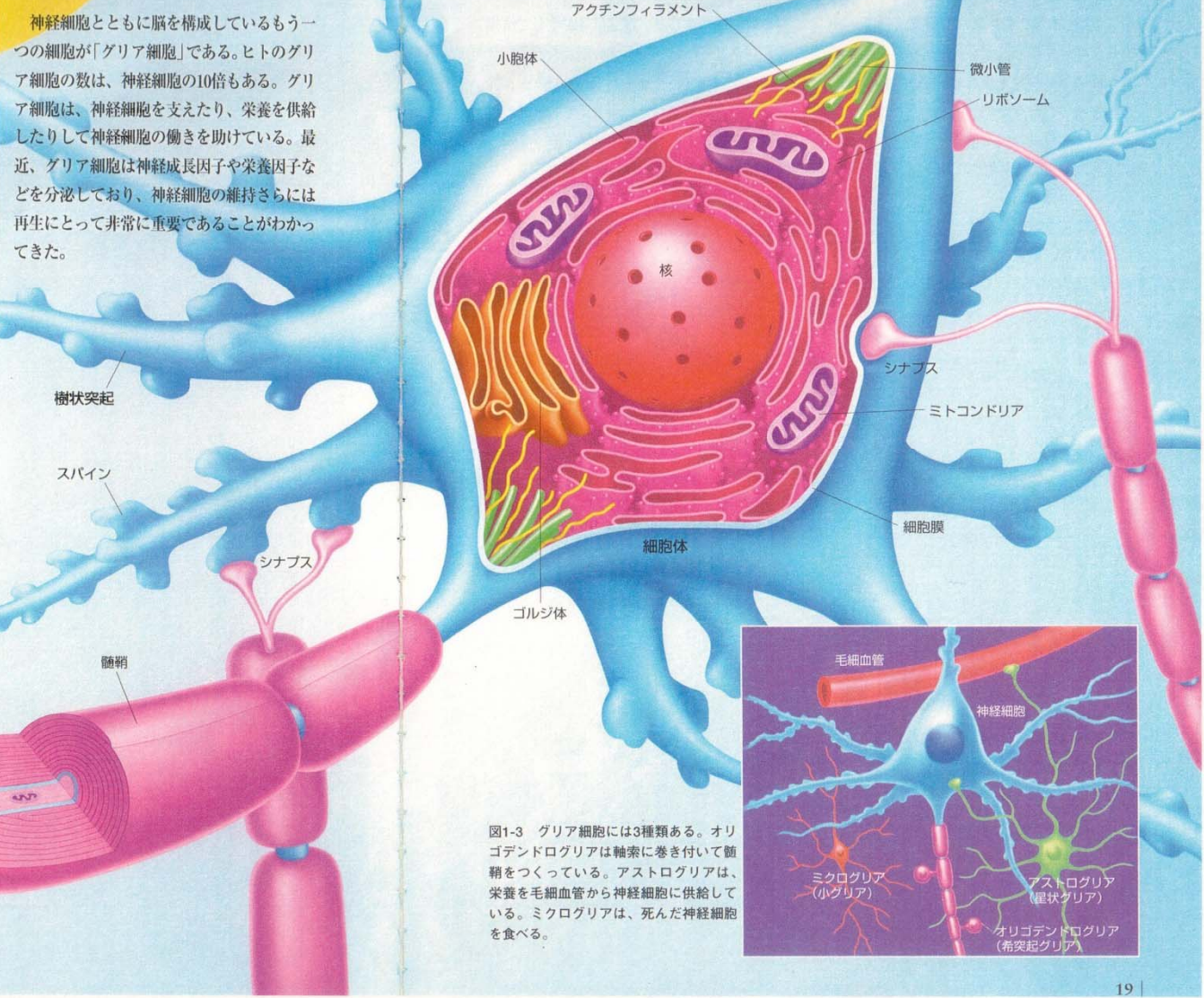


図1-3 グリア細胞には3種類ある。オリゴデンドログリアは軸索に巻き付いて髄鞘をつくっている。アストログリアは、栄養を毛細血管から神経細胞に供給している。ミクログリアは、死んだ神経細胞を食べる。

Brain

molecular machine-
information machine

Molecular
machine

Information
machine

Human,
society

Molecule

Cell

Circuit module

System

Individual

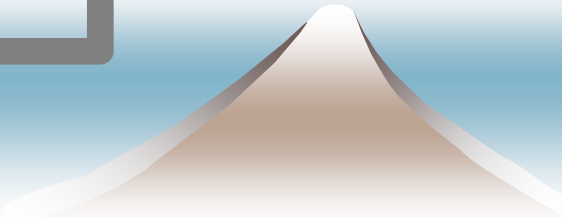
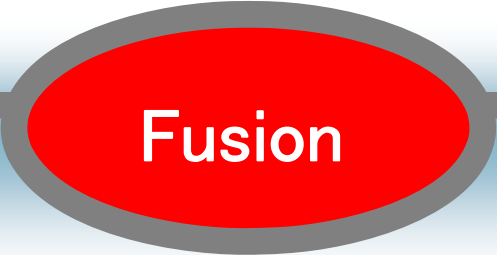
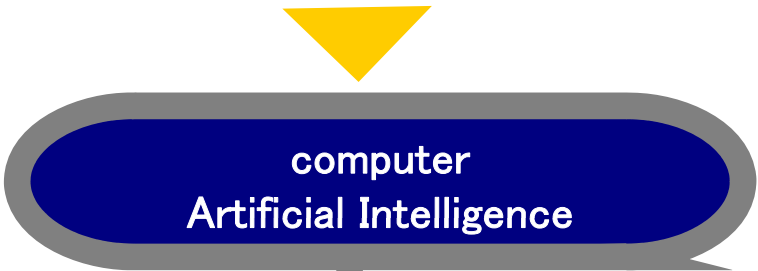
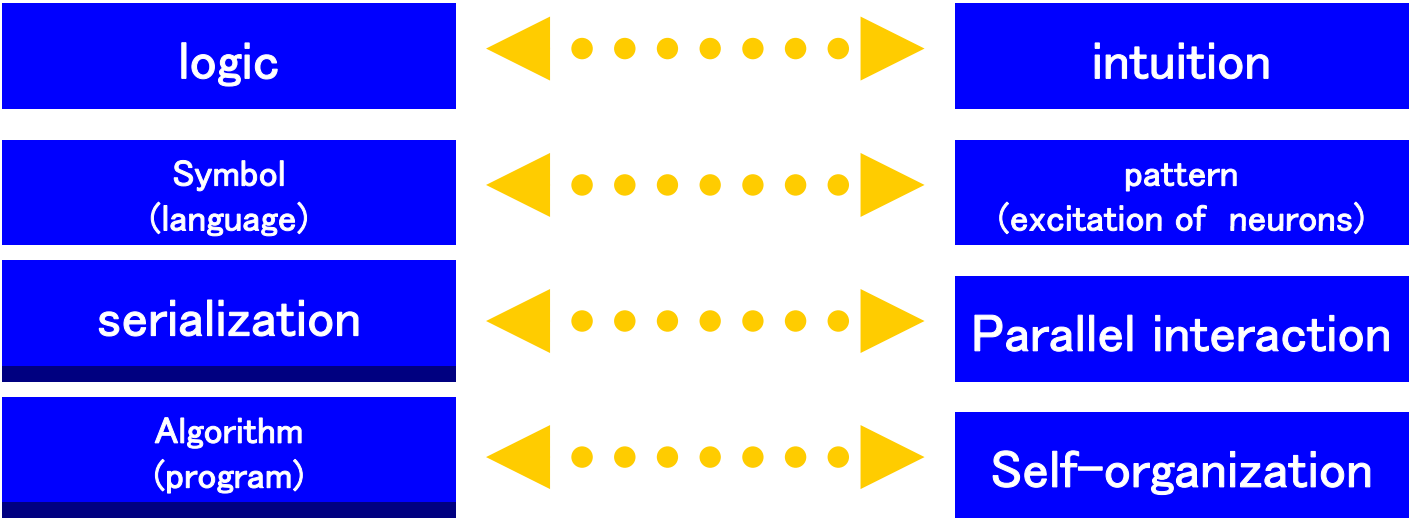
Society

-

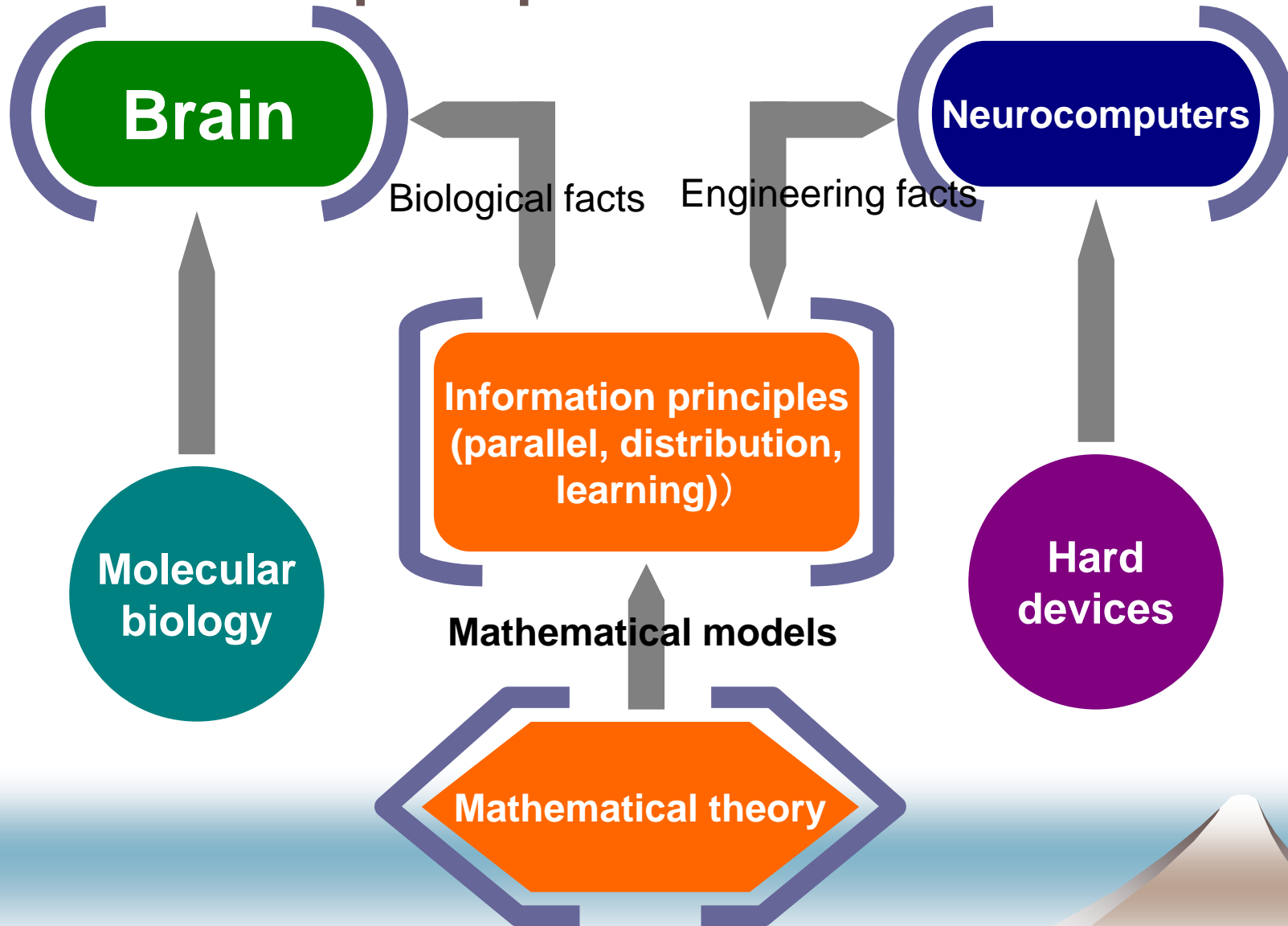
Study of the Brain

- *Knowing about the brain ... What is human?
from Human to Society*
- *Taking care of the brain ... brain disease, aging
mental disorder*
- *Creating the brain ... understanding of the brain
Brain-type information technology*
- *Educating the brain ... education and learning*

Human thinking

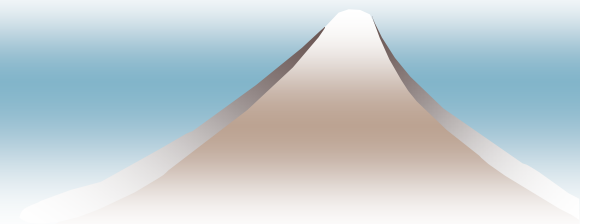


Towards an elucidation of the information principles in the brain

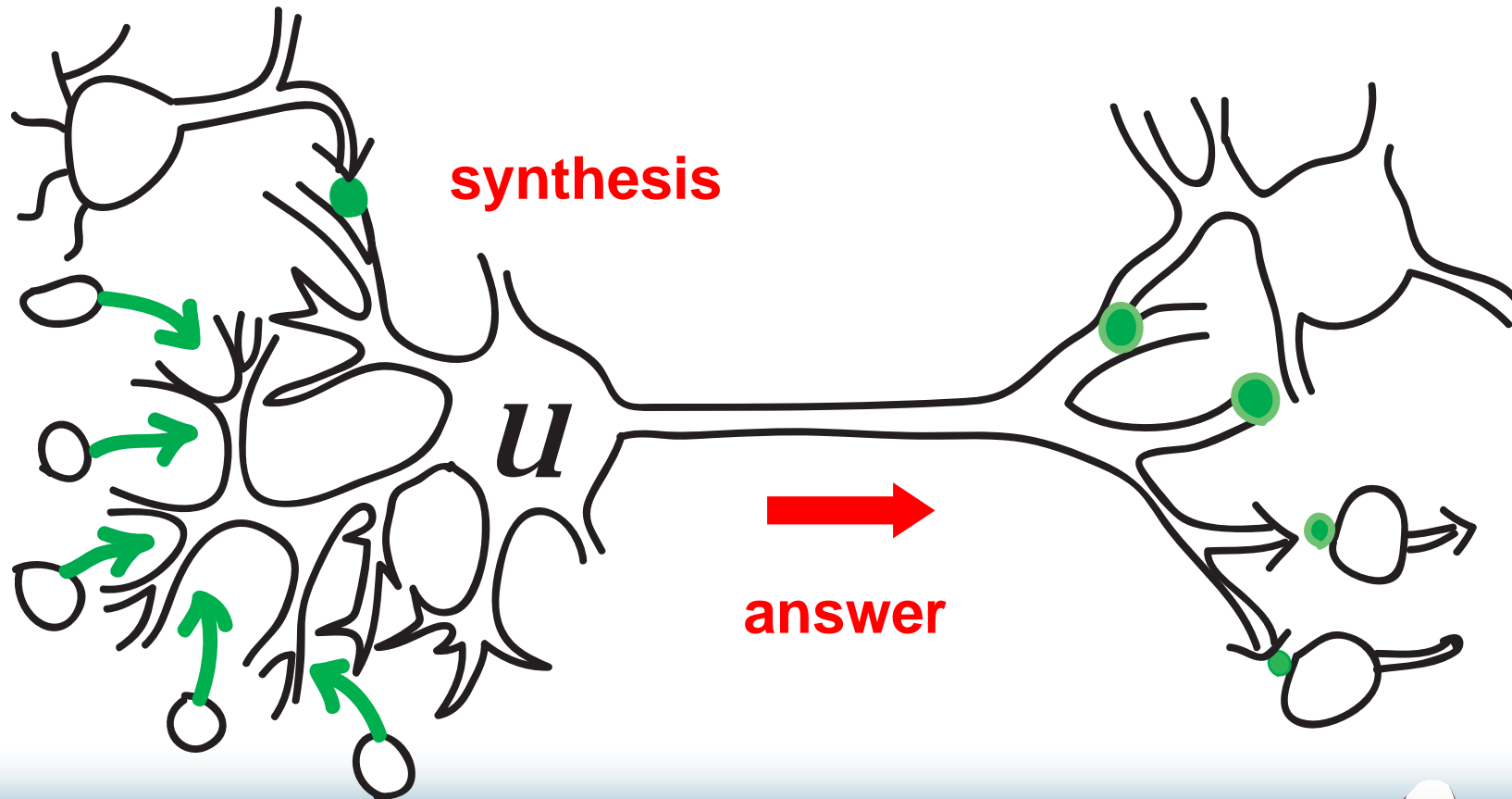


Mathematical Brain science

**information principles in the brain
realized thanks to the evolution**

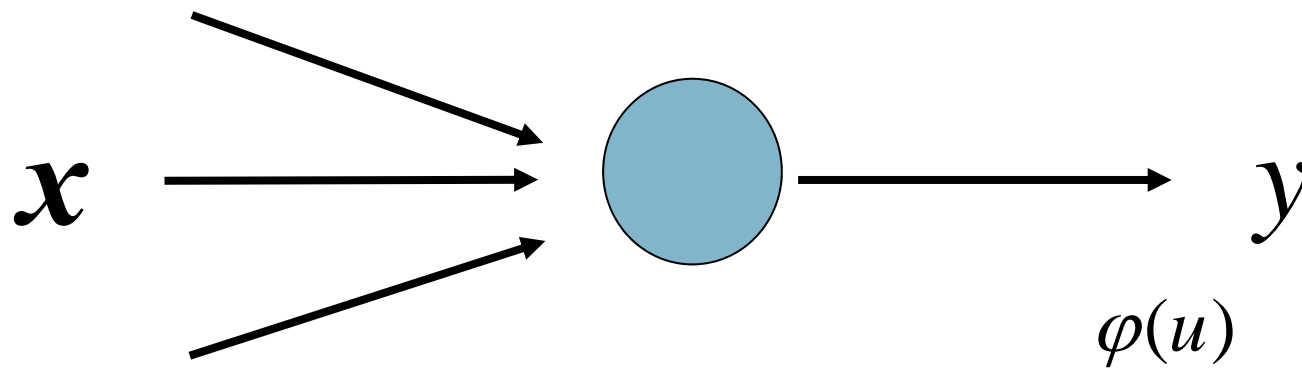


Models for neuronal cell

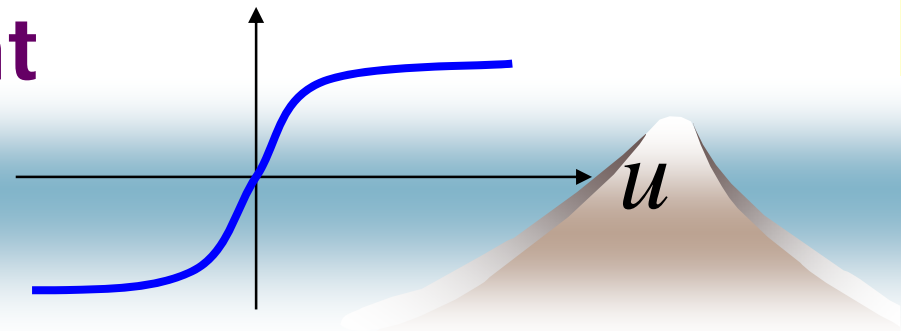


Mathematical models for neurons

$$y = \varphi\left(\sum w_i x_i - h\right) = \varphi(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})$$

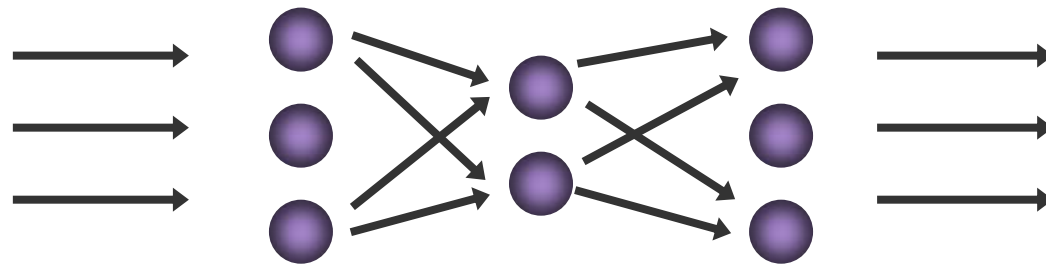


**Majority element
excite/inhibit**



Brain theory and Brain models

Cognitive model perceptron

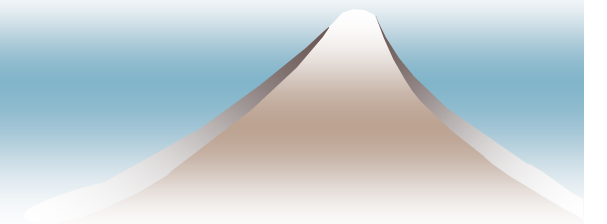


Dispersion expression

Learning/information geometry

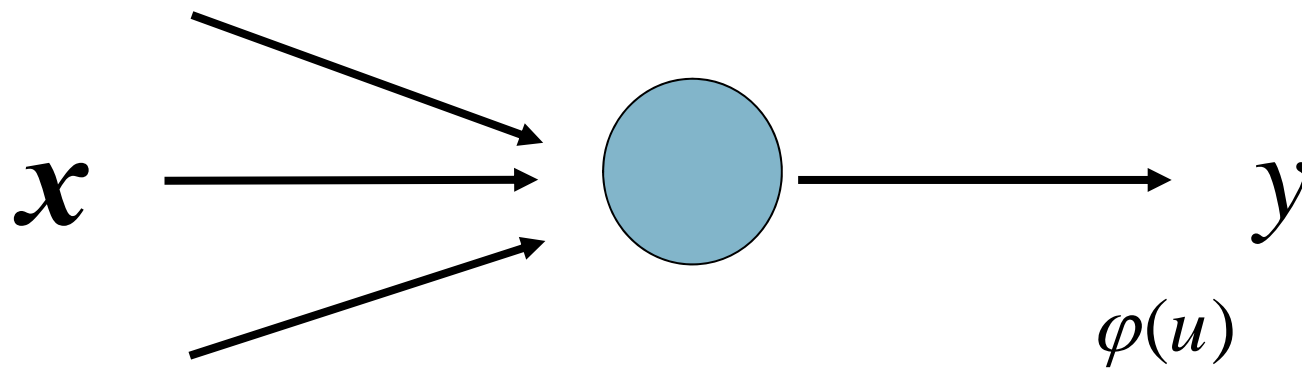
Curse of dimensionality

$$y = \sum v_i \varphi(\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{x})$$

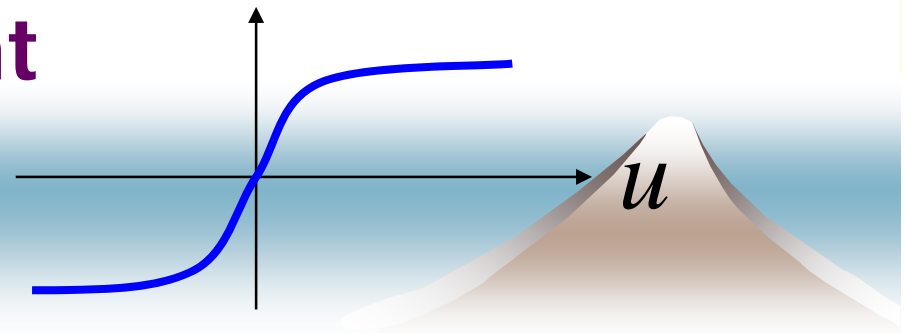


Mathematical models for neurons

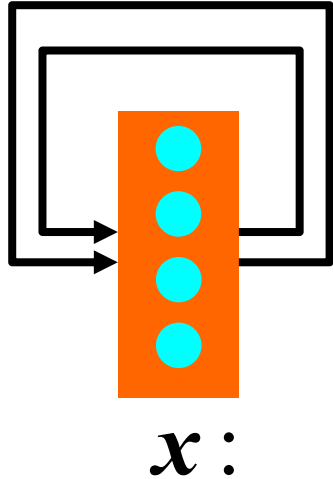
$$y = \varphi\left(\sum w_i x_i - h\right) = \varphi(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})$$



**Majority element
excite/inhibit**



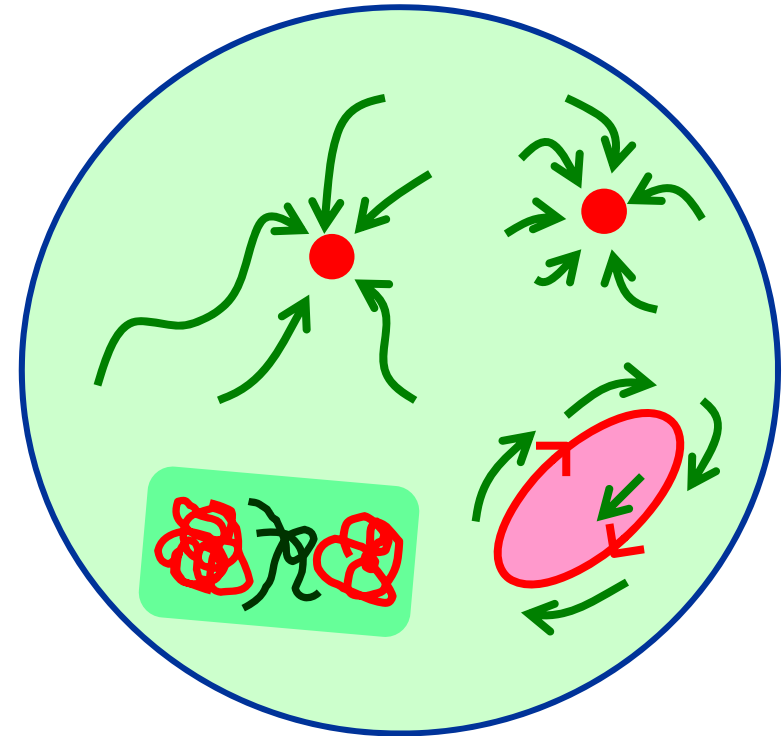
Dynamics and Decision



$$x_{t+1} = f(x_t; \theta)$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x; \theta)$$

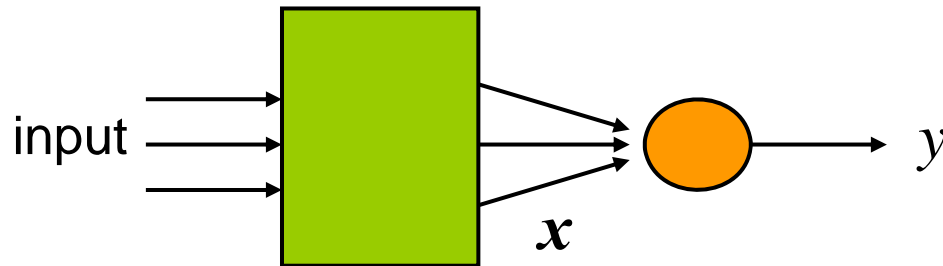
attractor

- Stability point*
- Stability orbit*
- chaos*



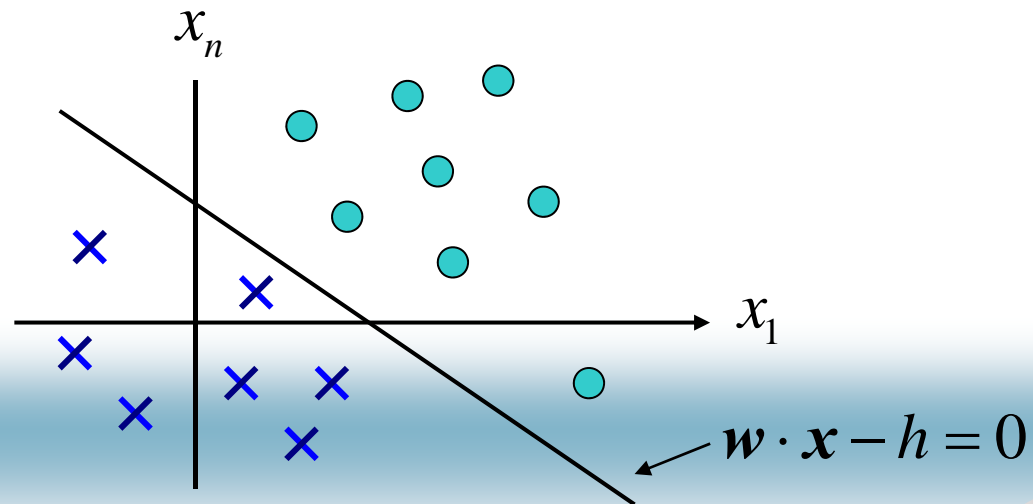
- memory
 - decision
- ➔ Real number computation
Pulse mode operation

Simple perceptron

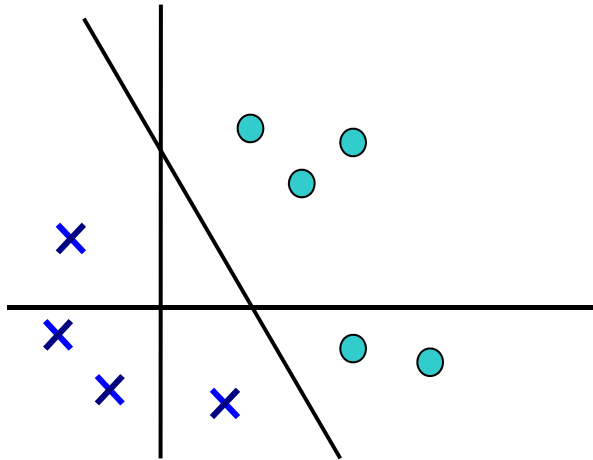
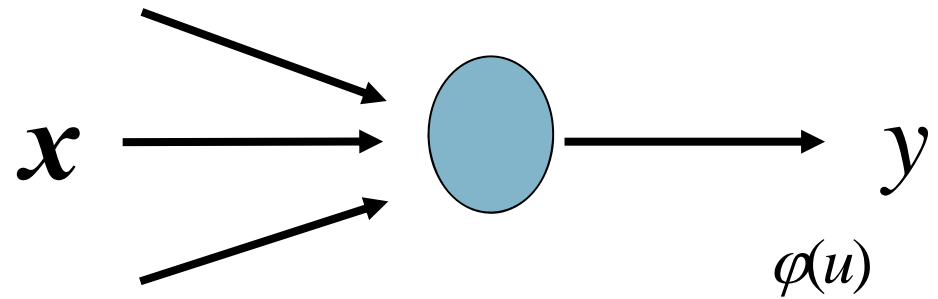


$$y = \text{sgn}(w \cdot x - h)$$

$$w \cdot x = \sum w_i x_i$$



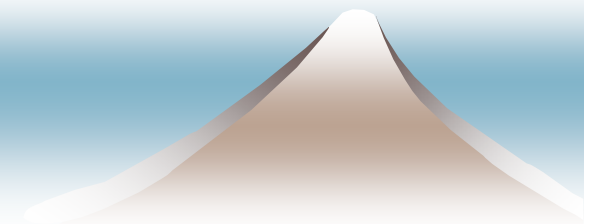
Error correction learning



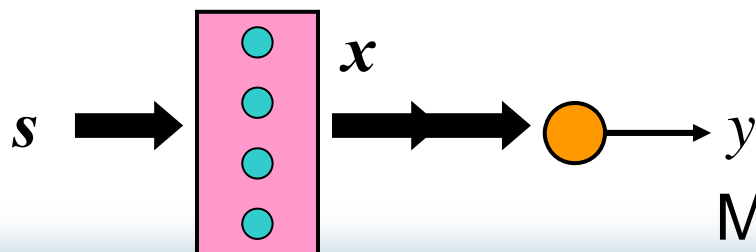
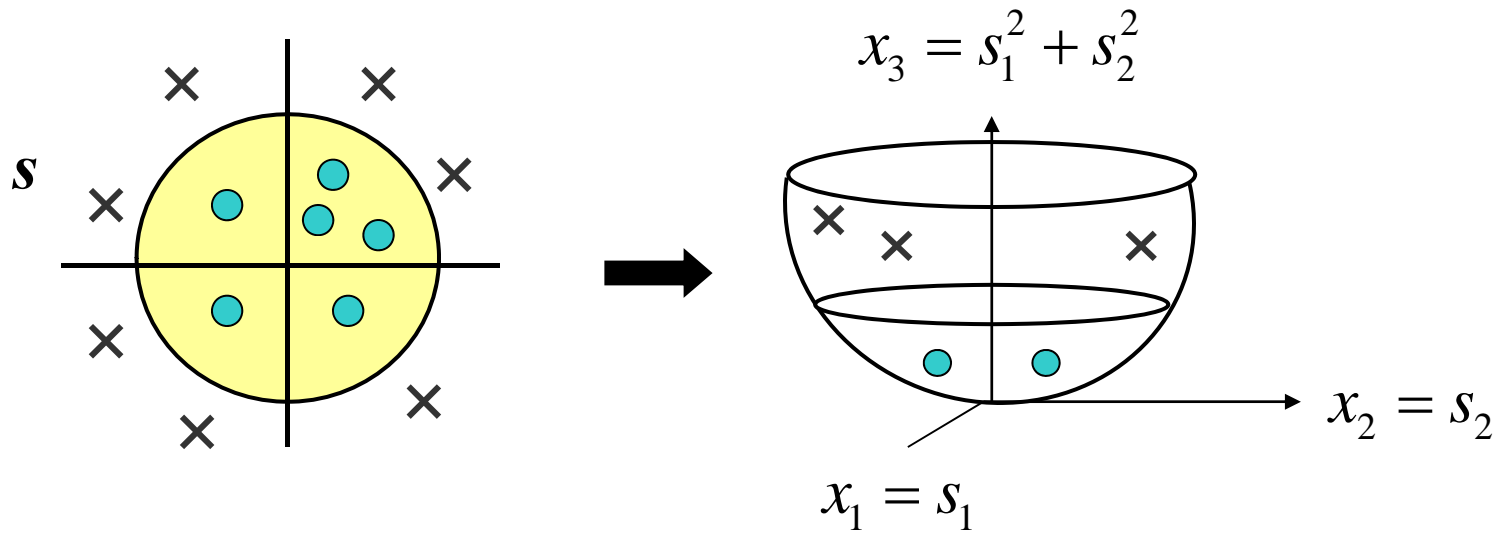
$$w \rightarrow w' = w + ex$$

$$e = \begin{cases} 1 & \text{incorrect answer for } \bullet \\ 0 & \text{correct answer} \\ -1 & \text{incorrect answer for } \times \end{cases}$$

Perceptron convergence theorem



Linear discriminant



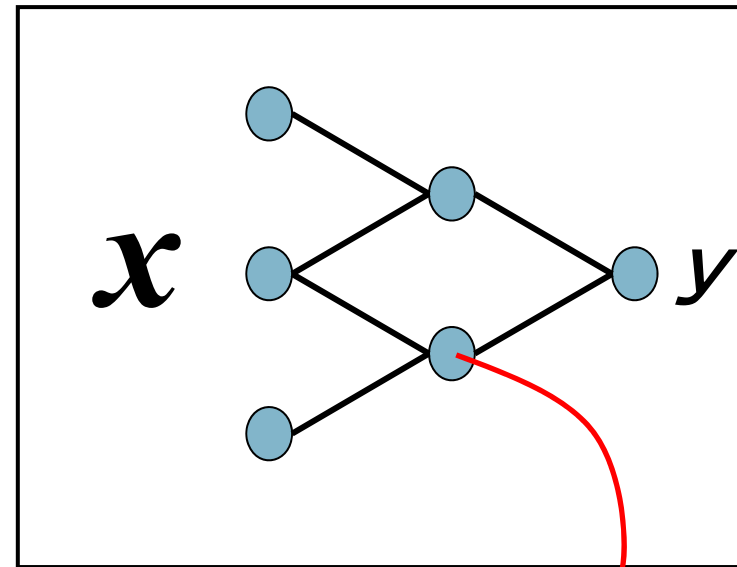
Multi-dimensionalization

Model of a cerebellar perceptron

Multilayer perceptron

$$y = \sum v_i \varphi(\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{x}) + n$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$



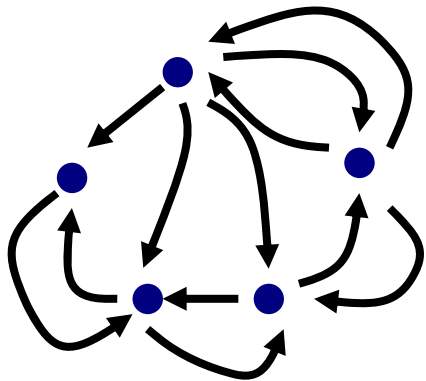
$$\varphi(\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{x})$$

$$f(\mathbf{x}, \theta) = \sum v_i \varphi(\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{x})$$

$$\theta = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m; v_1, \dots, v_m)$$

Neural dynamics

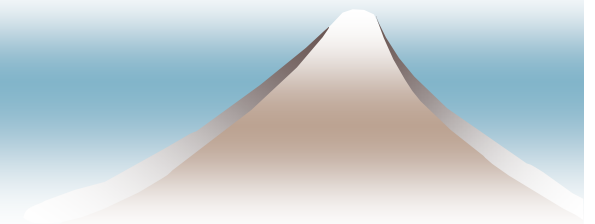
Dynamics of majority decision:
Delphi method
multistability



$$\dot{x}_i = \text{sgn} \left(\sum w_{ij} x_j \right)$$

$$\mathbf{x}(t+1) = T\mathbf{x}(t)$$

Neural economic theory
Ultimatum game



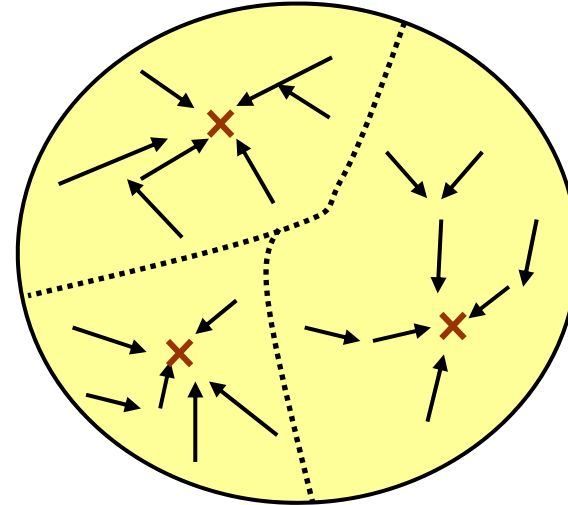
Associative memory and the hippocampus

$$\mathbf{x}_1 = (10110)$$

$$\mathbf{x}_2 = (01001)$$

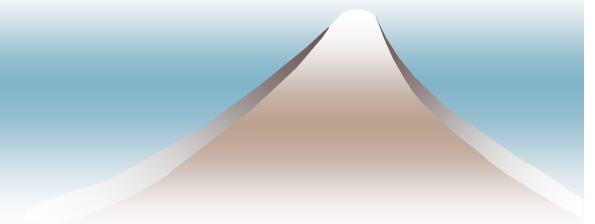
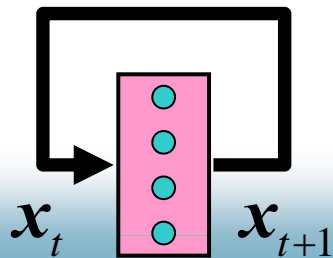
M

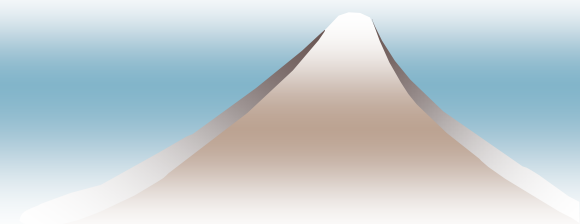
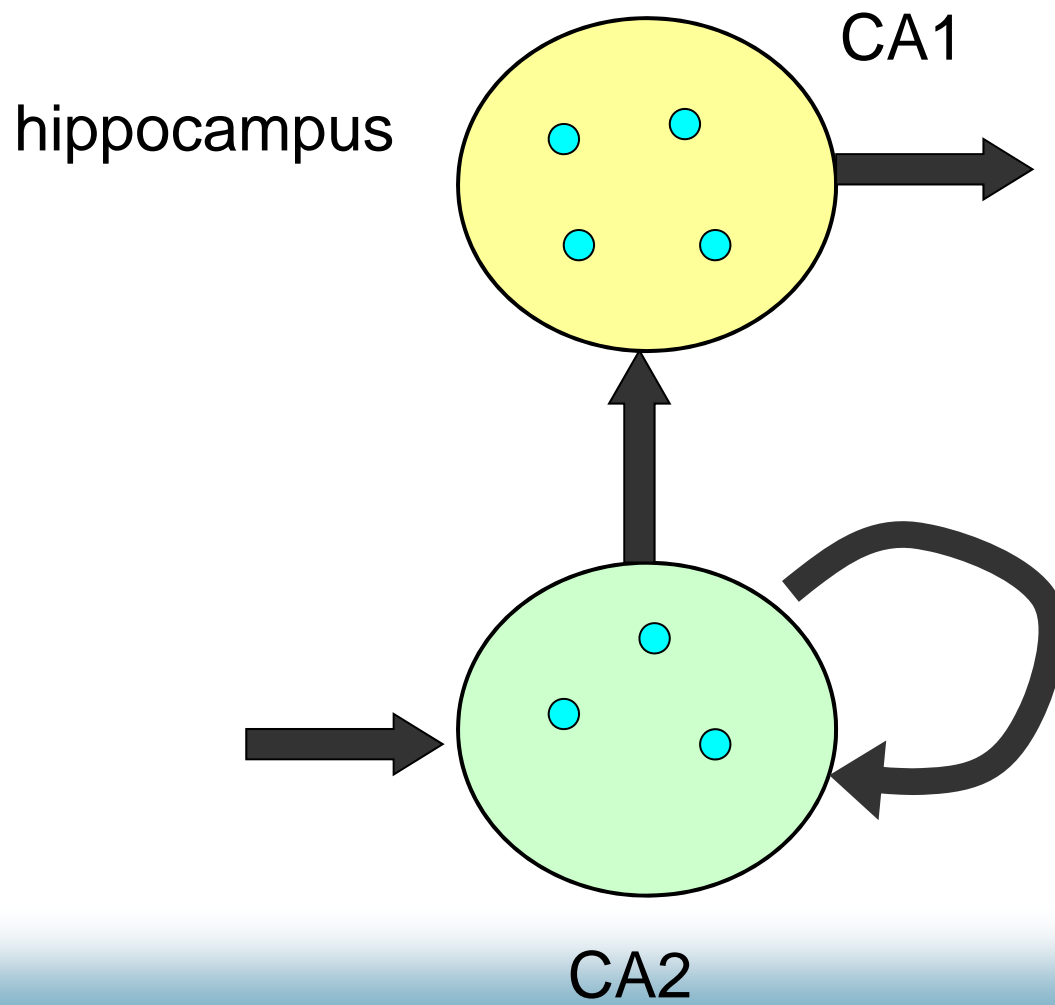
$$\mathbf{x}_k = (11100)$$



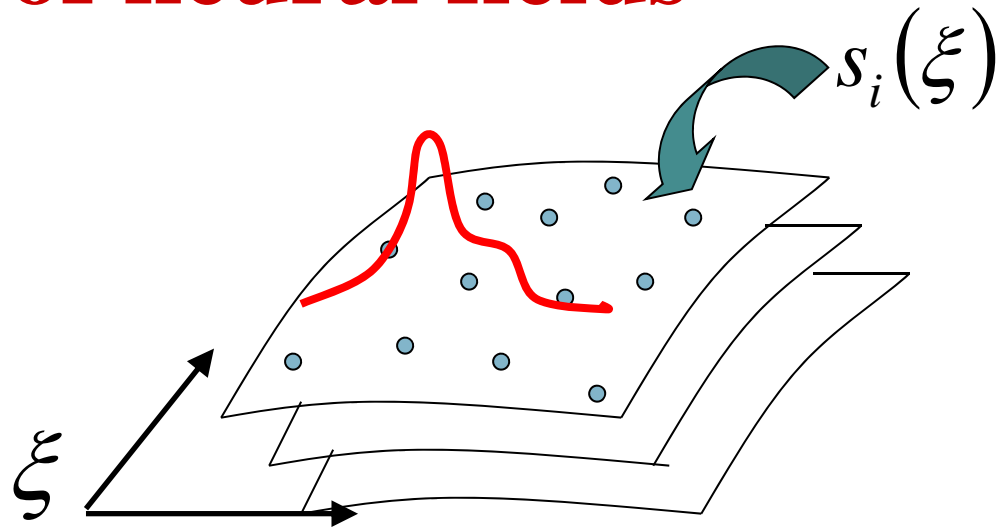
dynamics

$$\mathbf{x}(t+1) = T\mathbf{x}(t)$$



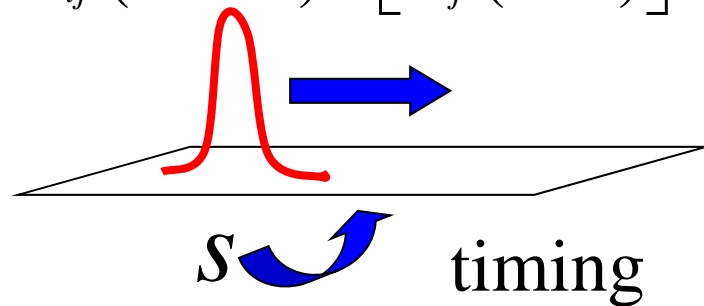


III dynamics of neural fields



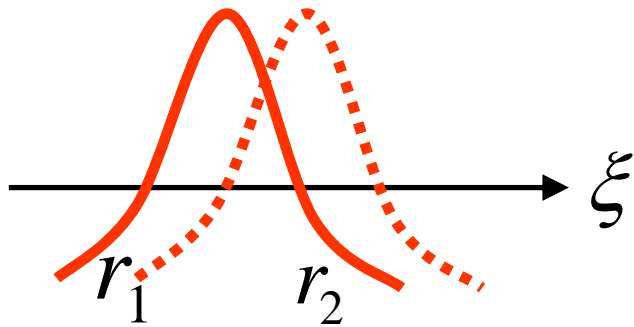
$$\tau \frac{\partial u_i(\xi, t)}{\partial t} = -u_i(\xi, t) + \sum_j \int w_{ij}(\xi - \xi') f[u_j(\xi', t)] d\xi' + s_i(\xi, t)$$

local excitations:
 travelling wave:
 oscillatory:
 memory
 decision



Amari, Biol. Cybern, 1978
 Wilson & Cowan, 1972

$$\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = -u(\xi, t) + \int w(\xi - \xi') f[u(\xi', t)] d\xi' + a$$



$$u(r_i, t) = 0 \quad u(r_i + \Delta r_i, t + \Delta t) = 0$$

$$\frac{\partial u(r_i, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(r_i, t)}{\partial \xi} \frac{\partial r_i}{\partial t} = 0$$

$$\alpha_i \frac{\partial r_i}{\partial t} = -\frac{\partial u(r_i, t)}{\partial t} = \int_{r_1}^{r_2} w(r_i - \xi') d\xi' = \pm W(r_2 - r_1)$$

$$W(\xi) = \int_0^{\xi} w(\xi) d\xi$$

Multilayer Perceptron

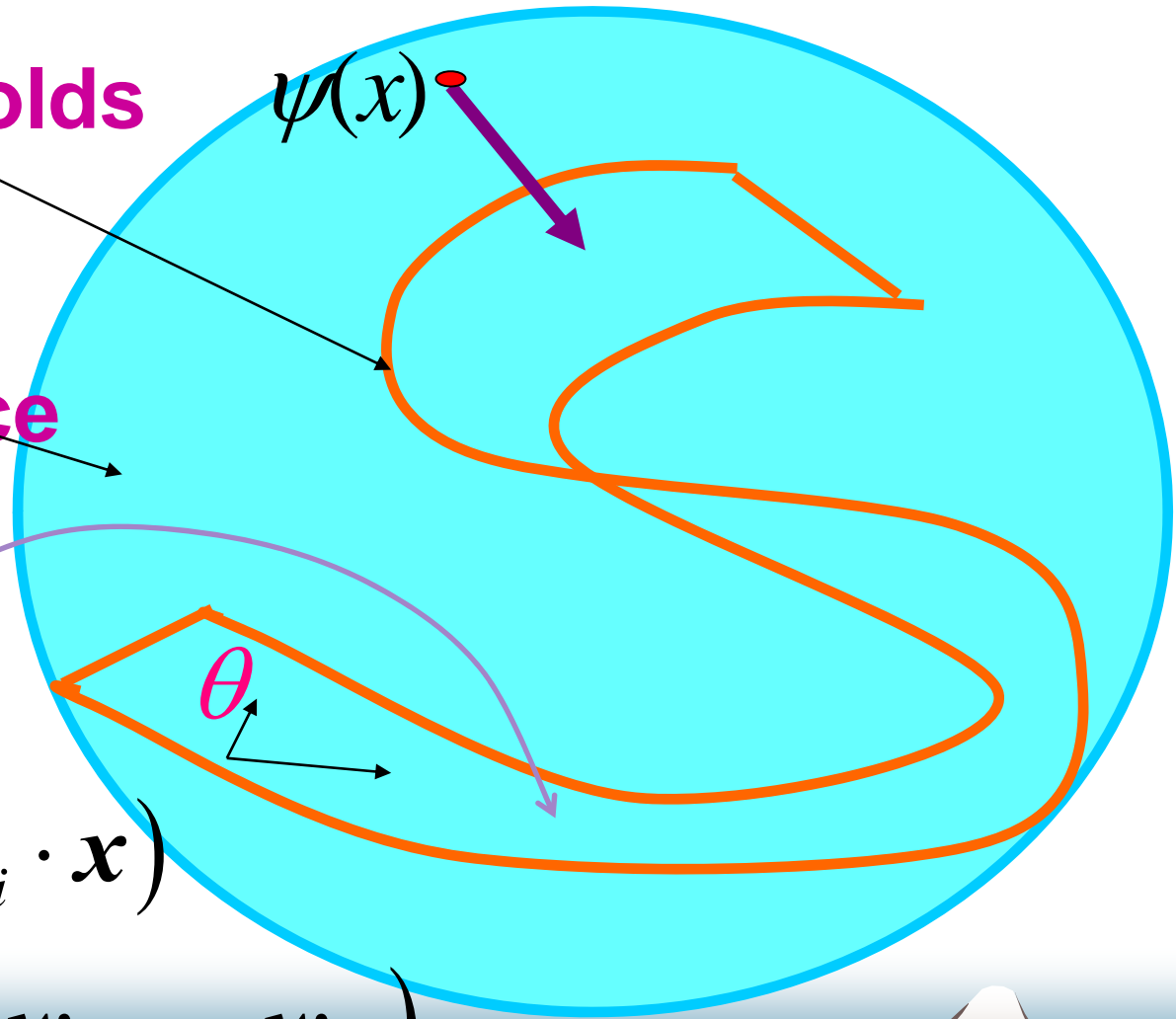
Neuromanifolds

$\psi(x)$

Function space

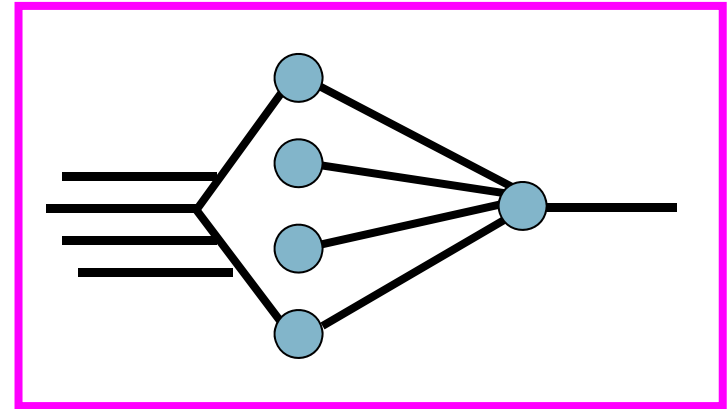
$$y = f(x, \theta) \\ = \sum v_i \varphi(\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{x})$$

$$\theta = (v_1 \cdots, v_m ; \mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m)$$

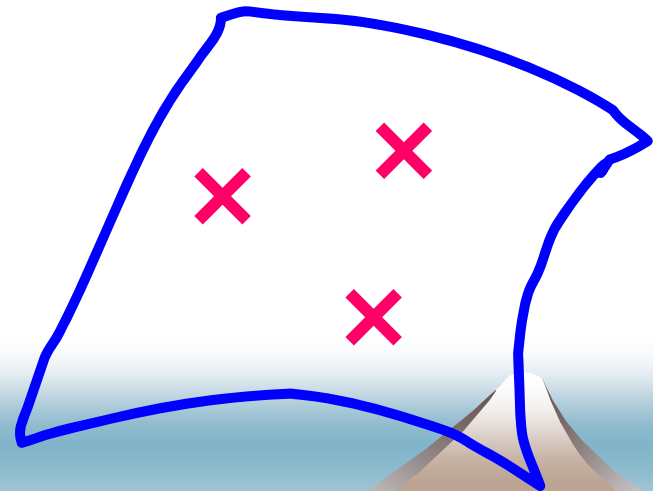
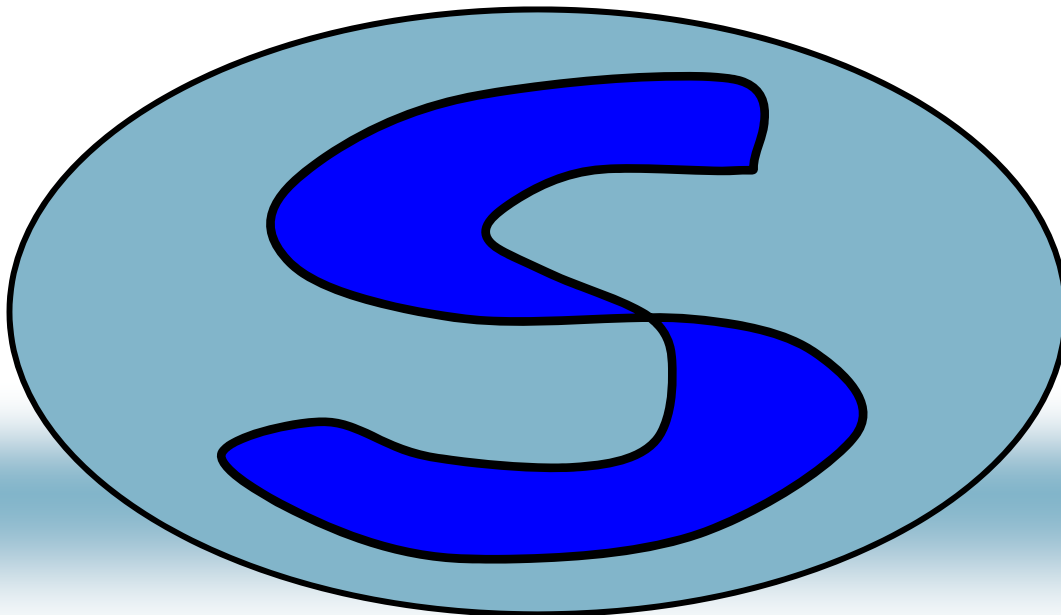


neuromanifolds

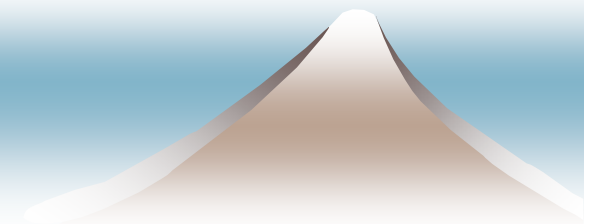
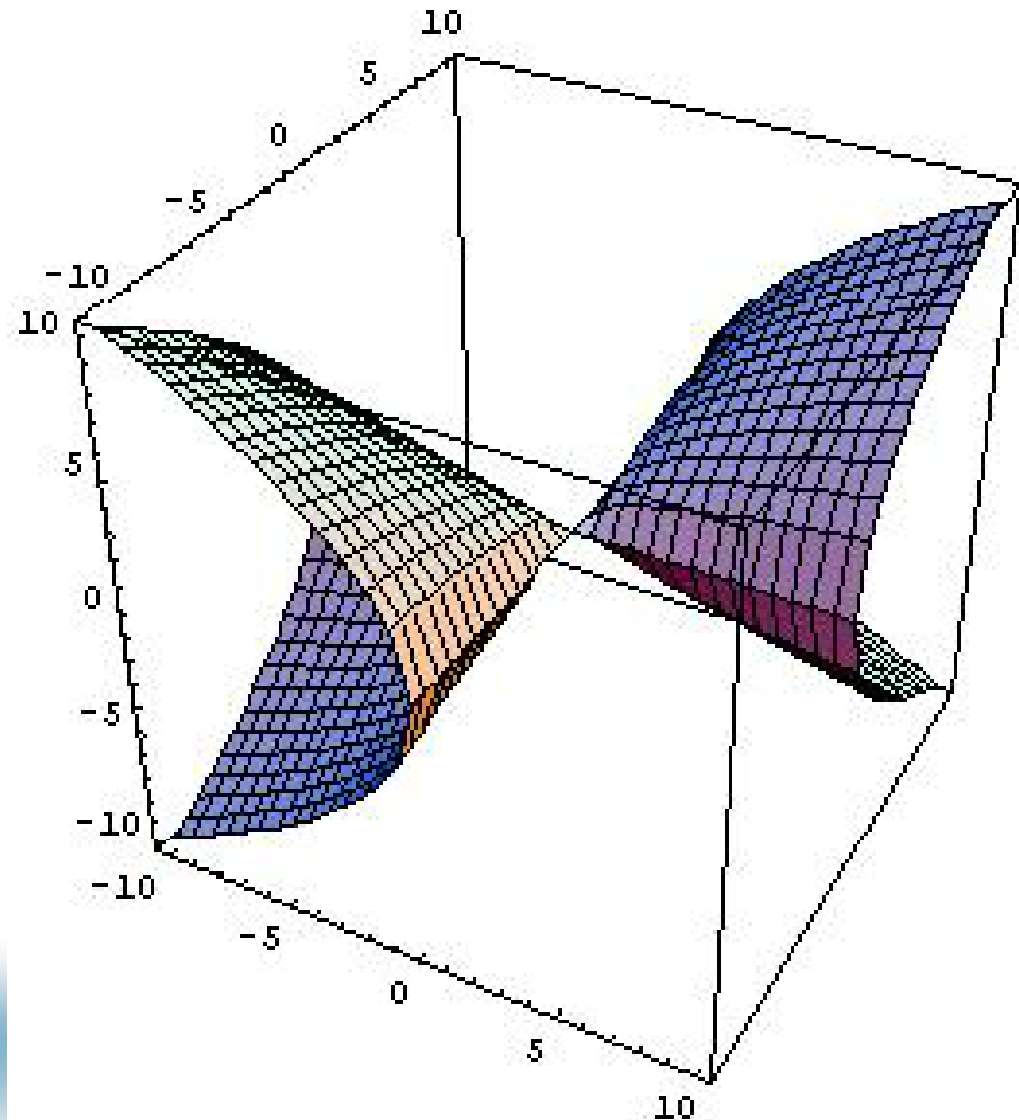
- ◆ Metric structure
- ◆ Topological structure



θ

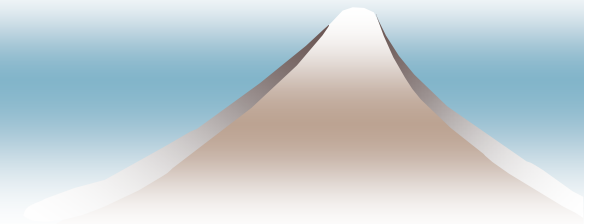
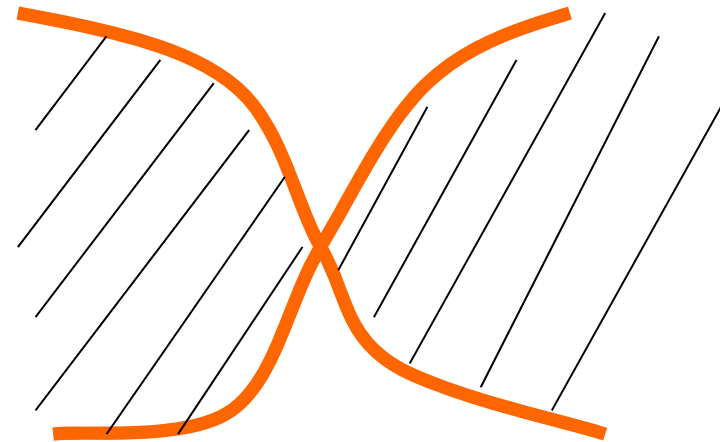
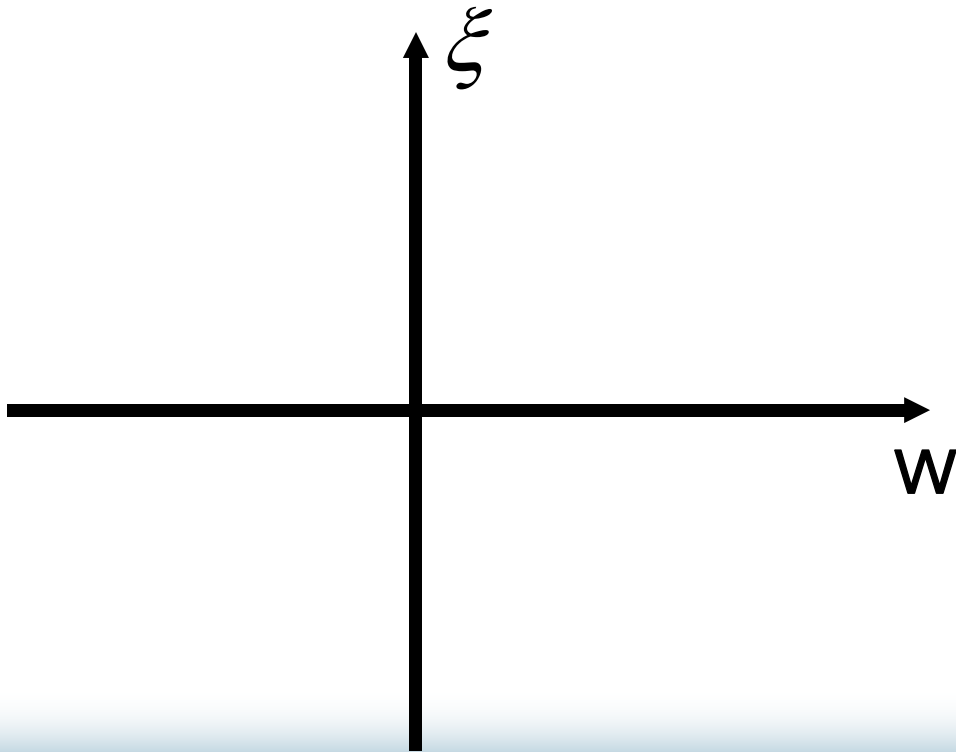


Singular point on MLP—an example



An example of singular models

$$y = v\varphi(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) + n \quad \xi \mid \mathbf{w} \mid = 0$$



If you are interested in the mathematics of the brain...

