ネットワークの数理：つながりを解く

（3）ネットワーク上の感染症伝播

増田直紀
工学部 計数工学科

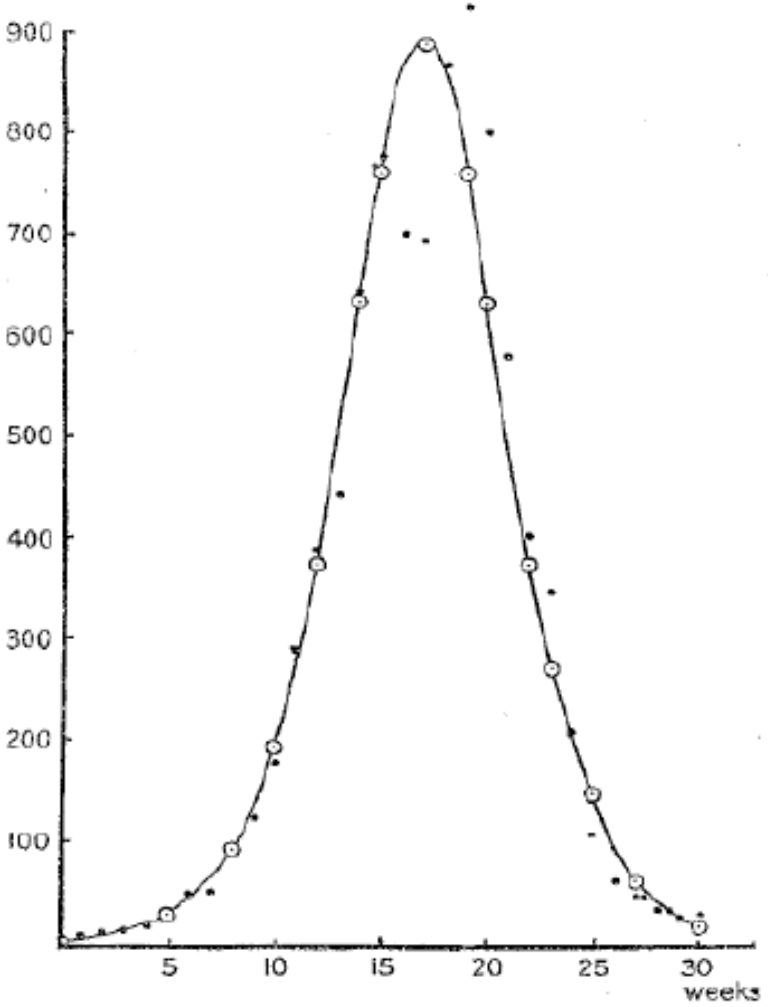
http://www.stat.t.u-tokyo.ac.jp/~masuda/

ǂ:このマークが付してある著作物は、第三者が有する著作物ですので、同著作物の再使用、同著作物の二次的著作物の創作等については、著作権者より直接使用許諾を得る必要があります。

ネットワーク上で

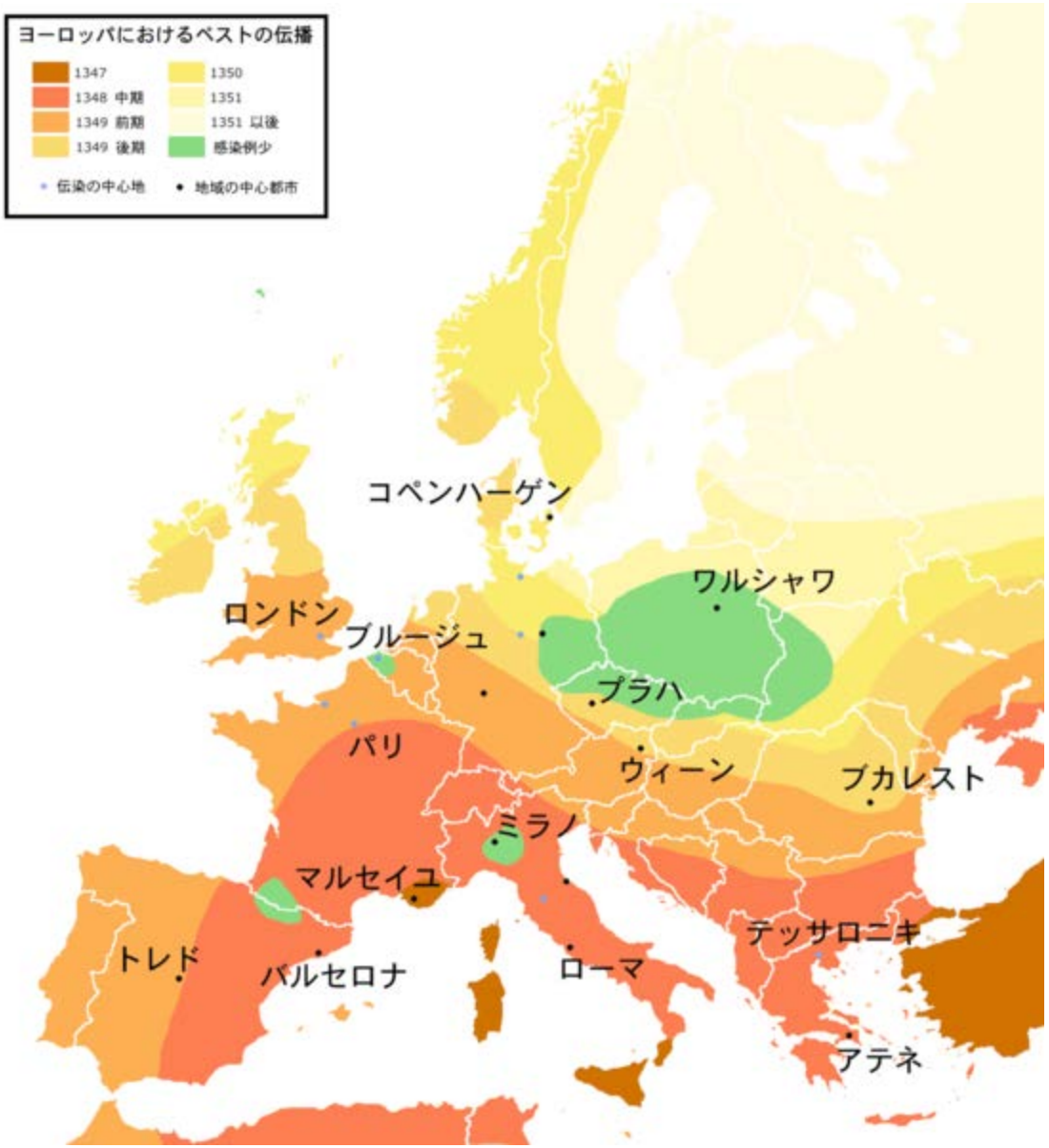
- 感染症，情報伝搬
- 意見形成，同期
- “浸透過程（パーコレーション）”
- 取引，ゲーム
- 故障の連鎖
- ランダム・ウォーク
- 食う食われる
- 信号伝達
- パケット輸送
- 以前は，これらの現象は簡単なネットワーク上でのみ解析されていた．

Bombay のペスト (1905-1906)



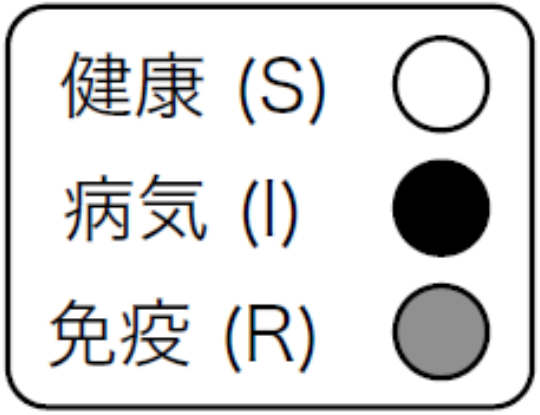
‡ W. O. Kermack and A. G. McKendrick (1927)
A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proc. R. Soc. Lond. A* 115:700-721p.714 figure.

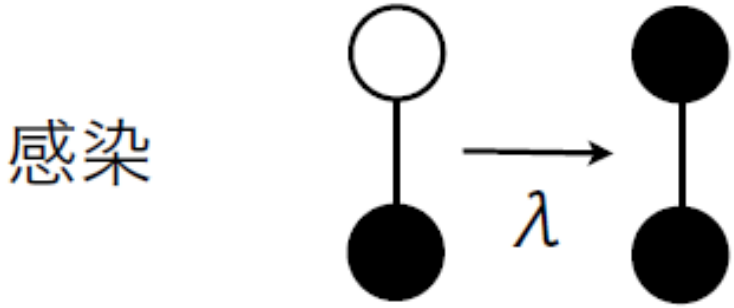
黒死病（ペスト）



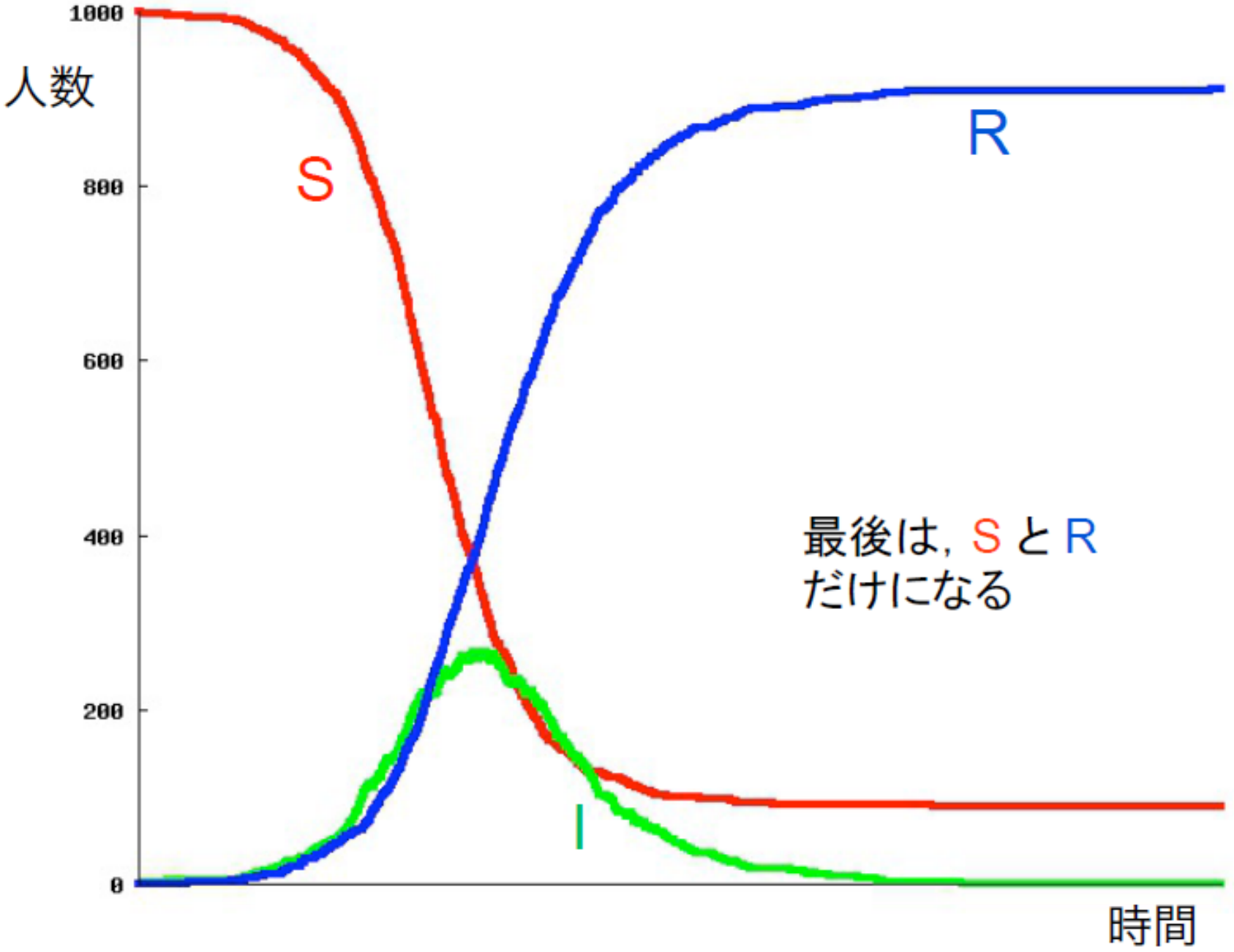
‡ Wikipediaより転載(2011/12/13)
http://ja.wikipedia.org/wiki/ファイル:Pestilence_spreading_Japane.png

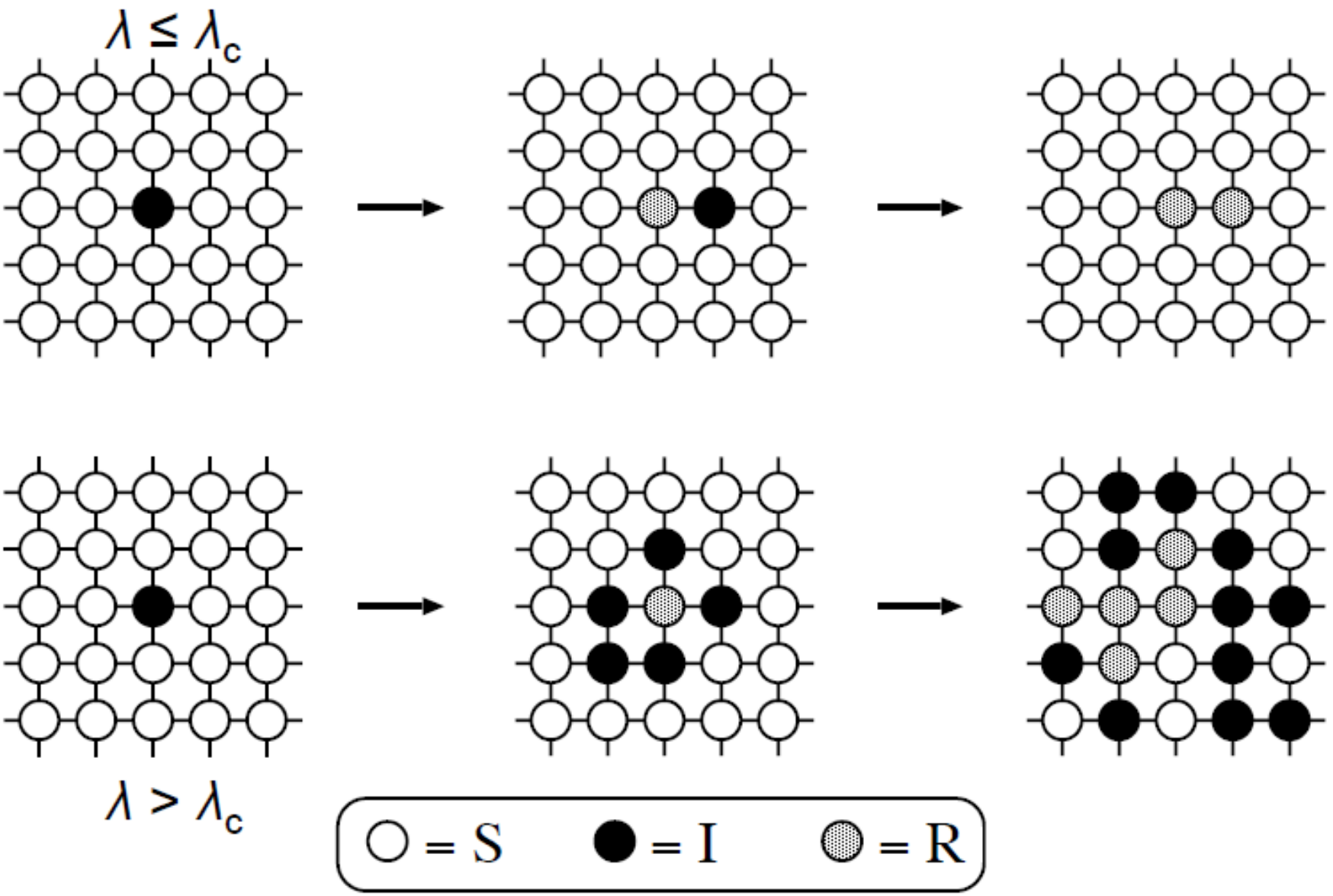
SIR モデル (Kermack & McKendrick, 1927)



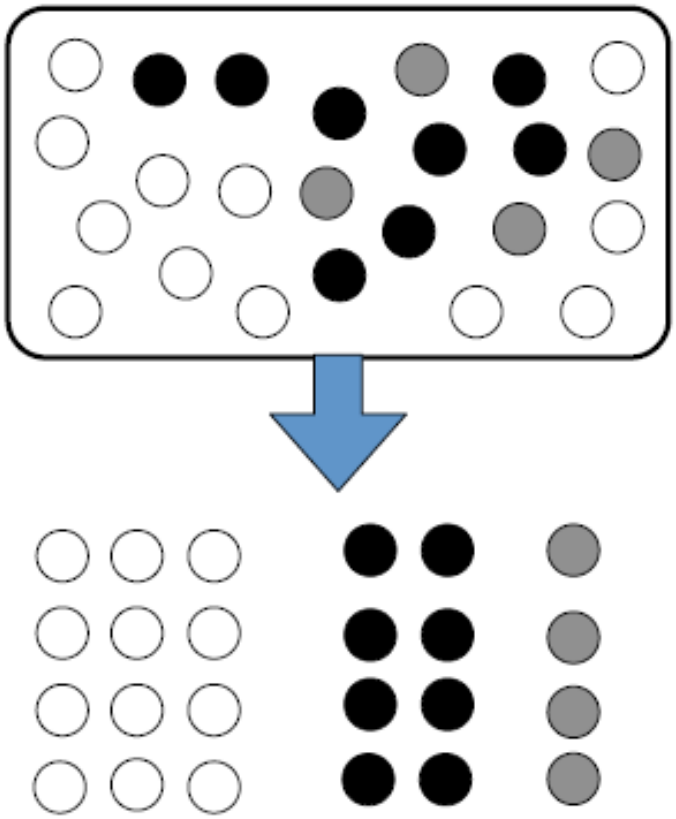


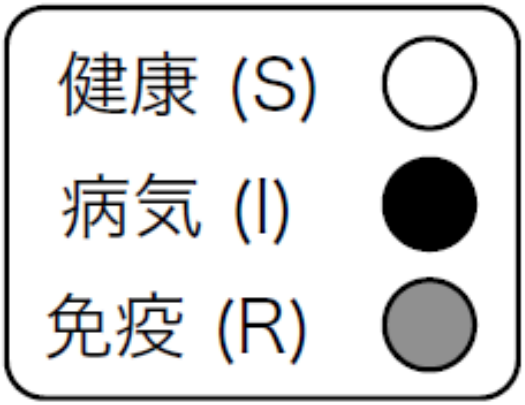
- 2 回は感染しない（免疫 or 死）状況
  - インフルエンザ
  - エイズ
  - SARS
  - 黒死病
  - はしか
  - 噂？
- 被害の大きさ = 最終的な R の数（割合）


1000
人数
800
600
400
200
0
S
R
I
最後は，S と R
だけになる
時間


$\lambda \leq \lambda_c$
$\lambda > \lambda_c$
= S
= I
= R

SIR モデルの解析





$$\frac{dS(t)}{dt} = -\lambda S(t)I(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \lambda S(t)I(t) - \mu I(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \mu I(t)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\lambda S(t) I(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \lambda S(t) I(t) - \mu I(t)$$

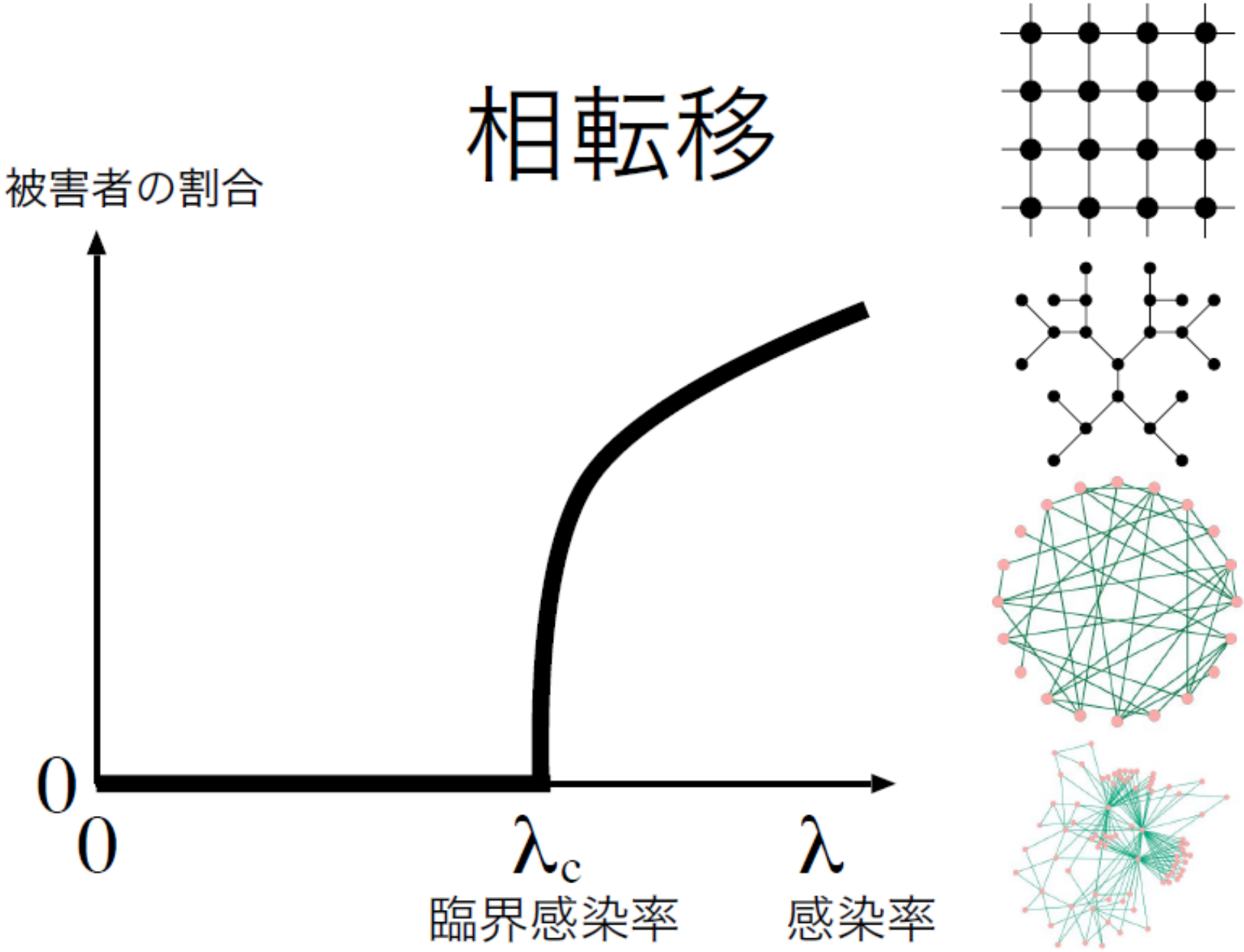
$$\frac{dR(t)}{dt} = \mu I(t)$$

$$\left.\frac{dI(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left[\lambda S(t=0) - \mu\right] I(t=0) > 0$$

のときに流行

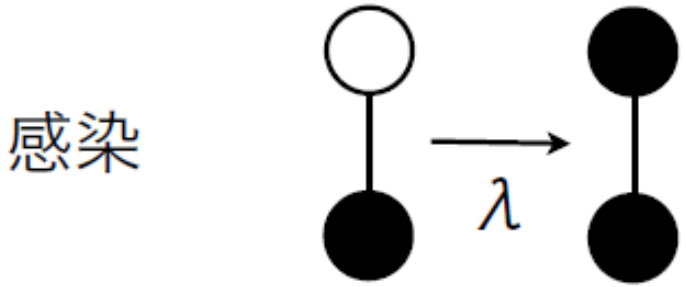
$$\begin{cases} S(t=0) \approx 1 \\ I(t=0) \approx 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda > \mu \Rightarrow \boxed{\lambda_c = \mu}$$

相転移

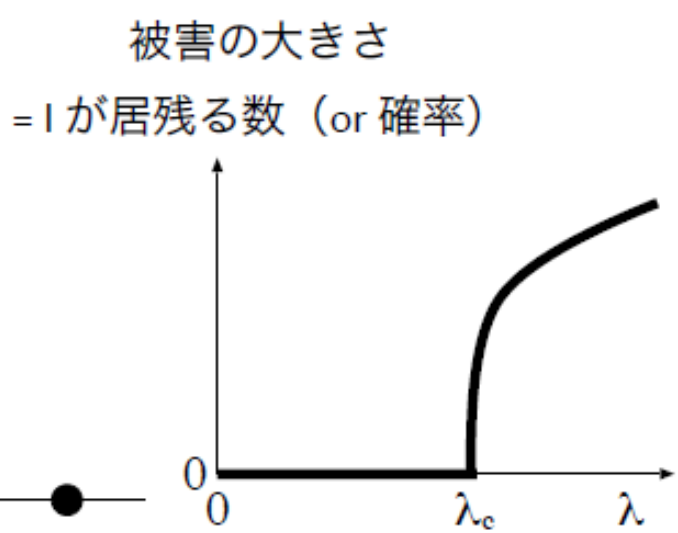


SIS モデル (1970s) ≅ contact process

風土病：淋病，ペスト，髄膜炎



注: 純粋数学では、λ_c は Z_1 に対してすら未知



問題

スケールフリー・ネットワークとスケールフリーでないネットワークでは，どちらが感染が広がりやすいか

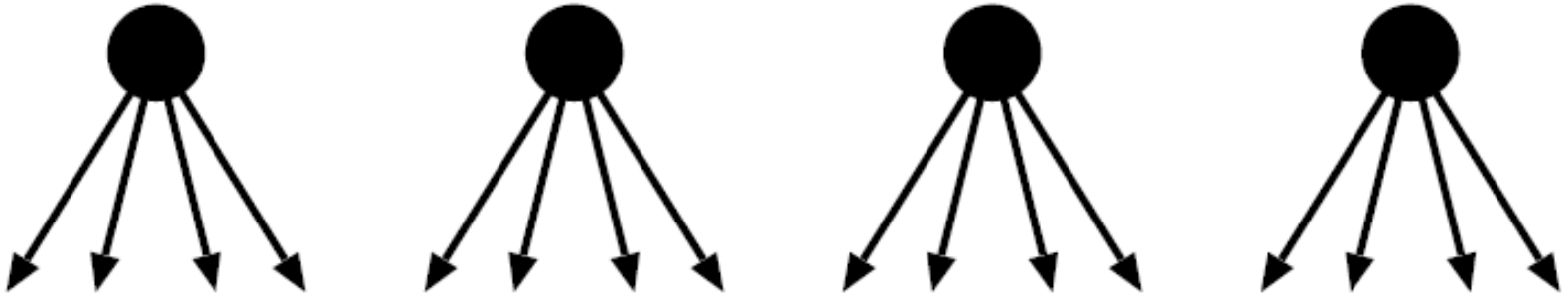
説 1

- スケールフリーでは，ハブがたくさんの人に広めるから，スケールフリーの方が感染は広がりやすい．

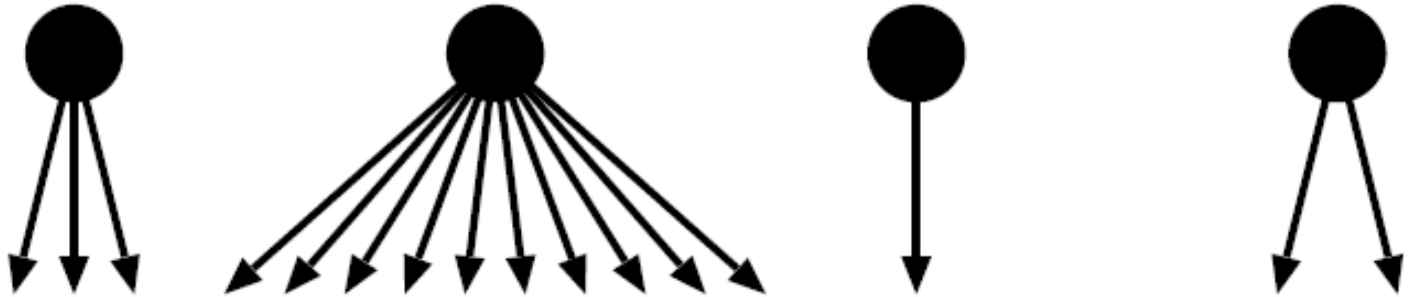
→ 誤り！

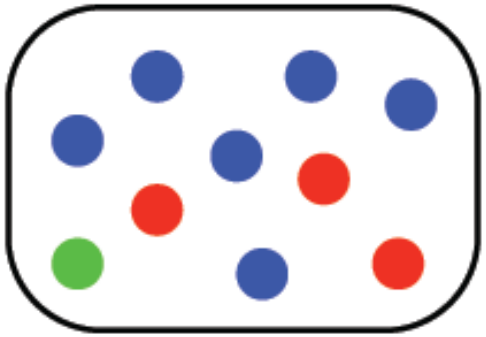
ハブの効果

スケールフリーでないネットワーク

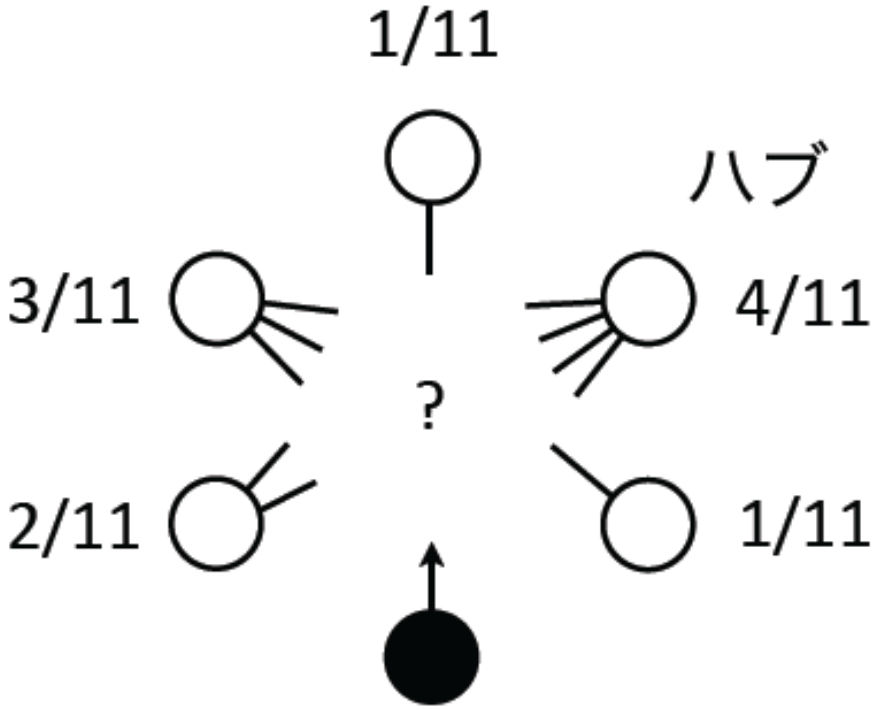


スケールフリー・ネットワーク





●	6/10
●	3/10
●	1/10



- 自分の友人は自分より有名
- ネットワークを歩けばハブに当たる

ハブがあると

- ハブに感染が入りやすい
- ハブは感染を広めやすい

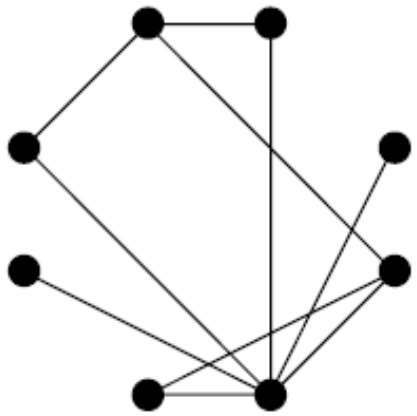
- スケールフリーでは感染が広がりやすい
- 広がる速度も（実は）速い

2 つの次数分布

- $p(k)$ = 次数が k である頂点の割合
- 隣接点の次数が k である割合 = $k\,p(k) / \langle k \rangle$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(k) = 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} kp(k) = \langle k \rangle$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp(k)/\langle k \rangle = 1$$



k	$p(k)$	$k\,p(k)/\langle k \rangle$
1	0.250	0.1
2	0.375	0.3
3	0.250	0.3
4	0	0
5	0	0
6	0.125	0.3
7	0	0

ネットワーク上の SIS モデル

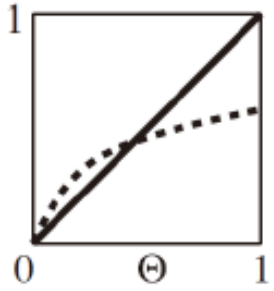
- 頂点を，次数 k でグループわけ

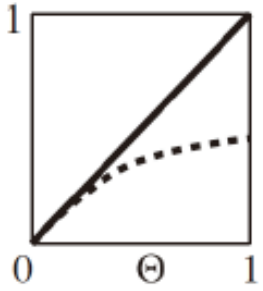
$$\frac{d\rho_k(t)}{dt} = \lambda k \left[1 - \rho_k(t)\right] \Theta(t) - \rho_k(t)$$

$$\Theta(t) = \frac{\sum_{k'=1}^{\infty} k' p(k') \rho_{k'}(t)}{\langle k \rangle}$$

$$\rho_k^* = \frac{\lambda k \Theta^*}{1 + \lambda k \Theta^*}$$

$$\Theta^* = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^{\infty} k p(k) \frac{\lambda k \Theta^*}{1 + \lambda k \Theta^*}$$





結論

$$\lambda_{\mathrm{c}} = \begin{cases} \dfrac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} & (\mathrm{SIS}) \\ \dfrac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} & (\mathrm{SIR}) \end{cases}$$

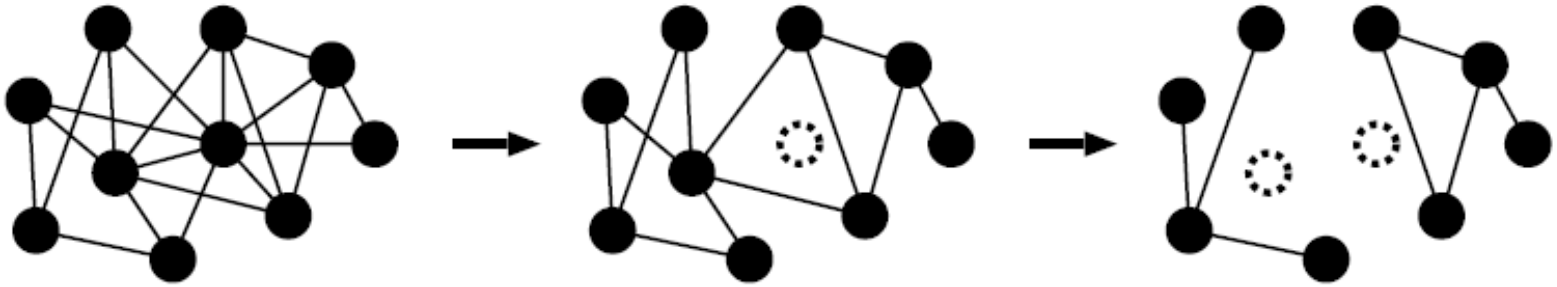
$$p(k) = ck^{-\gamma} \implies \langle k^2 \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} ck^{2-\gamma} = \infty \quad (\gamma \leq 3)$$

したがって　$\lambda_{\mathrm{c}} = 0 \quad (\gamma \leq 3)$　憂！

- 数理疫学で同等の結果は昔からある
  - SIS: Hethcote & Yorke (1984)
  - SIR: Anderson, Medley, May & Johnson (1986)

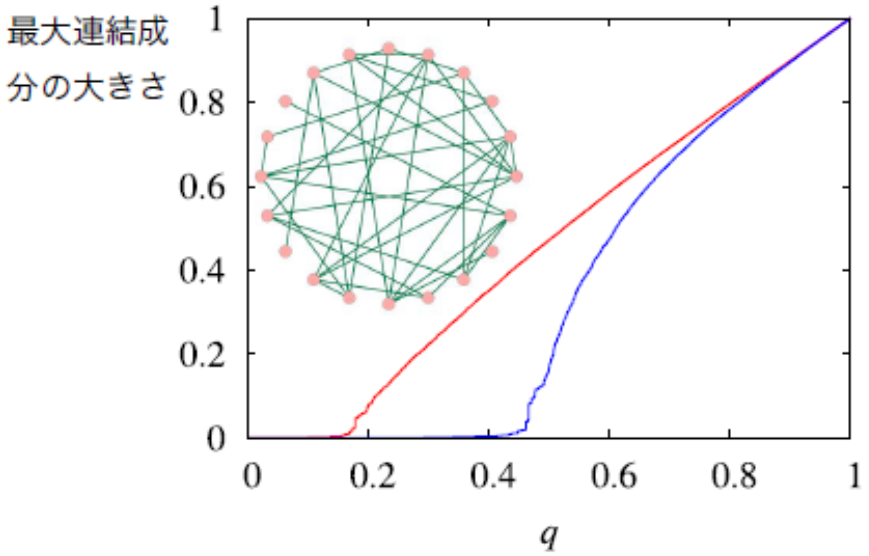
- L が小 → 感染が広がりやすい
  - しかし，スケールフリーの効果よりは小さい（経験的に）．
- C が大，次数相関がある etc. → あまり効かないようだ．

しかし「対処」は
しやすい

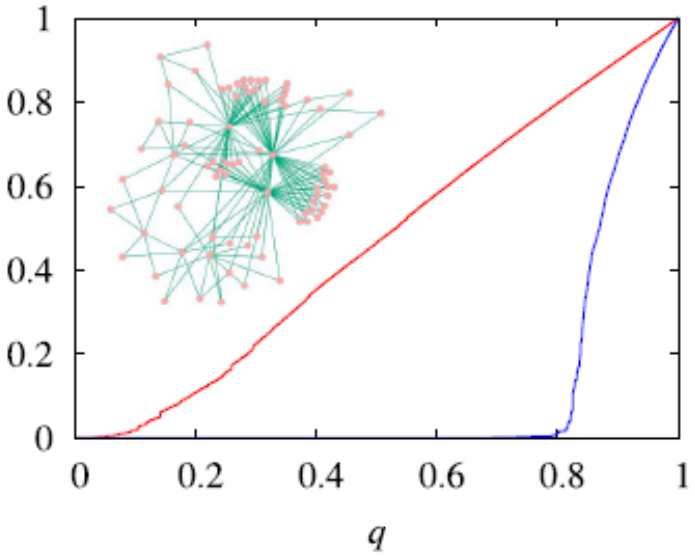


$q = 1$　　$q = 0.9$　　$q = 0.8$

ランダム・グラフ



スケールフリー



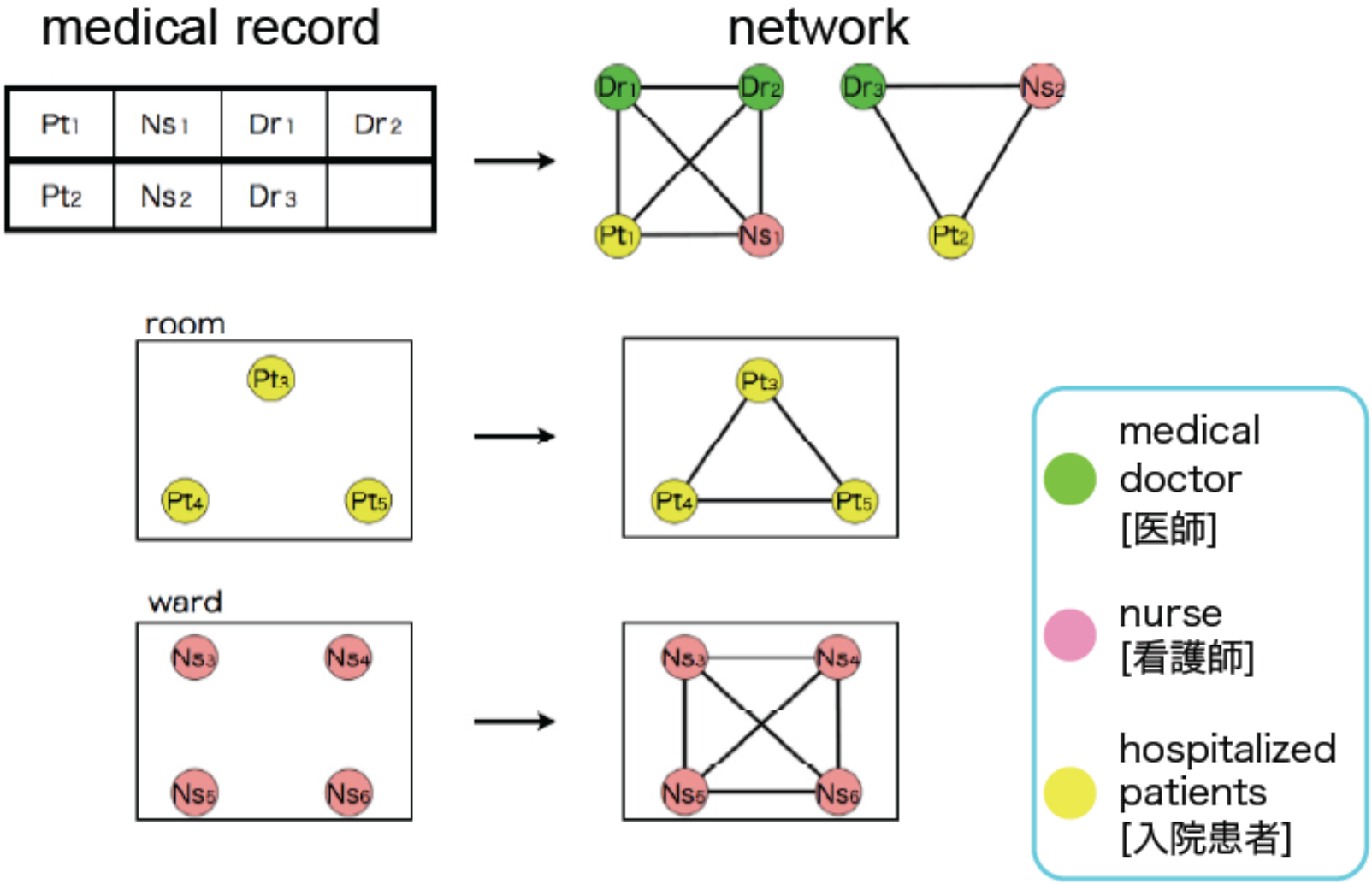
- ランダムな故障には強い
- 選択的攻撃には弱い

- ハブを狙って対処すればよい
  - 予防接種
  - 隔離
- スケールフリー・ネットワークは選択的攻撃に弱いとも.
- しかし，どうやってハブを見つける？

輪状接種

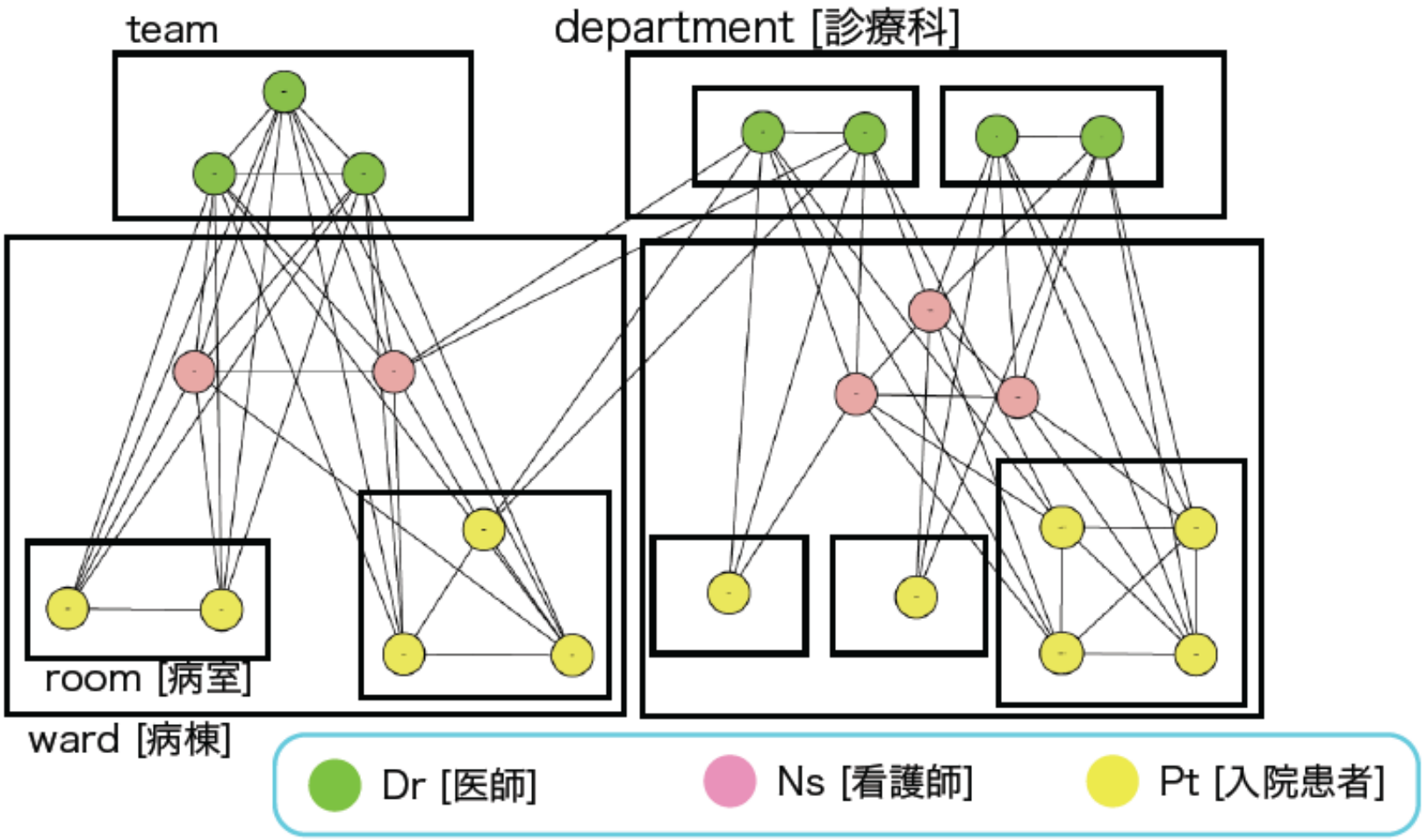
- 友達はハブでありやすい
  - あなたの友達は，あなたより有名！
- 知人を接種する
  - 2 人以上の人から知人として挙げられた人を接種するのも効果的
- ↔ 集団（マス）接種
  - ある地域の人を皆接種
  - 輪状接種よりも効率が悪い

Def of contact network

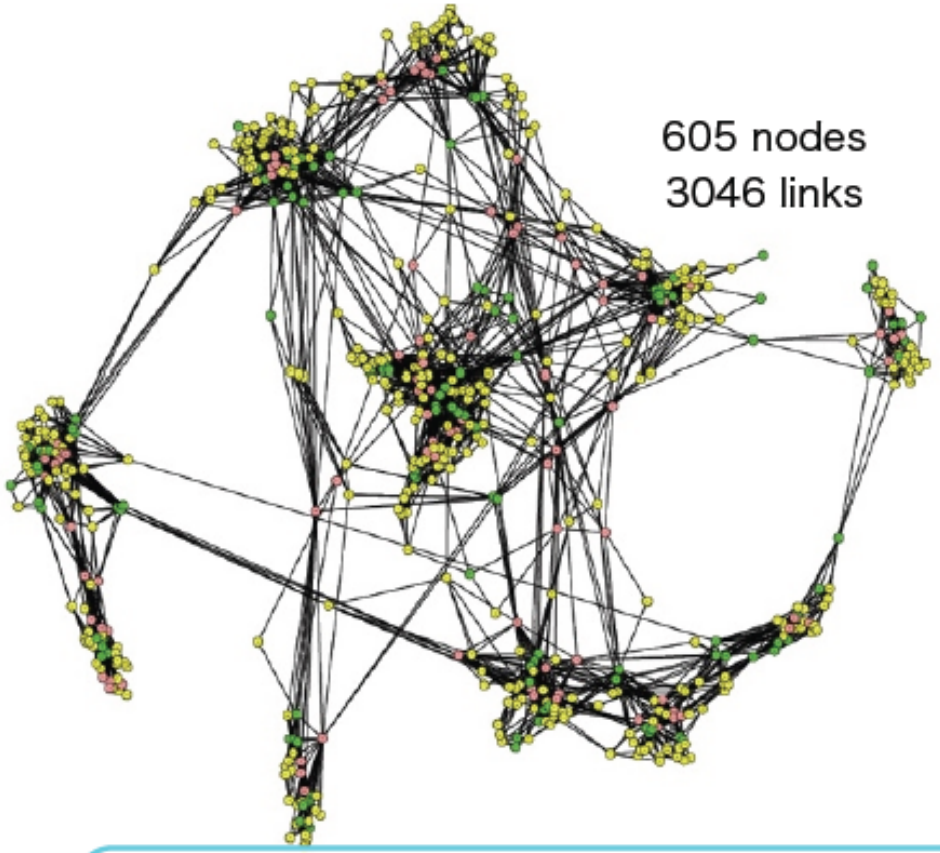


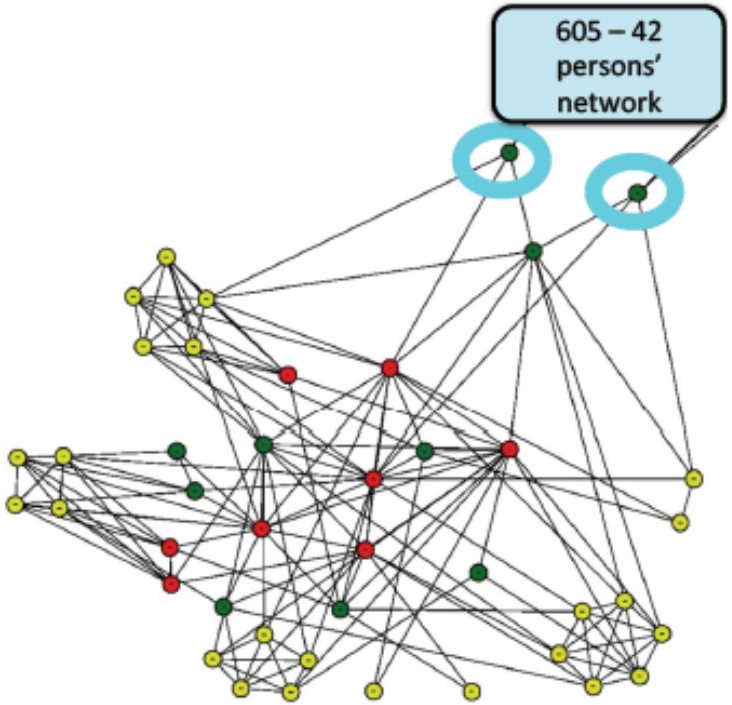
Hierarchical Structure

[ネットワークの階層構造]



Visualization





Dr [医師] 123 Ns [看護師] 94 Pt [入院患者] 388

→ Drs are across-ward transmitters?

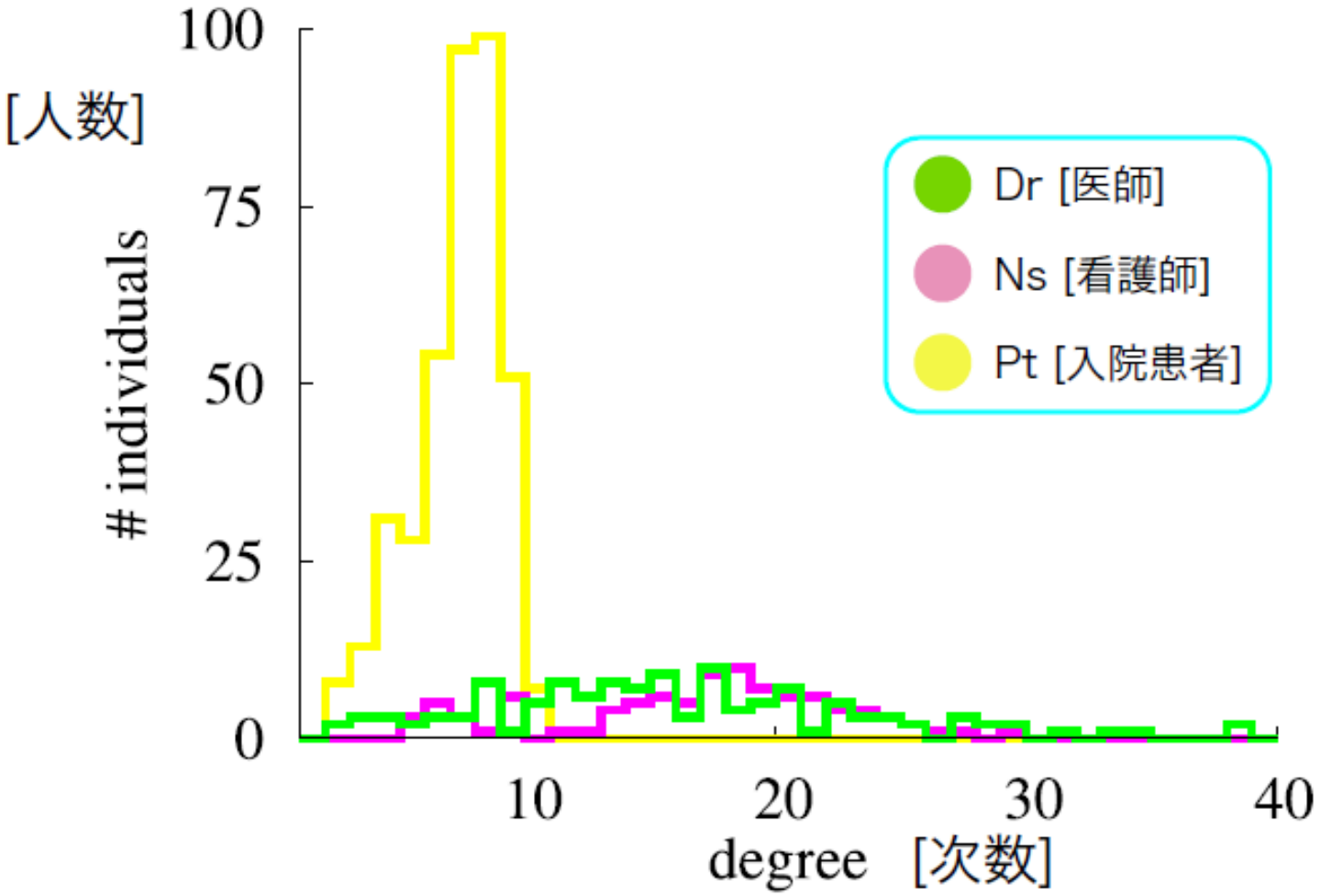
Network Properties

	characteristic path length	clustering coefficient
hospital network	4.39	0.53
randomized network	3.02	0.029

☑ Small-world and hierarchical

Degree distribution

[次数分布]



Network Intervention

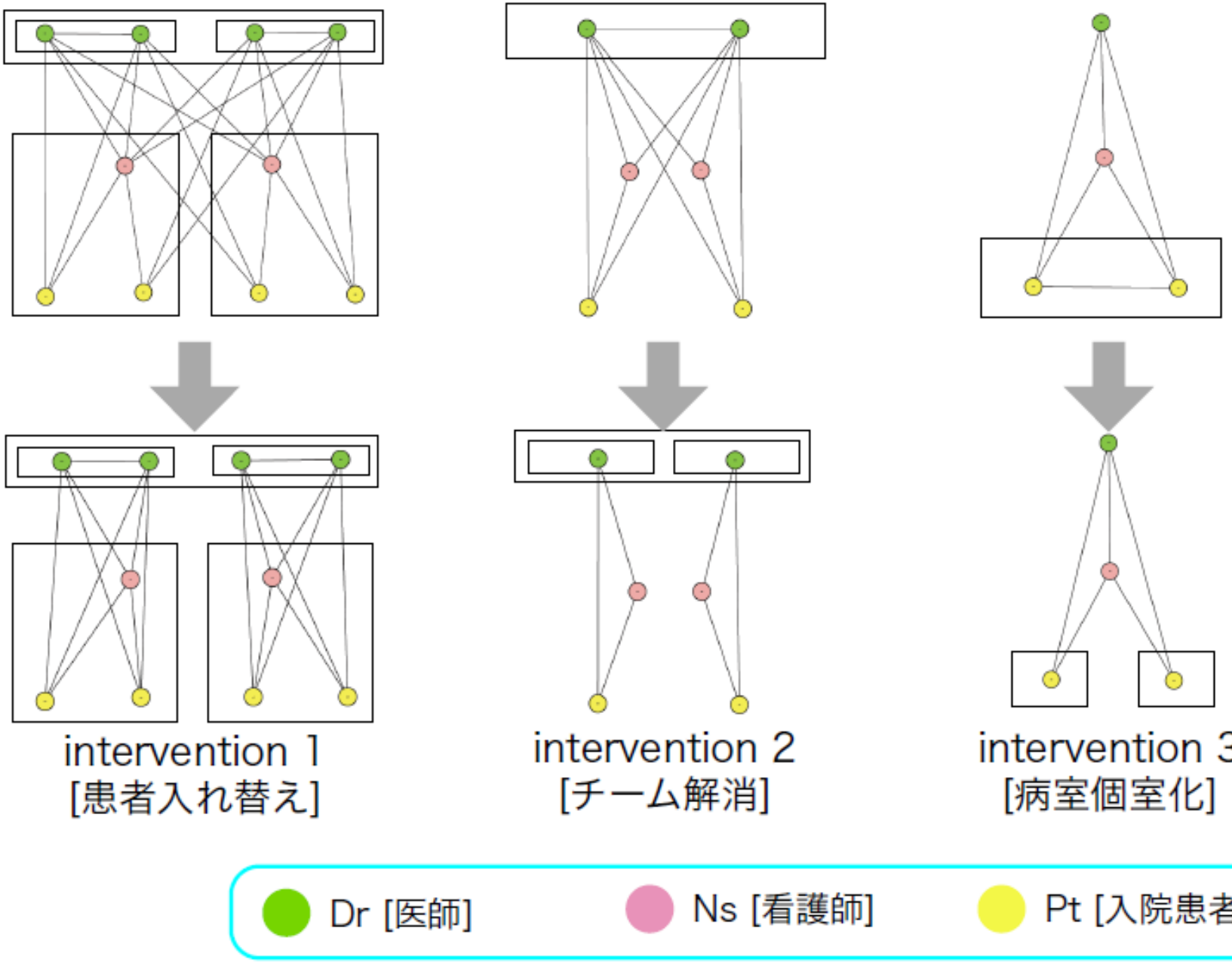
Intervention strategies

cost

1 : Reassigning patients to medical doctors [担当入院患者を診療科内で入れ替え]

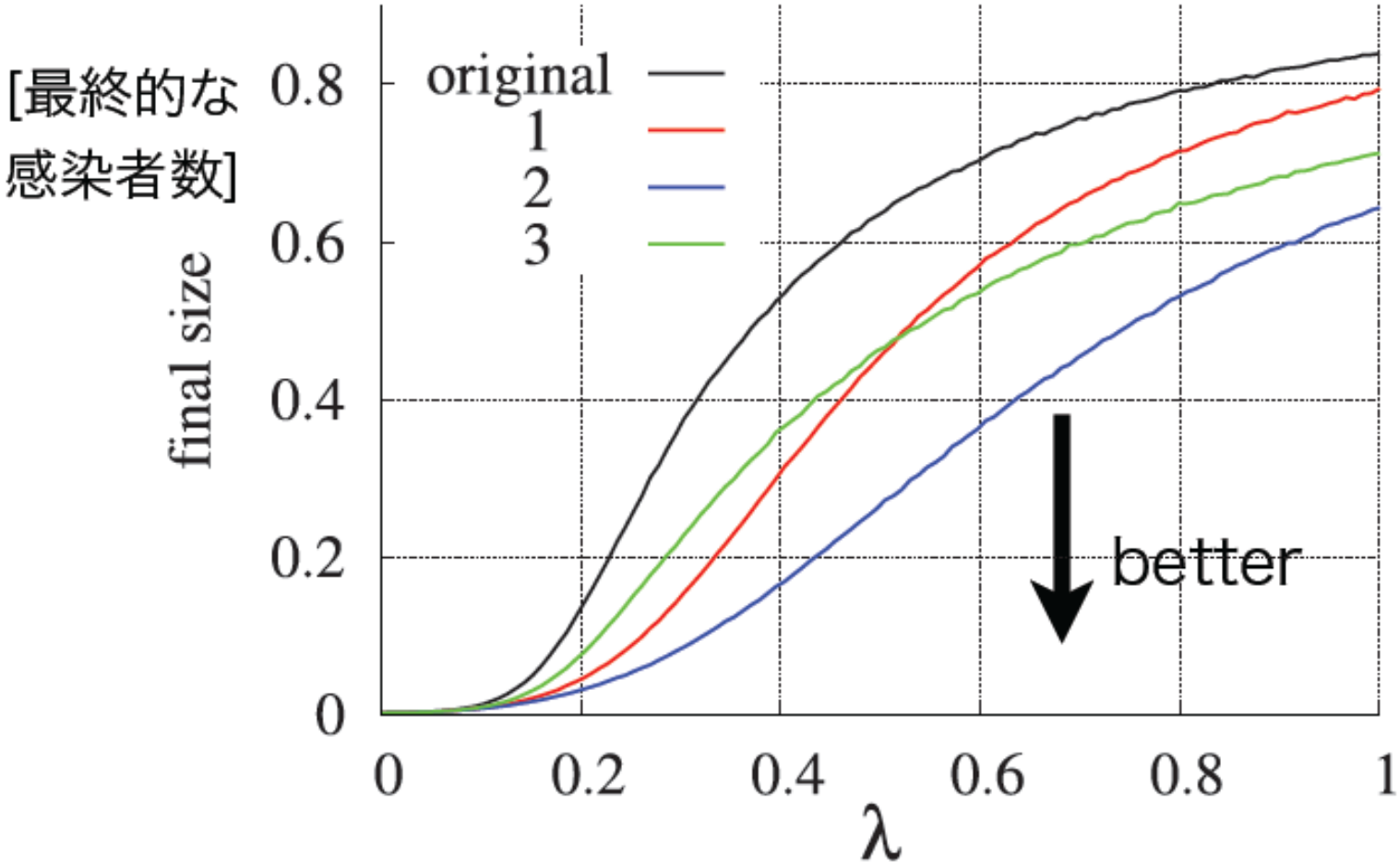
2 : Dissolving doctors' teams [医師のチーム解消]

3 : Introduction of single rooms [病室の個室化]


intervention 1
[患者入れ替え]
intervention 2
[チーム解消]
intervention 3
[病室個室化]
Dr [医師]
Ns [看護師]
Pt [入院患者]

Network intervention

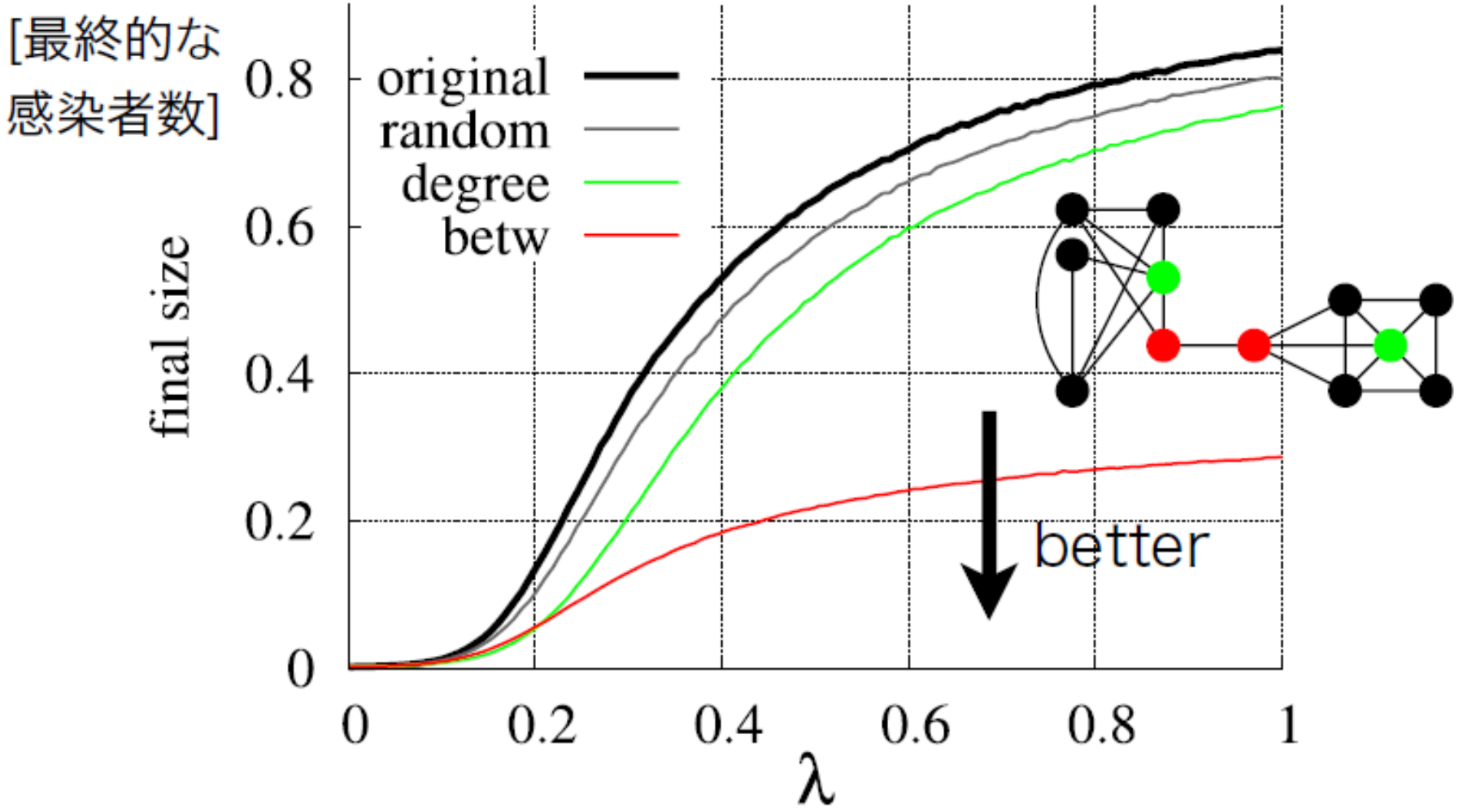
[ネットワークへの介入の効果]



☑ Effectiveness: 2 > 1 > 3

Effect of vaccination

[予防接種の効果]



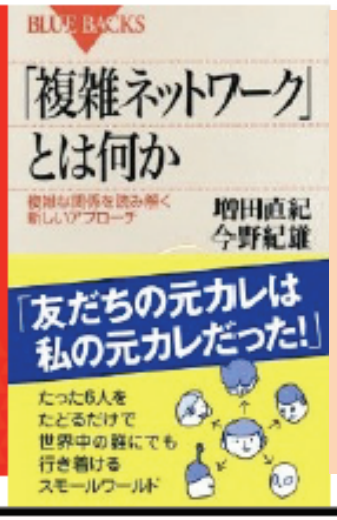
- 私の HP の「書籍紹介」 http://www.stat.t.u-tokyo.ac.jp/~masuda/books.html に拙著の情報

- そこからダウンロードできる赤い本の補遺 (PDF) には各種啓蒙書の情報も.

2010 2006 2007

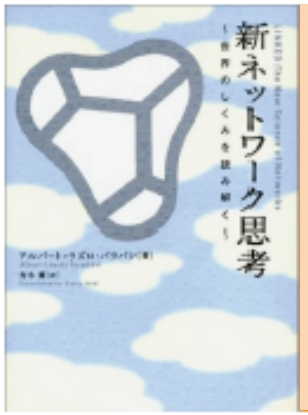
‡近代科学社、2010年

‡ 講談社、2006年

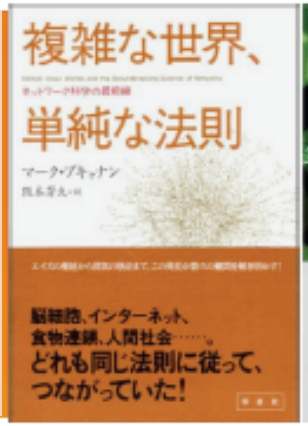


増田 直紀
『私たちはどうつながっているのか』
中公新書、2007年

専門的 ⟷ 一般向け



ダンカン・ワッツ
『スモールワールド・ネットワーク : 世界を知るための新科学的思考法』
辻竜平・友知政樹訳
阪急コミュニケーションズ、2004年



‡ NHK出版、2002年

‡ 草思社、2005年

‡ 早川書房、2005年

‡ 講談社、2010年

‡ 安田雪著
光文社、2010年