学術俯瞰講義

「国境なき数学」
ーことばを越えて社会とともにー

2011年度冬学期

第2回「歴史の中を貫く数学ー数学の誕生」

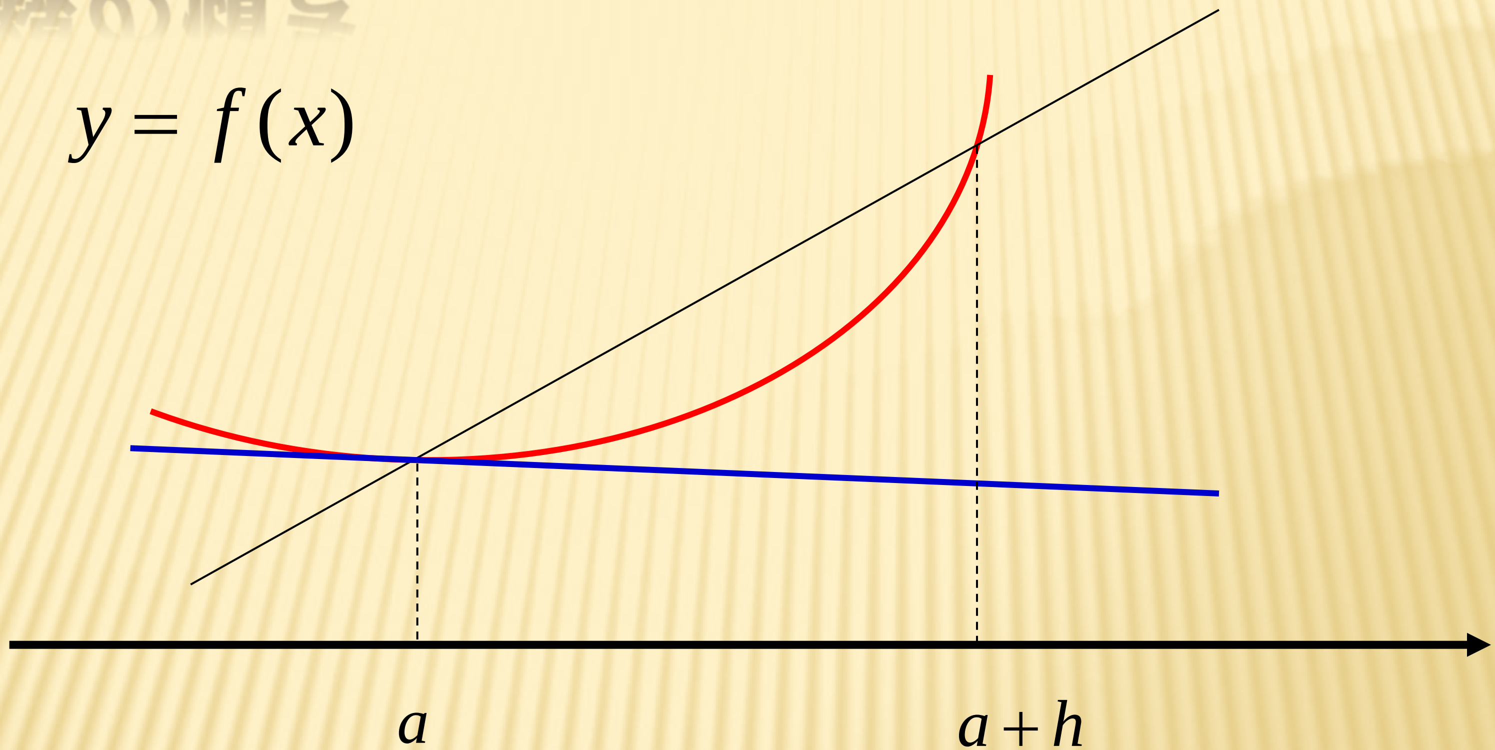
2011/10/19　岡本和夫

ǂ：このマークが付してある著作物は、第三者が有する著作物ですので、同著作物の再使用、同著作物の二次的著作物の創作等については、著作権者より直接使用許諾を得る必要があります。

微積分を使ってみるーその1

まずは復習と確認から

接線の傾き



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

関数の近似

$$f(a+h) \approx f(a)$$ 第0次近似

$$f(a+h) \approx f(a) + Ah$$

$$A \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$ 第1次近似

導関数の定義

$$f(x+h) = f(x) + Ah + h\varepsilon(h)$$

$$\varepsilon(0) = 0$$

が成り立つようなAを$f'(x)$と定める

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon(h)$$

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\varepsilon(h)}$$

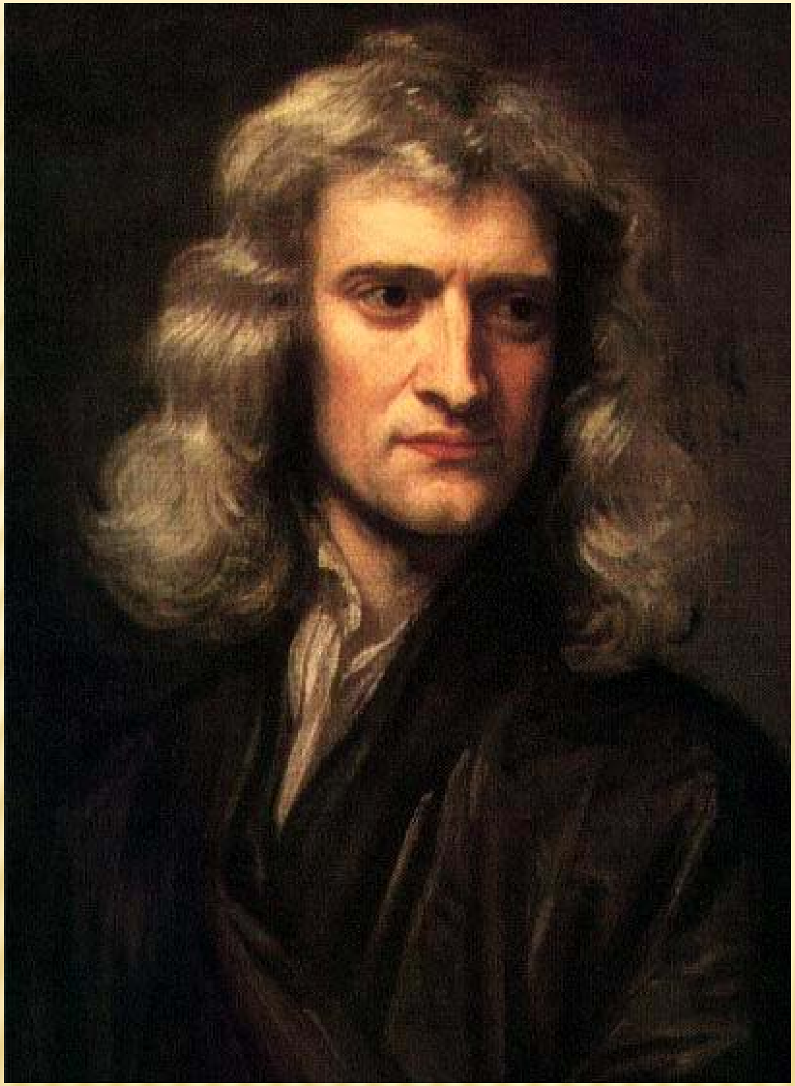
$$\vec{f}(x+h) = \vec{f}(x) + \vec{f}\,'(x)h + h\vec{\varepsilon}(h)$$

$$\vec{\varepsilon}(0) = \vec{0}$$

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

$$f_1(x+h) = f_1(x) + f_1'(x)h + h\varepsilon_1(h)$$

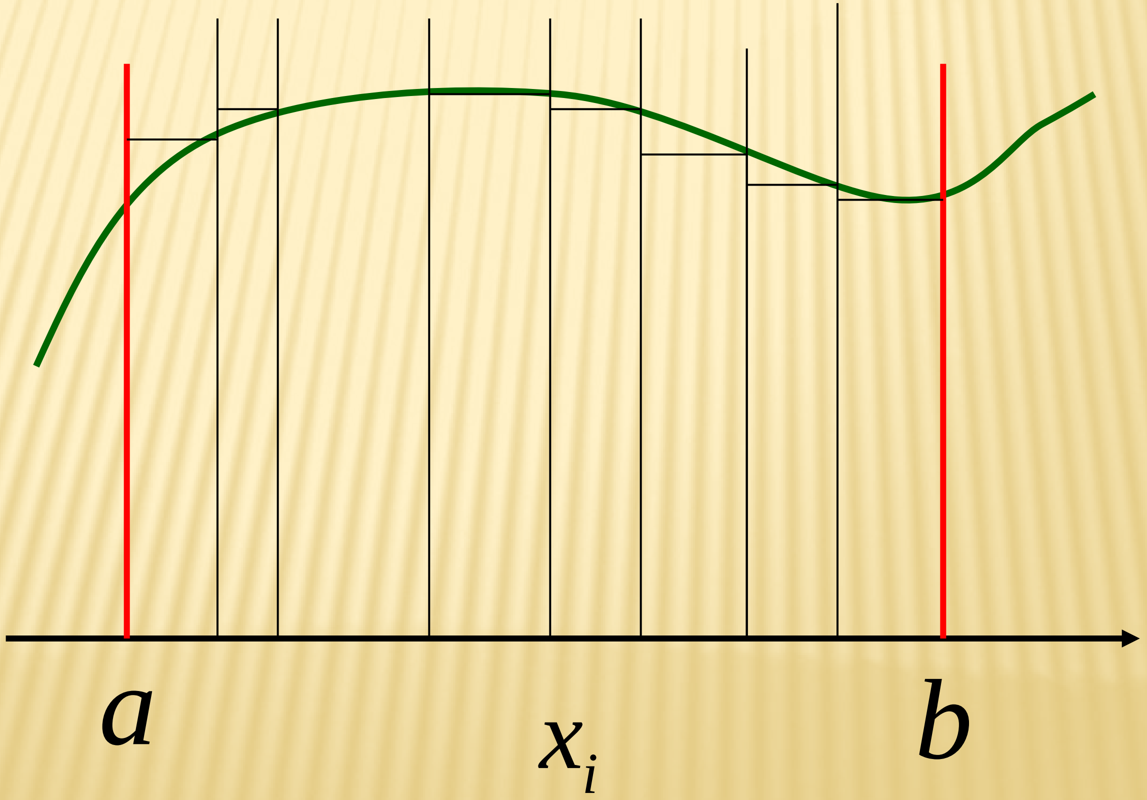
$$f_2(x+h) = f_2(x) + f_2'(x)h + h\varepsilon_2(h)$$


Wikipediaより転載(2011/10/25)
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/39/GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg

Sir Isaac Newton
1643-1727

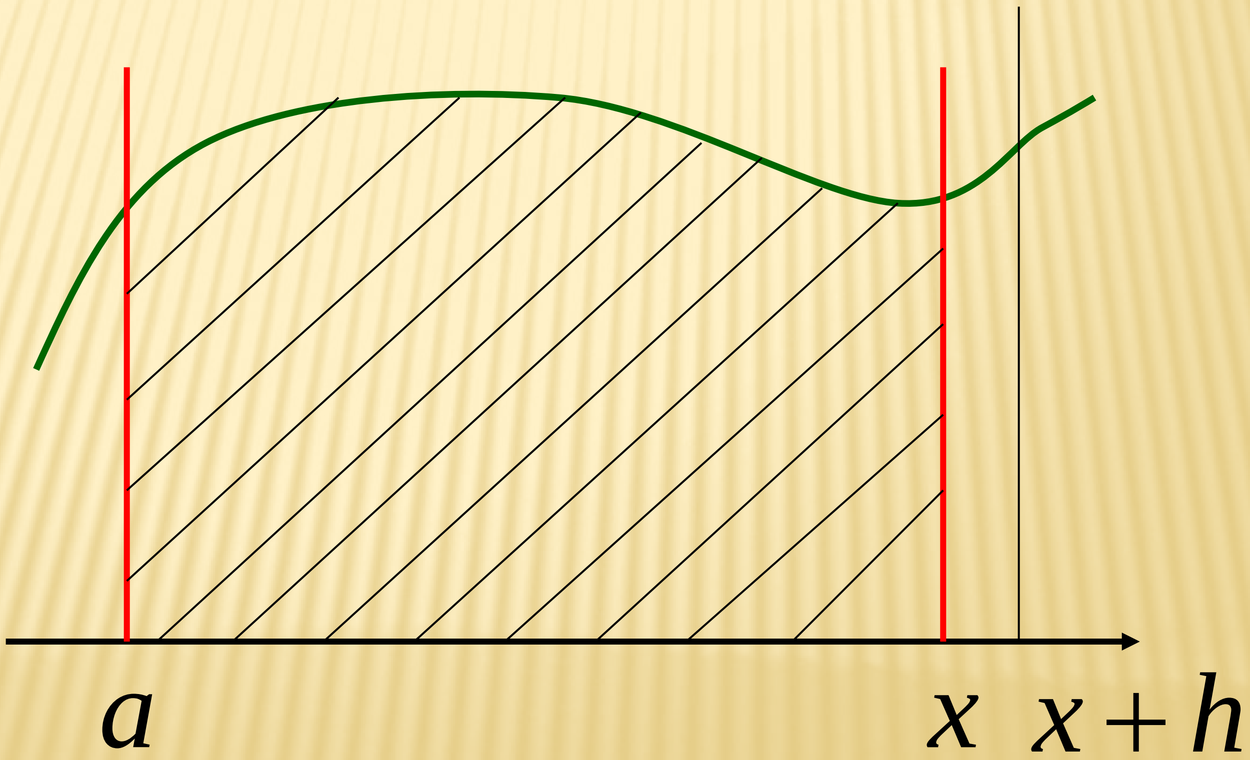
面積の定義

$$\int_a^b f(t)dt = \lim \sum f\left(x_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$



微分積分学の基本定理

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$



ニュートンが偉すぎた！

$$\frac{dy}{dx} \qquad \int f(x)dx$$

等は、ライプニッツの記号。この
便利な記号法の導入が遅れて
イングランドの数学は損した。

2進法の発見も
私の仕事です！

Gottfried Wilhelm von Leibniz
1646-1716

テイラー展開

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + x\varepsilon(x)$$

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2}x^2 + \frac{f'''(a)}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$f(a+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k + x^n\varepsilon(x)$$

$$\varepsilon(0) = 0$$

指数関数　e^t

$$f(s)=1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+\frac{s^3}{3!}+\cdots+\frac{s^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}$$

$$f(t)=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

$$\boxed{f(s)f(t)=f(s+t)}$$

指数関数 e^t

$$f(t)=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^n}{n!}\right)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}f(t)=f(t) \qquad f(0)=1}$$

$$\frac{dx}{dt}=x$$

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

これが、
指数関数の
正体だ！

Wikipediaより転載(2011/10/25)
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/60/Leonhard_Euler_2.jpg/480px-Leonhard_Euler_2.jpg

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right)$$

テイラー展開の定義から

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sin\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta, \quad \frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\cos\theta) = -\cos\theta, \quad \frac{d^2}{d\theta^2}(\sin\theta) = -\sin\theta$$

オイラーの公式

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

微積分の始まり

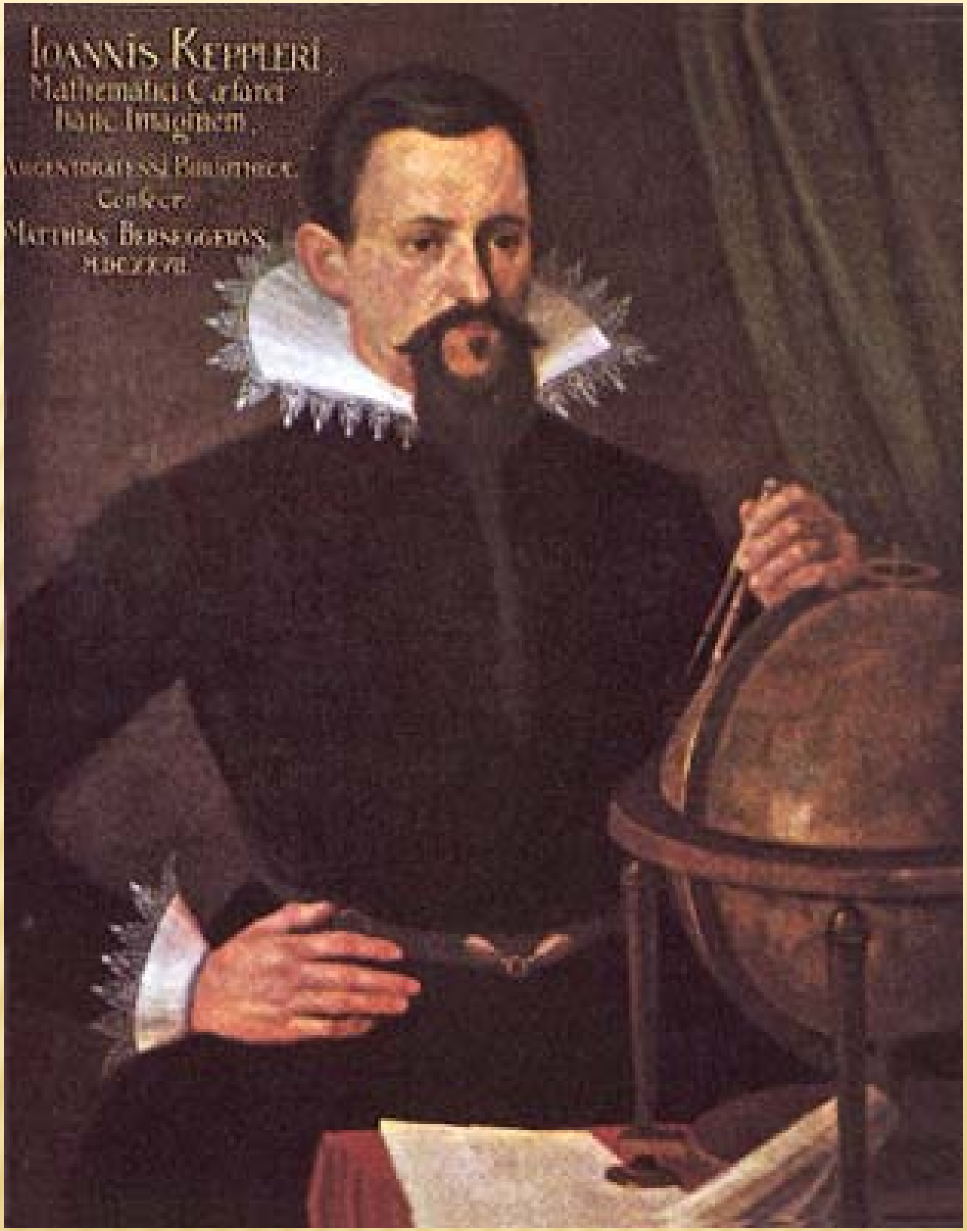
天体観測と力学
新しい数学

ケプラーの法則

(K1) 楕円軌道の法則：　惑星の軌道は、太陽を１つの焦点とする楕円である。

(K2) 面積速度一定の法則：　太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に通過する面積は、その惑星の軌道上の位置によらず一定である。

(K3) 調和法則：　惑星の公転周期の２乗は軌道の長軸の長さの３乗に比例する。



Johannes Kepler
1571-1630

Wikipediaより転載
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/de/JKepler.png

‡ Wikipediaより転載(2011/10/25)
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3d/Cath%C3%A9drale_Strasbourg.jpg/400px-Cath%C3%A9drale_Strasbourg.jpg

‡ Wikipediaより転載(2011/10/25)
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/62/Horloge_astronomique_pilier_anges.JPG/450px-Horloge_astronomique_pilier_anges.JPG

ニュートンの法則

(N1) 慣性の法則：　静止している物体は、ほかからの作用を受けない限り、もとと同じ状態を続ける。

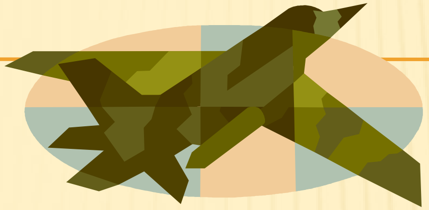
(N2) 運動の法則：　物体の運動の変化は力の作用に比例し、その力の働く方向に起こる。

(N3) 作用反作用の法則：　２つの物体が互いにおよぼし合う力は、大きさが等しく方向が反対である。

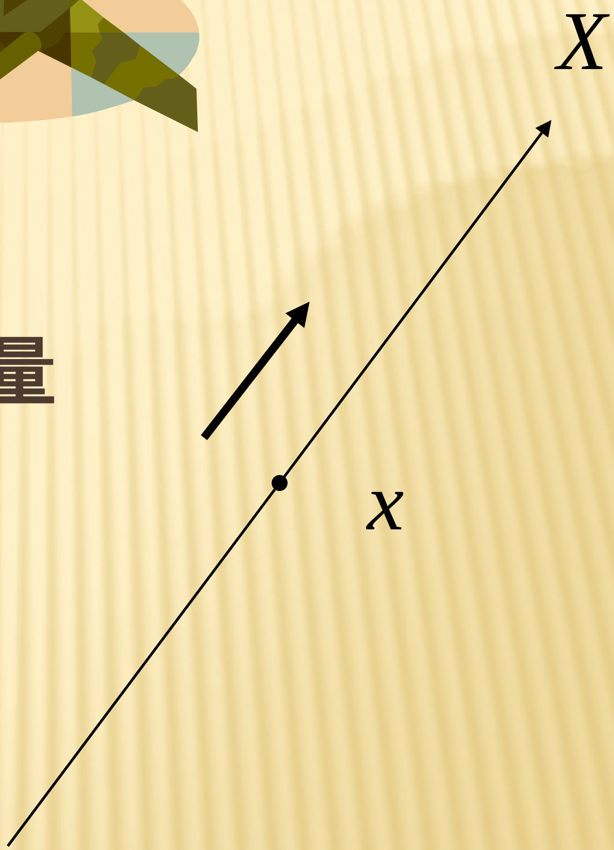
Wikipediaより転載
http://ja.wikipedia.org/wiki/ファイル:Sir_Isaac_Newton_by_Sir_Godfrey_Kneller,_Bt.jpg

Sir Isaac Newton
1643-1727

運動の法則



F	：力の大きさ
α	：加速度
m	：比例定数、実は質量



$$F = m\alpha$$

$$\alpha = \frac{d^2x}{dt^2}$$

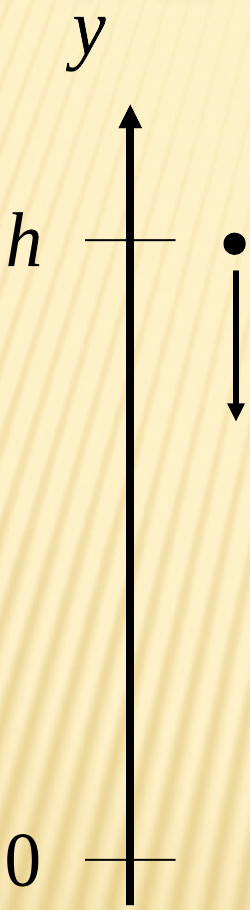
$$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$ 速度

$$\alpha = \frac{d^2 x}{dt^2} = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$ 加速度

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) + x(t-h) - 2x(t)}{h^2}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t, x)$$ 運動の法則

自由落下のモデル



$$\alpha = g$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + vt + h$$

$$y(0) = h\ , \quad \frac{dy}{dt}(0) = v$$

微分方程式の起源
微分と差分

表示を変える
見方を変える

$$\boxed{\frac{x(T+h)-x(T)}{h}=ax(T)}$$

$T=0$、$x(0)=1$ とすると、

$$x(h)=1+ah$$

$$x(2h)=(1+ah)x(h)=(1+ah)^2$$

$$x(3h)=(1+ah)x(2h)=(1+ah)^3$$

$$x(nh)=(1+ah)^n$$

$$\boxed{\begin{gathered} nh=t \\ x(t)=\left(1+\frac{at}{n}\right)^n \end{gathered}}$$

マルサスの人口モデル

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

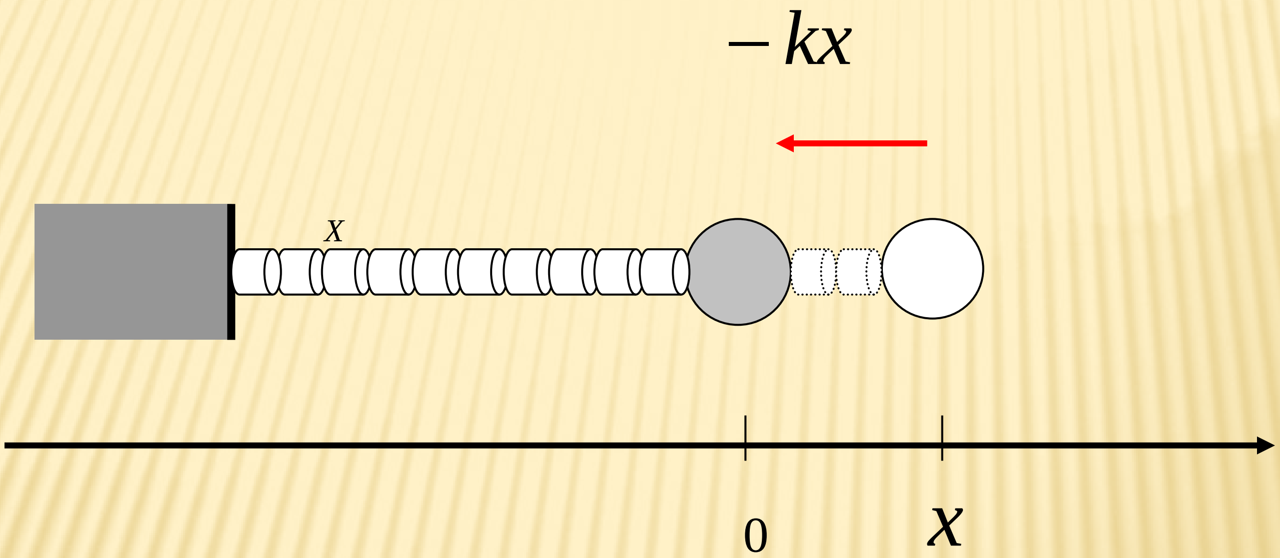
初期条件

$$x(0) = 1$$

$$x(t) = e^{at}$$

$$e^{at} = \lim \left(1 + \frac{at}{n}\right)^{n}$$

フックの法則



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

$$x = \sin \omega t$$

とおいてみると

$$\frac{dx}{dt} = \omega \cos \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin \omega t$$

であるから、

$x = \sin \omega t$　同様に　$x = \cos \omega t$

は、この微分方程式の解である。

調和振動方程式の一般解

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

一般解は

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

である。

定数 A と B の値は初期条件から定まる。

$$x(0)=A \qquad \frac{dx}{dt}(0)=\omega B$$

解の「存在と一意性」

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t,x)$$ 微分方程式

$$x(0) = a\ ,\quad \frac{dx}{dt}(0) = v$$ 初期条件

初期条件を満たす解はただ一つ存在

一意性の応用例

$$x = \sin(t-a)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

$$x = \cos a \sin t - \sin a \cos t$$

$$x(0) = -\sin a,\ \frac{dx}{dt}(0) = \cos a$$

$$\boxed{\sin(t-a) = \cos a \sin t - \sin a \cos t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$

$x=e^{at}$ とし、代入すると　　$a^2+\omega^2=0$

$x=e^{\pm i\omega t}$ は、この微分方程式の解である。

$e^{i\omega t}=\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t$ と書くと、初期条件

$x(0)=1$ 　 $\frac{dx}{dt}(0)=i\omega$ 　から

$$\boxed{e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t}$$

オイラーの公式

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

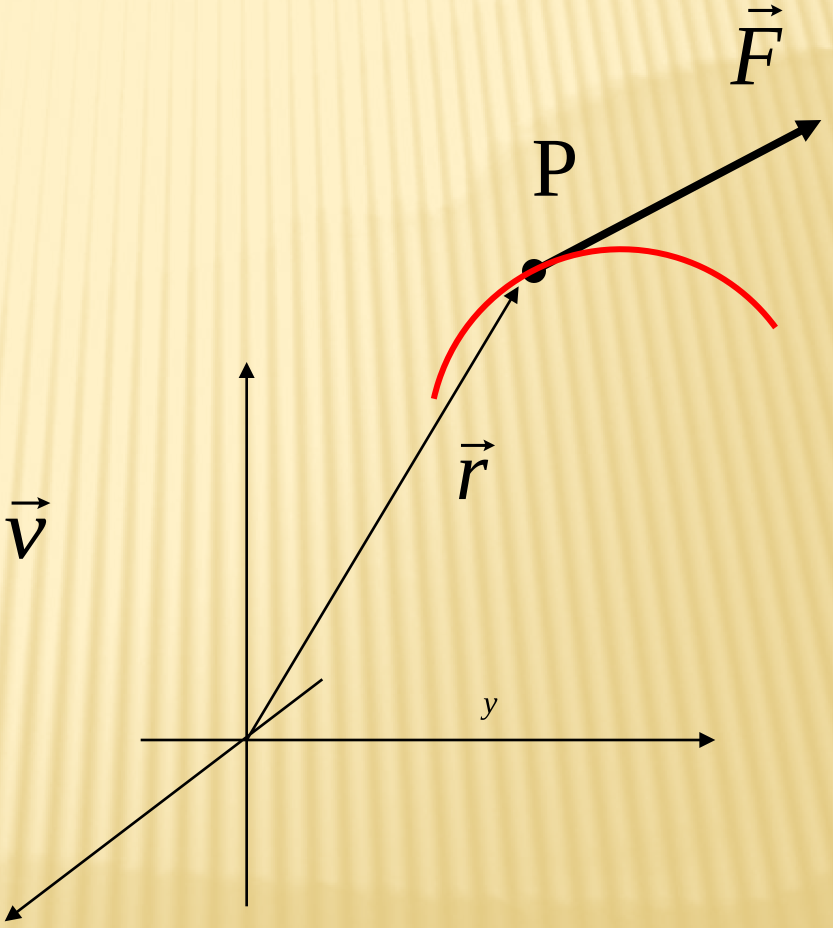
ケプラーとニュートン

数理モデルを創る
数学を展開する

運動方程式の形

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t,\vec{r})$$

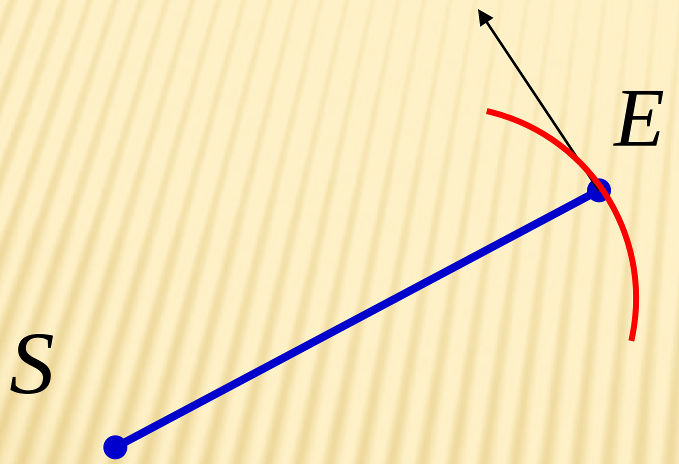
$$\vec{r}(0) = \vec{a} \ , \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{v}$$



万有引力の法則

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

$SE = r$



平面上での万有引力の法則

$$-\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{\begin{gathered} m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -G\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d\theta}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \\ &r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = h}$$

$$u = \frac{1}{r}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{GM}{4h^2}$$

$$\boxed{u - \frac{GM}{4h^2} = A\cos(\theta - \theta_0)}$$

$$\boxed{r = \frac{\ell}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

$$\ell = \frac{GM}{4h^2} \qquad e = \ell A$$

ケプラーの法則とニュートンの法則

- 万有引力の法則とニュートンの運動の法則を仮定すればケプラーの法則は数学的に導かれる。
- 運動の法則：

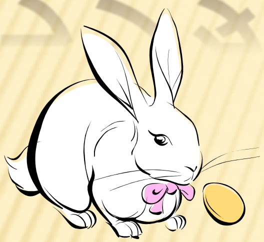
  は、微分方程式である。$F = m\alpha$
- 二次曲線の極表示：

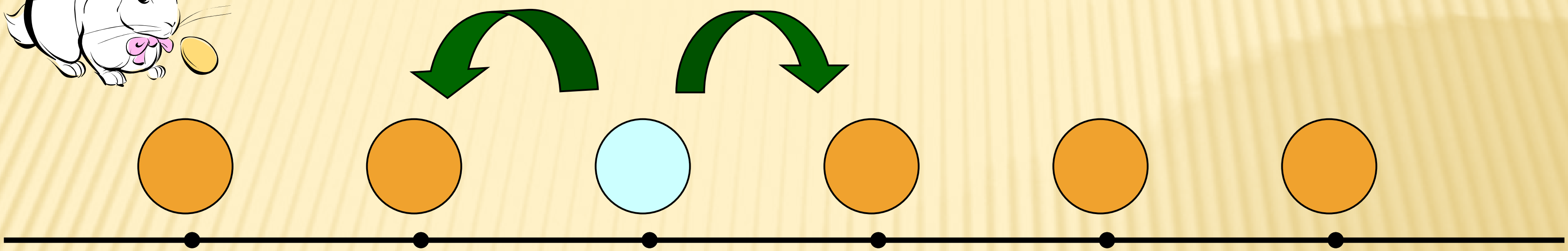
  が本質的である。
$$r = \frac{\lambda}{1+e\cos\theta}$$

微積分を使ってみるーその2

極限の公式２題
少し計算

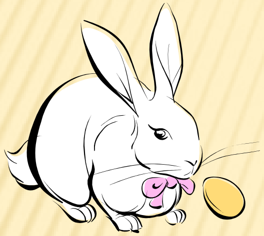
ランダムウォーク（酔歩）





$\frac{1}{2}$の確率で右か左に飛ぶ

$2n$回の跳躍の後出発点に戻る確率



$$1$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{16} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{32} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{5}{16} \quad \frac{5}{16} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{1}{32}$$

$$\frac{1}{64} \quad \frac{3}{32} \quad \frac{15}{64} \quad \frac{5}{16} \quad \frac{15}{64} \quad \frac{3}{32} \quad \frac{1}{64}$$

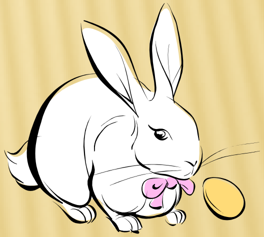
n回右に、n回左に

$$ {}_{2n}C_n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}} $$

直観的に、経験的に

どっかに行っちゃう

$$ \lim \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}} = 0 $$



ウォリスの公式

$$\lim \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Wikipediaより転載(2011/10/25)
http://ja.wikipedia.org/wiki/ファイル:John_Wallis_by_Sir_Godfrey_Kneller,_Bt.jpg

Wikipediaより転載
http://ja.wikipedia.org/wiki/ファイル:Sir_Isaac_Newton_by_Sir_Godfrey_Kneller,_Bt.jpg

お世話に
なりました

John Wallis
1616-1703

定積分の計算

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \, d\theta$$

$$I_n < I_{n-1} < I_{n-2}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \qquad I_1 = 1$$

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

これは部分積分の計算

$$1 < \frac{I_{n-2}}{I_n} = \frac{n}{n-1}$$

$$\lim \frac{I_{n-2}}{I_n} = 1$$

$$1 < \frac{I_{n-2}}{I_{n-1}} < \frac{I_{n-2}}{I_n}$$

$$\lim \frac{I_{n-2}}{I_{n-1}} = 1$$

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1$$

これは漸化式から解る

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{\lim \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \cdot \frac{(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \right)^2 \cdot \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \boxed{\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \right)^2} \cdot \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\lim \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} = \lim \sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{1}{\pi}}$$

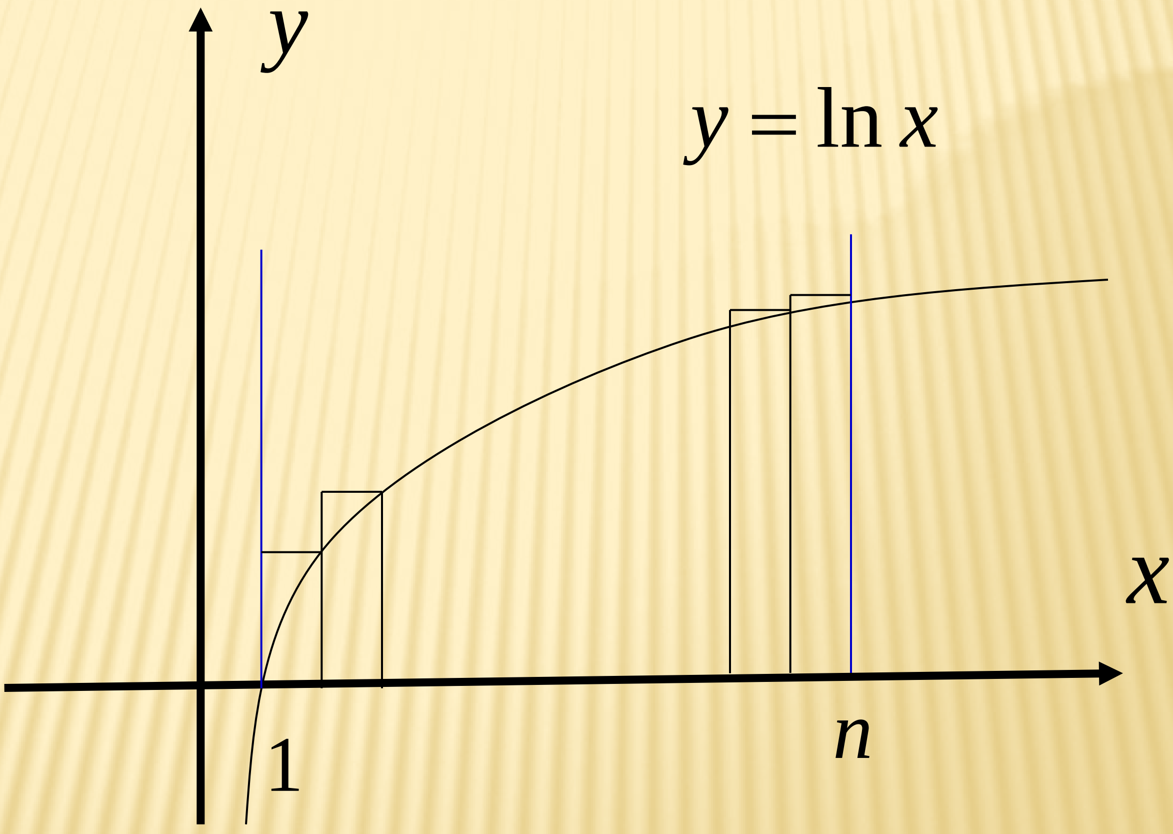
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

スターリングの公式

$$n! \approx \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \approx \int_1^n \ln x dx = \left[x \ln x - x\right]_1^n \approx n \ln n - n$$

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$$



$$n! \approx a n^{b} \left(\frac{n}{e}\right)^{n}$$ と、置いて

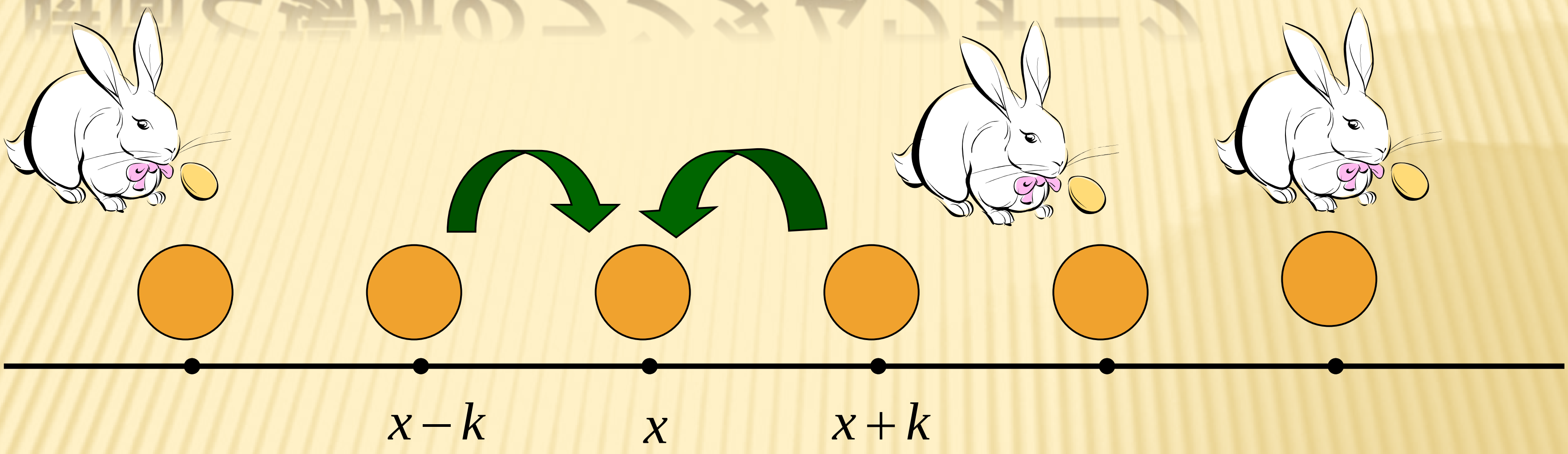
$$\frac{(2n)!}{(n!)^{2}} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$ に、代入

$a = \sqrt{2\pi}$　$b = \dfrac{1}{2}$　すなわち

スターリングの公式 $n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^{n}$

James Stirling
1692-1770

時間と場所のランダムウォーク



$u(t,x)$はh後に$\frac{1}{2}$の□率で$x+k$か$x-k$に移動する

$$u(t+h,x)=\frac{1}{2}\bigl(u(t,x+k)+u(t,x-k)\bigr)$$

$$u(t+h,x)=\frac{1}{2}\big(u(t,x+k)+u(t,x-k)\big)$$

$$u(t+h,x)=u(t,x)+\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)h+h\varepsilon_1(h)$$

$$u(t,x+k)=u(t,x)+\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)k+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)k^2+k^2\varepsilon_2(k)$$

$$u(t,x-k)=u(t,x)-\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)k+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)k^2+k^2\varepsilon_3(k)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)h + h\varepsilon_1(h) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)k^2 + k^2\varepsilon_4(k)$$

$h=\dfrac{k^2}{C}$とおいて$k\to 0$とすると

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)}$$

拡散方程式
熱方程式

これからの話題にはもっと難しいことが出てくるでしょうが、是非とも、数学を数楽してください。