

東京大学 学術俯瞰講義
2011年10月26日 東京大学

生命の数学 — モデルの力 脳の数学

合原一幸

東京大学 生産技術研究所
東京大学最先端数理モデル連携研究センター
東京大学 大学院情報理工学系研究科 数理情報学専攻
東京大学 大学院工学系研究科 電気系工学専攻
東京大学 大学院新領域創成科学研究科 複雑理工学専攻
FIRST (最先端研究開発支援プログラム) 合原プロジェクト

※:このマークが付してある著作物は、第三者が有する著作物ですので、同著作物の再使用、同著作物の二次的著作物の創作等については、著作権者より直接使用許諾を得る必要があります。

WS
ウェッジ
選書

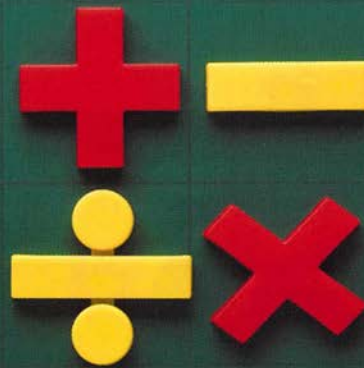
合原一幸
[編著]

社会を変える 驚きの数学

現代社会を支える 数学の応用力!

数学が叶える未来とは?
科学の母、

実世界に学ぶ
数理工学の魅力!



▶ 合原一幸
▶ 新井仁之
▶ 小島定吉
▶ 今野紀雄
▶ 諏訪紀幸
▶ 広中平祐
▶ 藤原正彦

✦

合原一幸編著
『社会を変える驚きの数学』
ウェッジ選書、2008年

WS
ウェッジ
選書

合原一幸
[編著]

脳

は
ここまで解明された

内なる宇宙の神秘に挑む

機械に意思と 感情はあるか?

細胞のカタマリに、なぜ人間は動かされるのか?

脳を知るために脳を創る、科学のあくなき挑戦!

合原一幸

(東京大学教授)

伊藤正男

(理研脳科学センター特別顧問)

松井孝典

(東京大学大学院教授)

甘利俊一

(理研脳科学センター長)

養老孟司

(東京大学名誉教授)

合原一幸編著
『脳はここまで解明されたー内なる宇宙の神秘に挑む』
ウェッジ選書、2004年



岩波アクティブ新書編集部編

集める!

私のコレクション自慢



あなたもとりこになる!
集めてみよう!
こんな世界が見えてくる



岩波書店

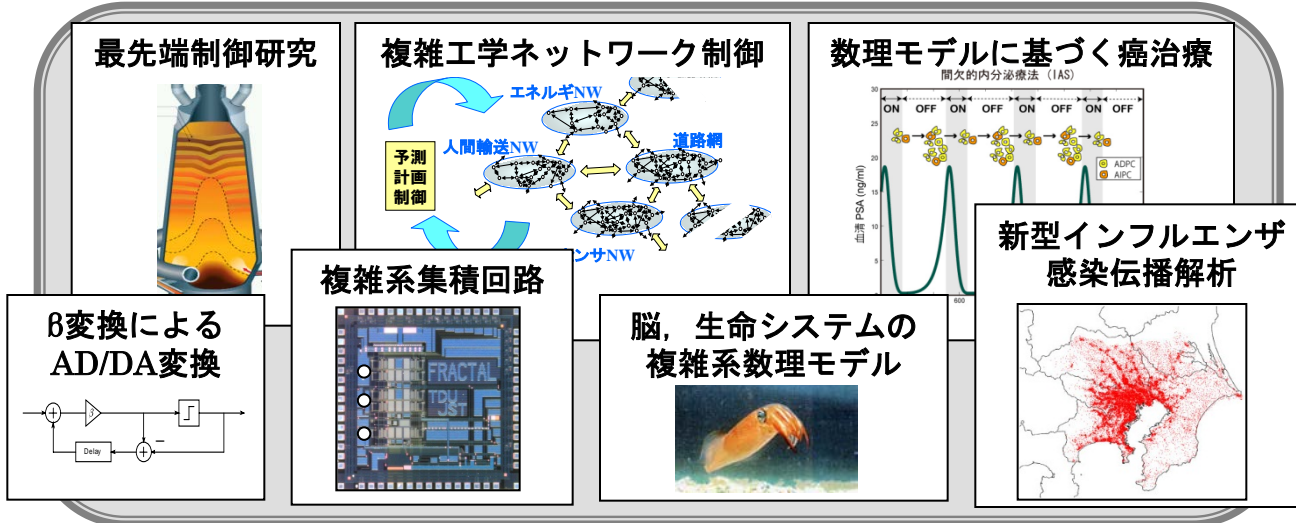
定価(本体760円+税)

岩波アクティブ新書
趣味

岩波アクティブ新書編集部編
『集める!: 私のコレクション自慢』
岩波アクティブ新書、2004年



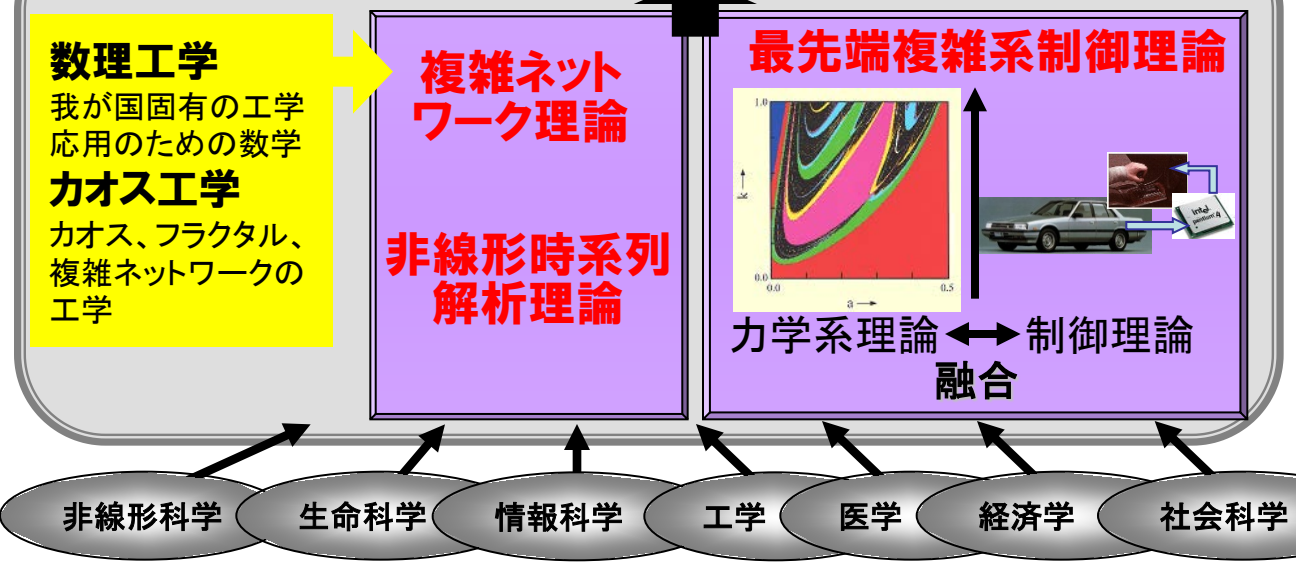
複雑系数理モデル学の分野横断的科学技术応用研究



複雑系数理モデル学の基礎研究

基礎研究と
応用研究の相互作用

複雑系数理モデル学の基礎理論構築: 分野横断型科学技術の核



分野横断的複雑系科学技術に基づいて、**社会的緊急性**が高く、かつ**産業上の重要性・必要性**が大きい諸問題の解決を目指す。

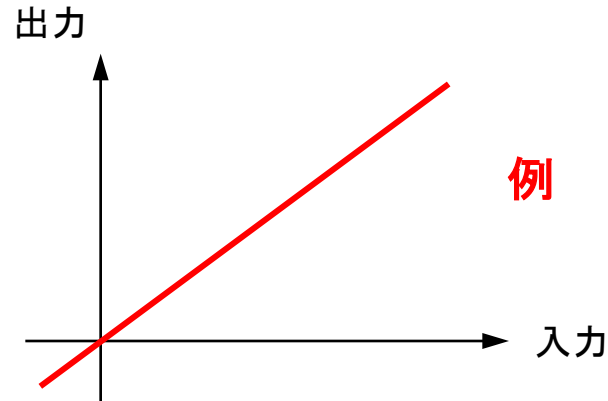
- 数理モデルの**癌治療**や**投薬最適化**への応用
- **新型インフルエンザ**や**バイオテロ**の数理解析と**ワクチン接種計画最適化**などの**諸対策**への応用
- 複雑系科学技術による**製造業再生**と**エネルギー効率向上**のための**基盤構築**
- 全く新しい**非線形原理**に基づく**AD/DA変換器**、**複雑系集積回路**、**脳型計算技術**などの**複雑系情報処理技術**の確立
- 複雑ネットワーク理論に基づく**交通流**、**高度複雑系通信ネットワーク**や**電力ネットワーク**の**制御**
- **環境予測技術**とその**電力・エネルギーシステム**への応用
- **脳**、**生命システム**の**複雑系数理モデル**と**BMI**、**ロボット**、**医療**への応用
- **経済変動の複雑性**の**解明**

線形と非線形

NOT

線形 : $1+1=2$

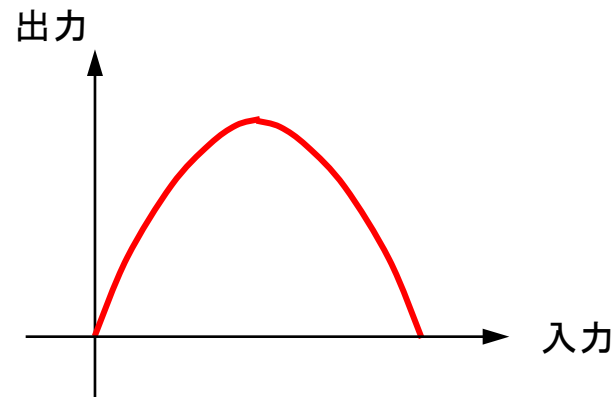
cf. 電気回路理論
制御理論



例 $V=RI$
オームの法則

BUT

非線形 : $1+1 \neq 2$

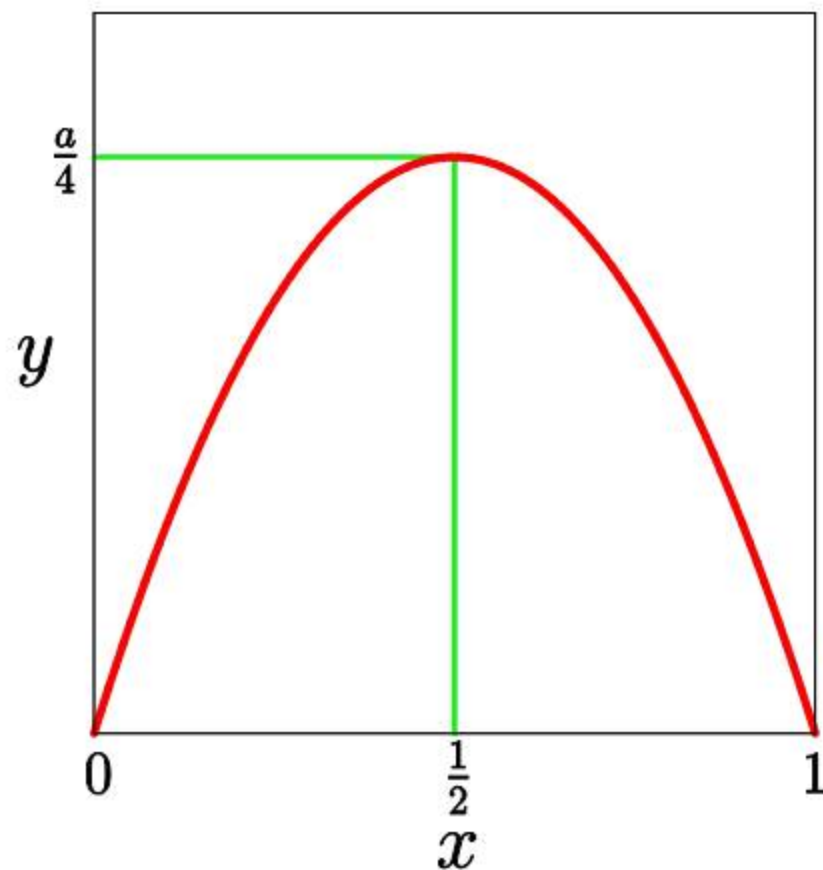


2次関数

$$\begin{aligned}y &= ax(1-x) \\ &= -a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{a}{4}\end{aligned}$$

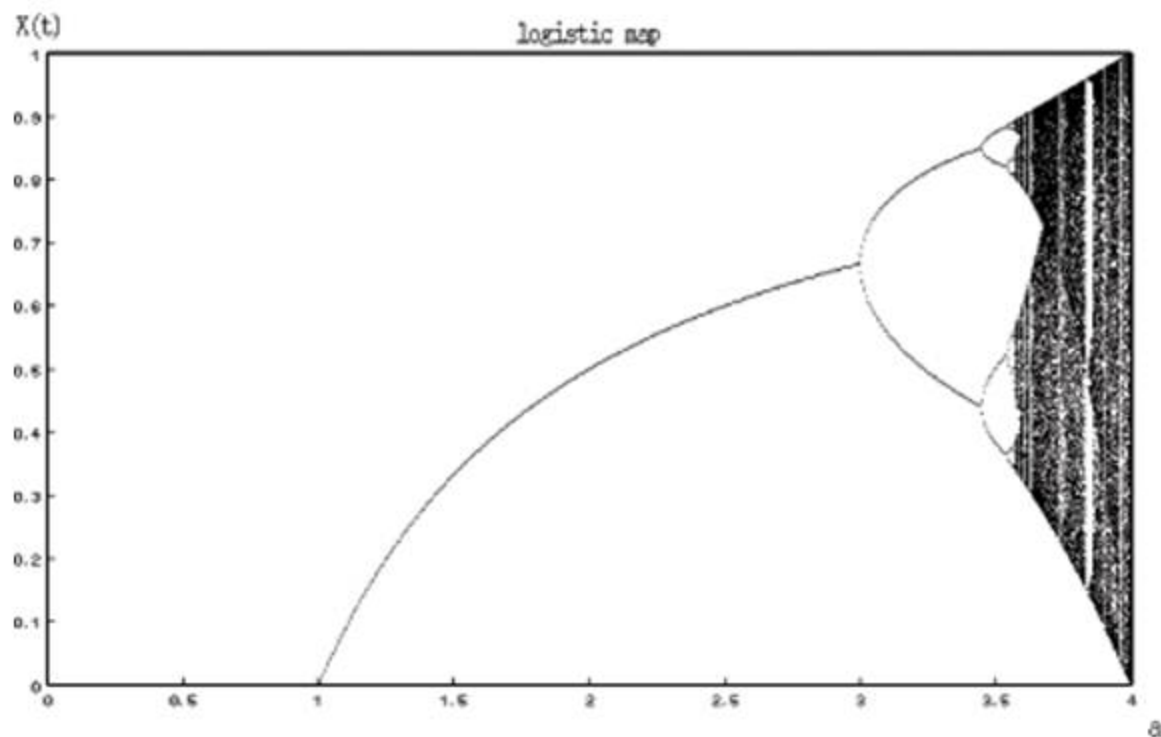


$$\begin{aligned}x(t+1) &= ax(t)(1-x(t)) \\ t &= 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$



$a \in [0, 4]$ の時, $f : x(t) \mapsto x(t+1)$ は,
単位区間 $I = [0, 1]$ から I への写像である.

ロジスティック写像の1パラメータ分岐図



2次関数 $y = ax(1 - x)$

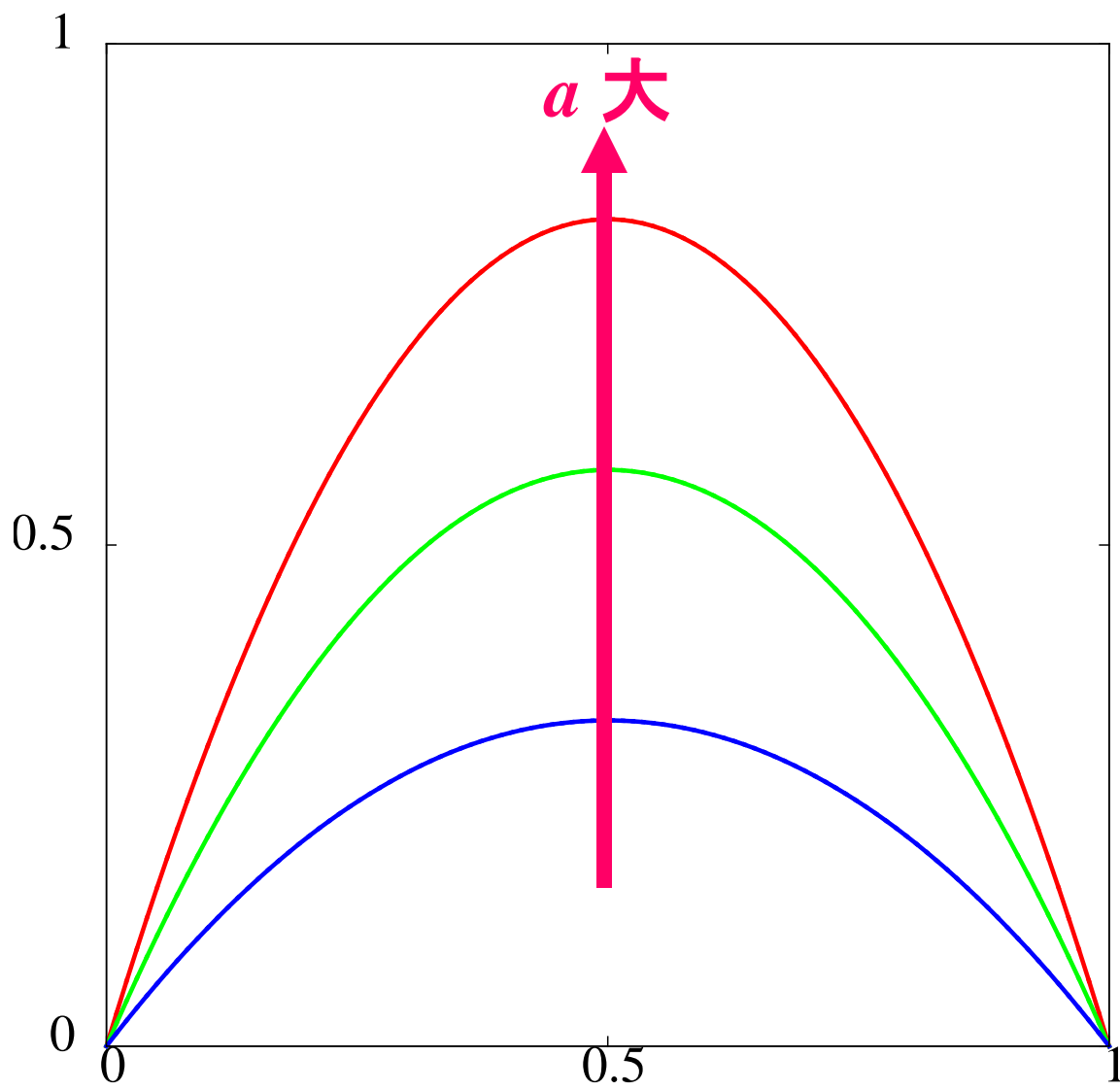


ロジスティック写像

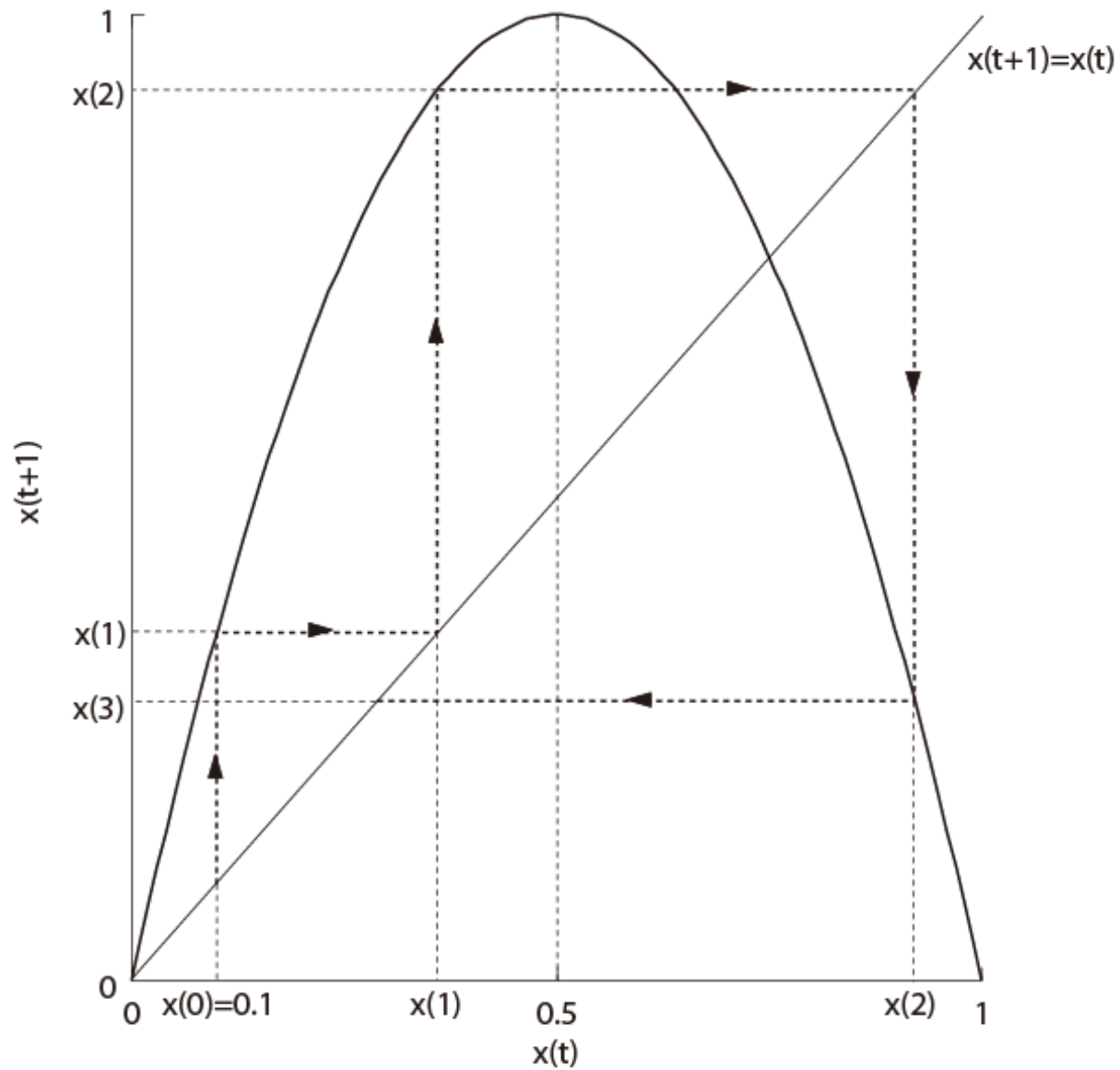
$$x(t+1) = ax(t)(1 - x(t))$$

where $x \in [0, 1]$,

$$a \in [0, 4].$$



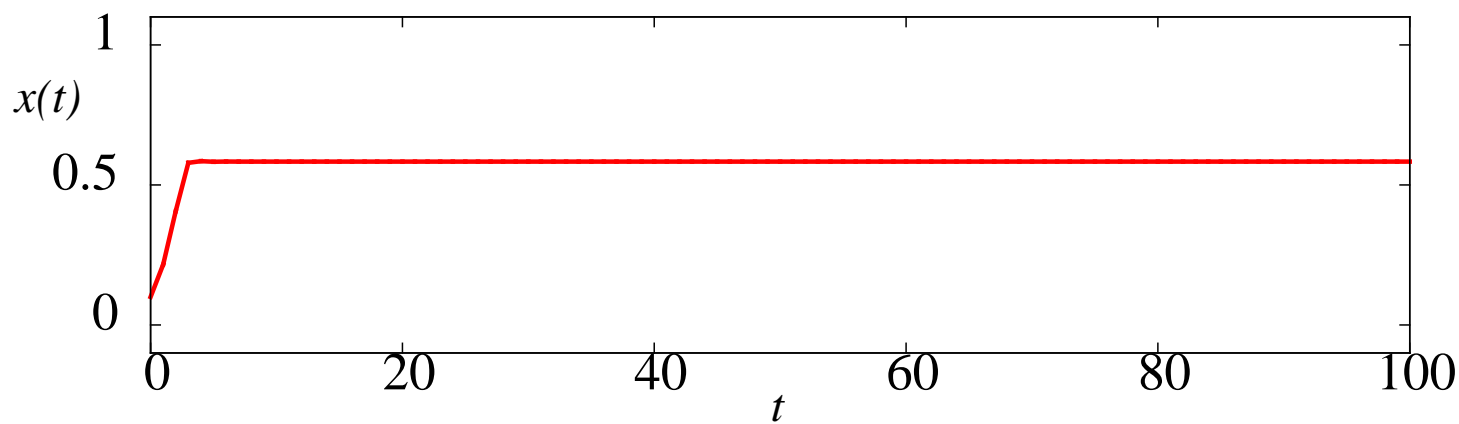
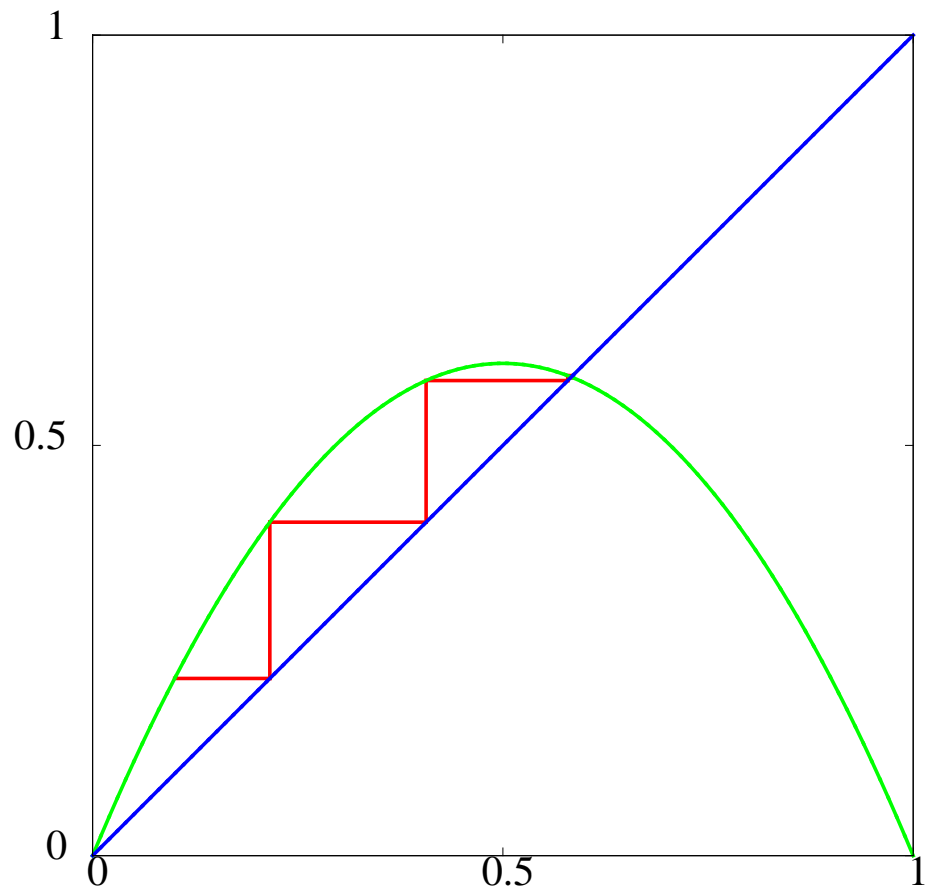
$x(t+1) = ax(t)(1-x(t))$
ここで、 $a \in [0, 4]$



1次元写像の解の図式表現法

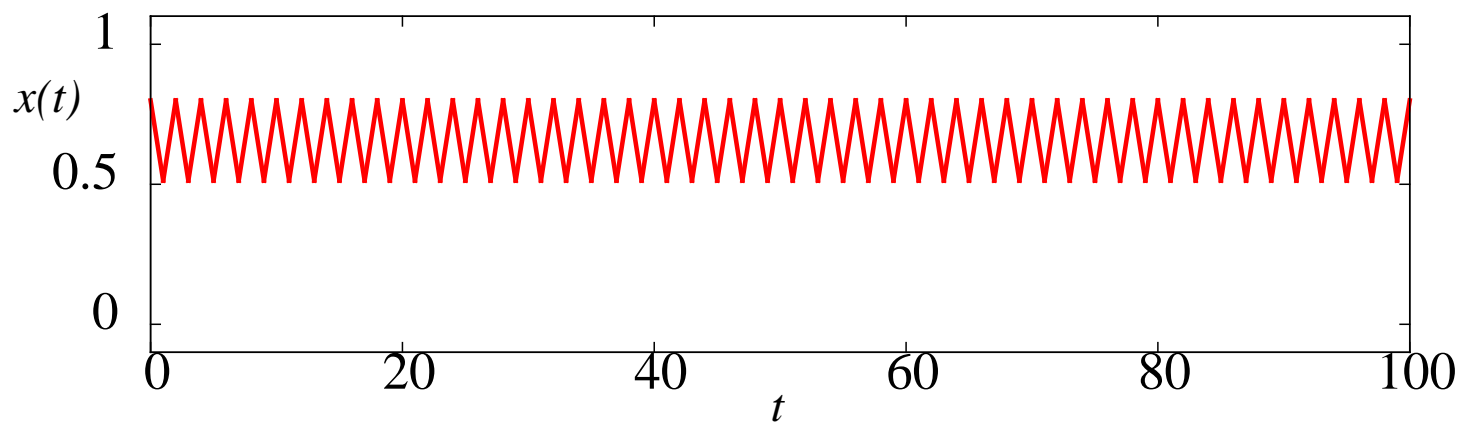
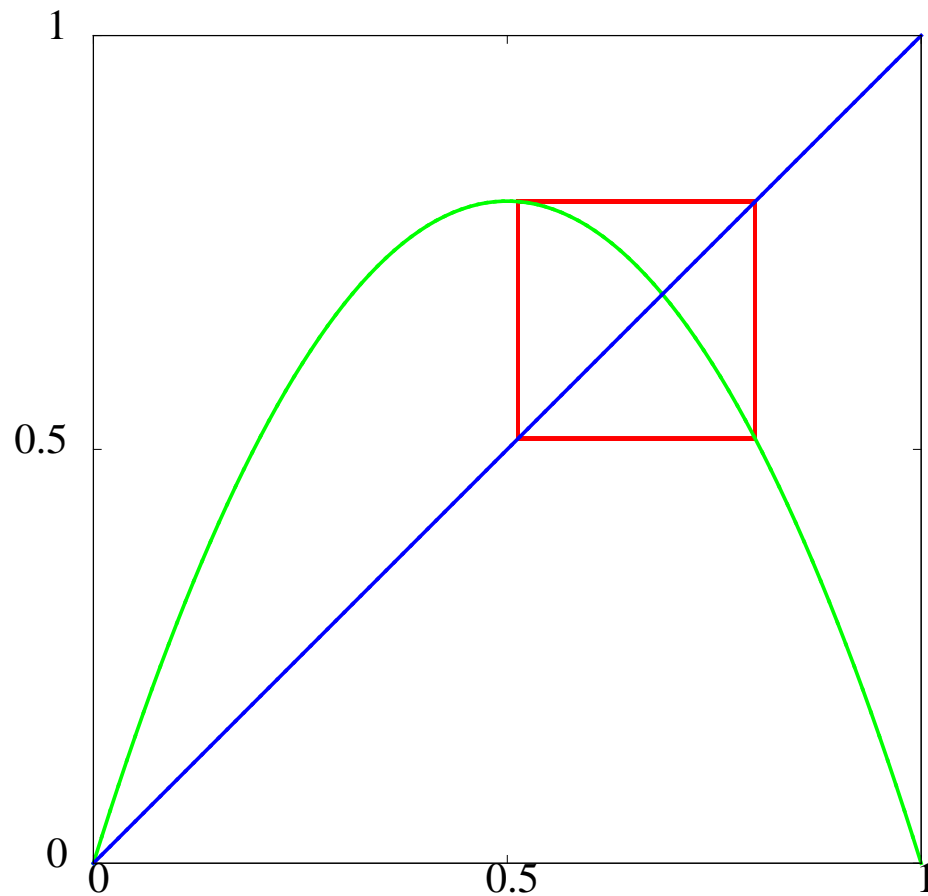
ロジスティックマップ

$a = 2.4$

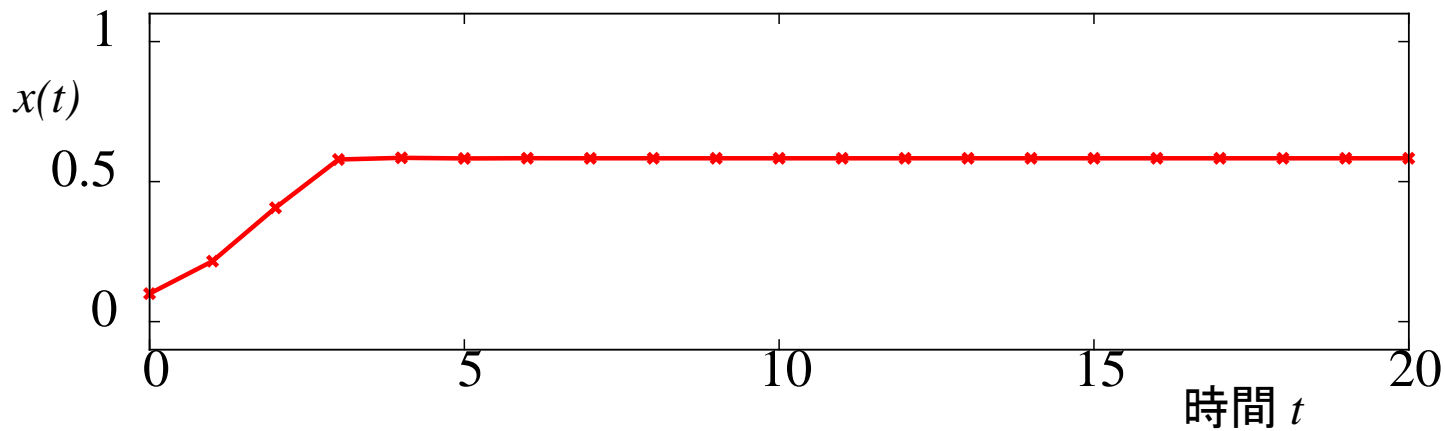


ロジスティックマップ

$$a = 3.2$$

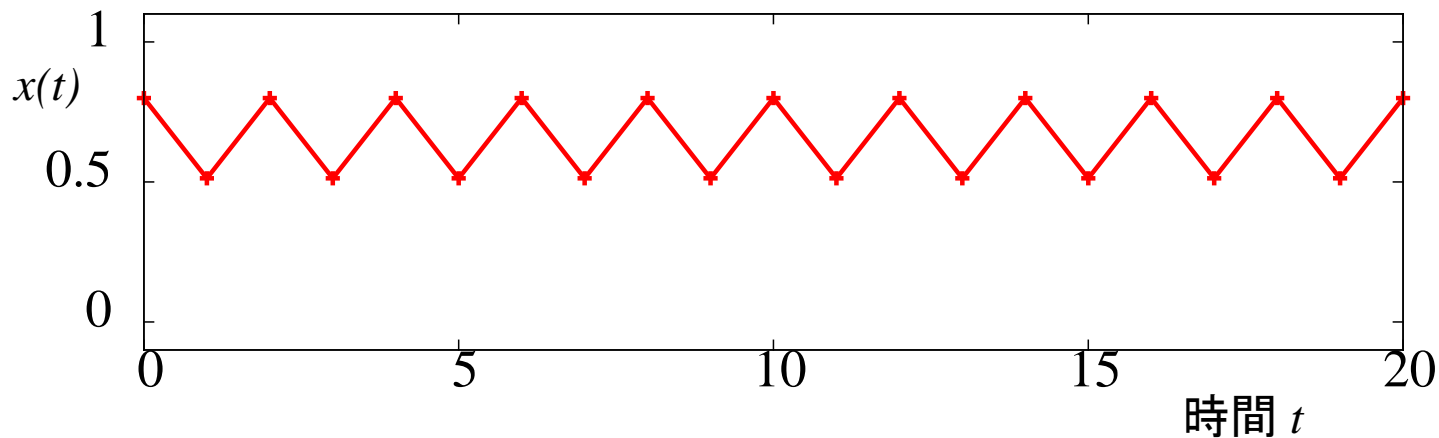


$a = 2.4$



周期1 (一定の値に収束)

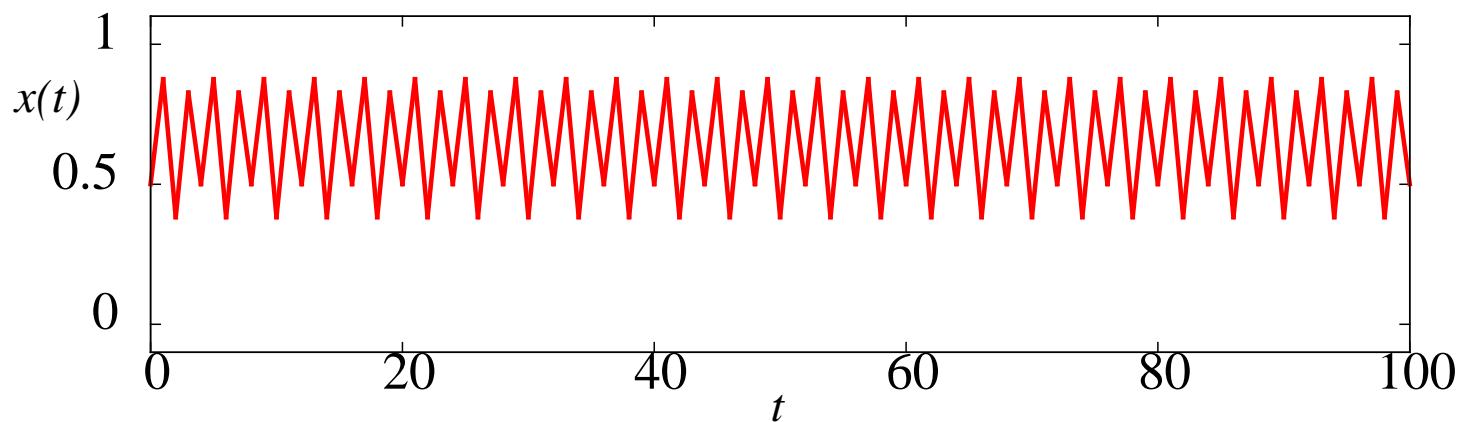
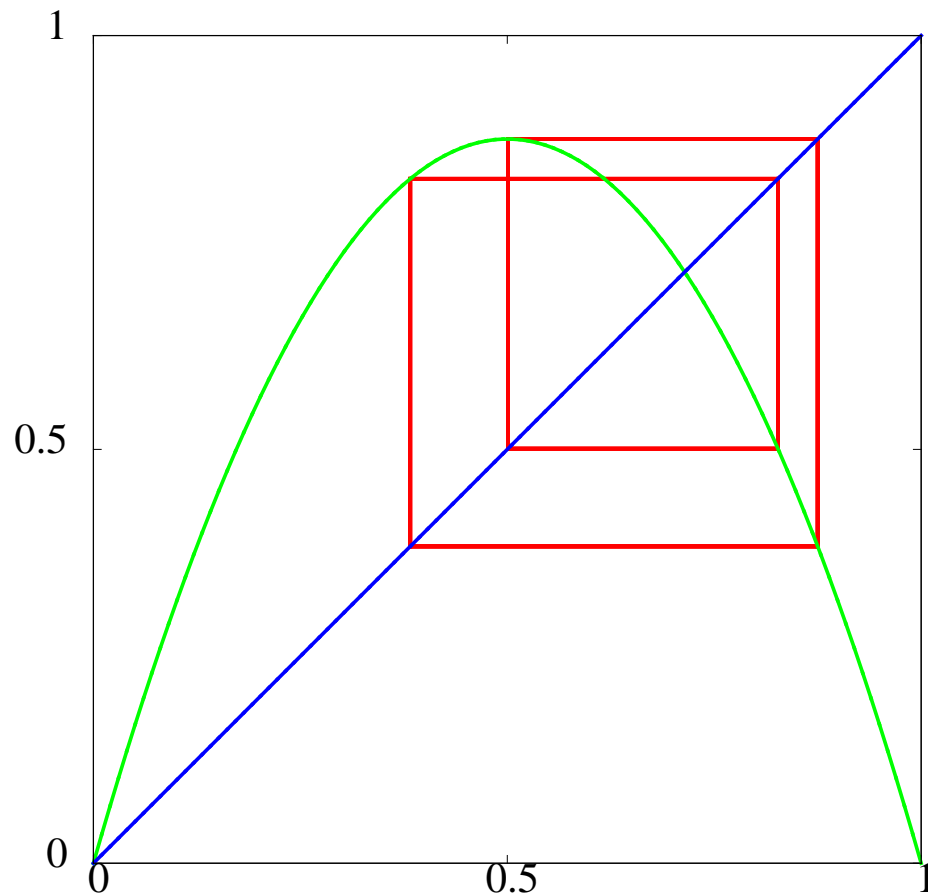
$a = 3.2$



周期2 (2つの異なる値を交互にとる解に収束)

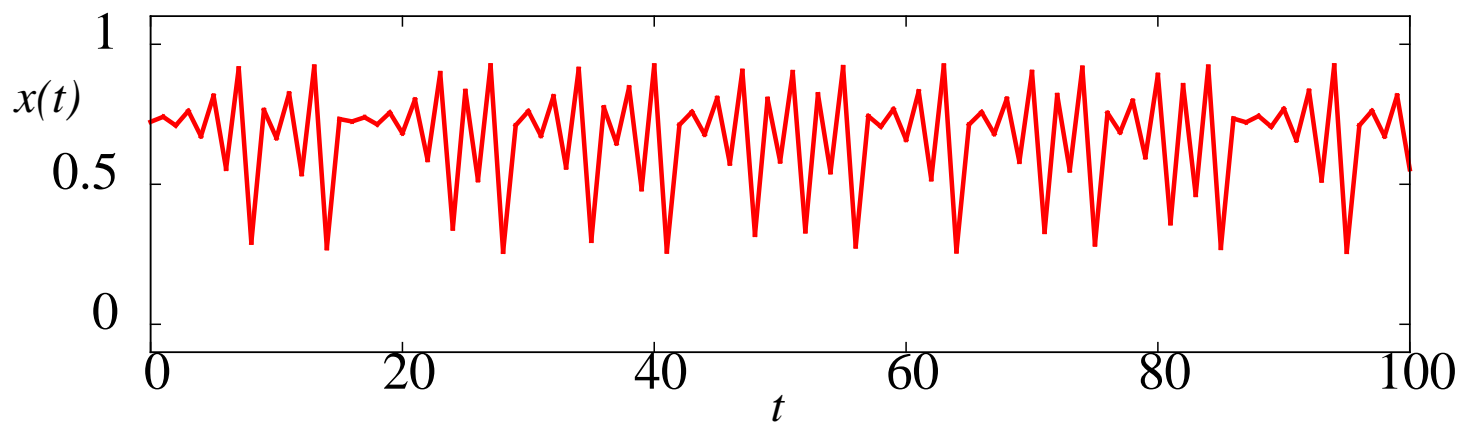
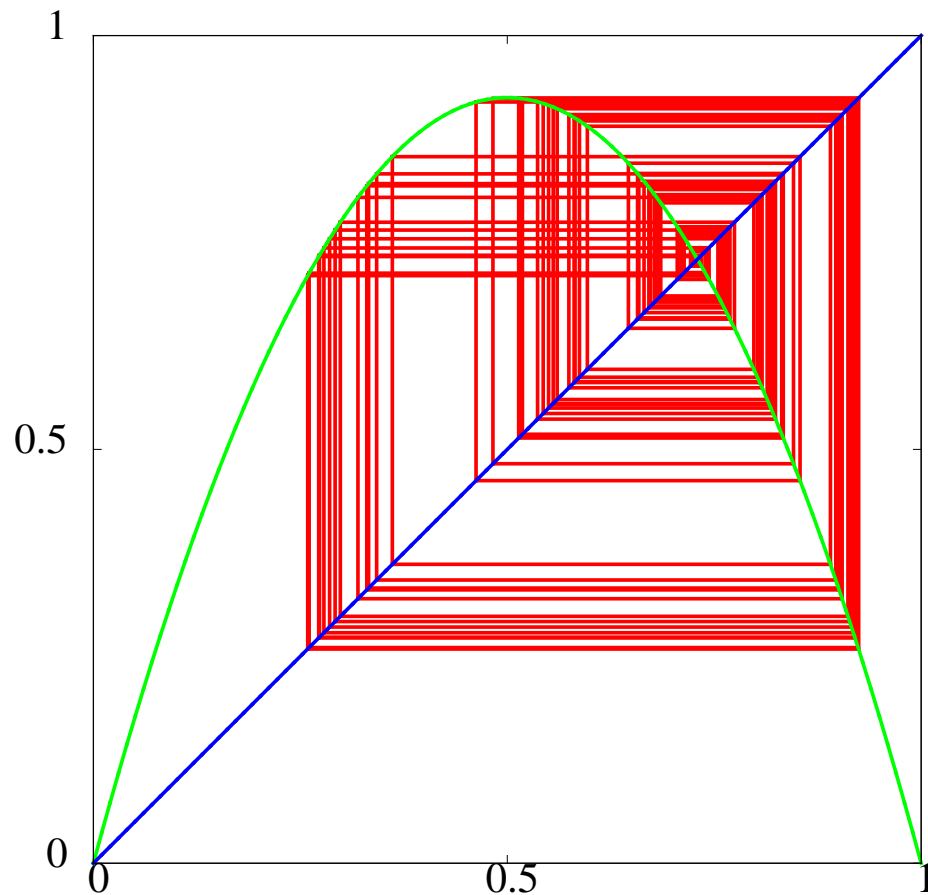
ロジスティックマップ

$$a = 3.5$$



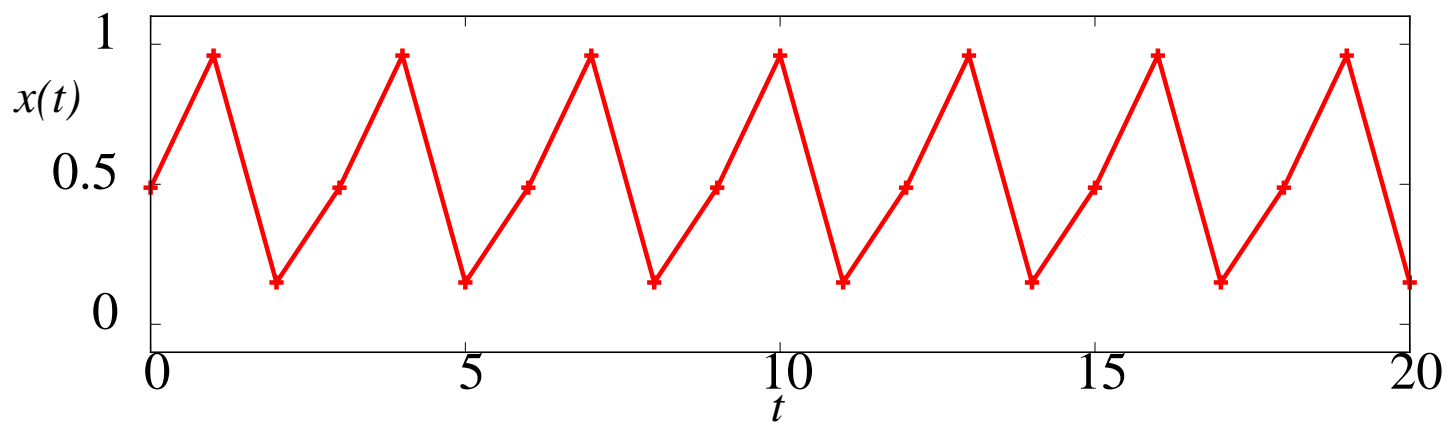
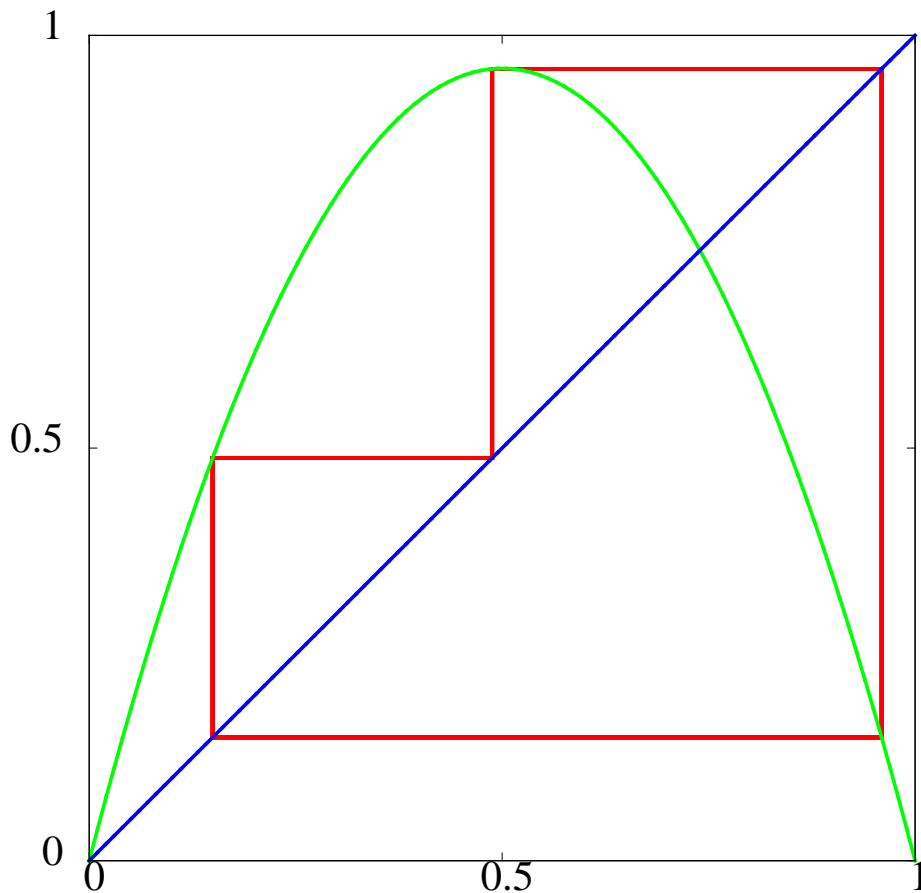
ロジスティックマップ

$$a = 3.7$$



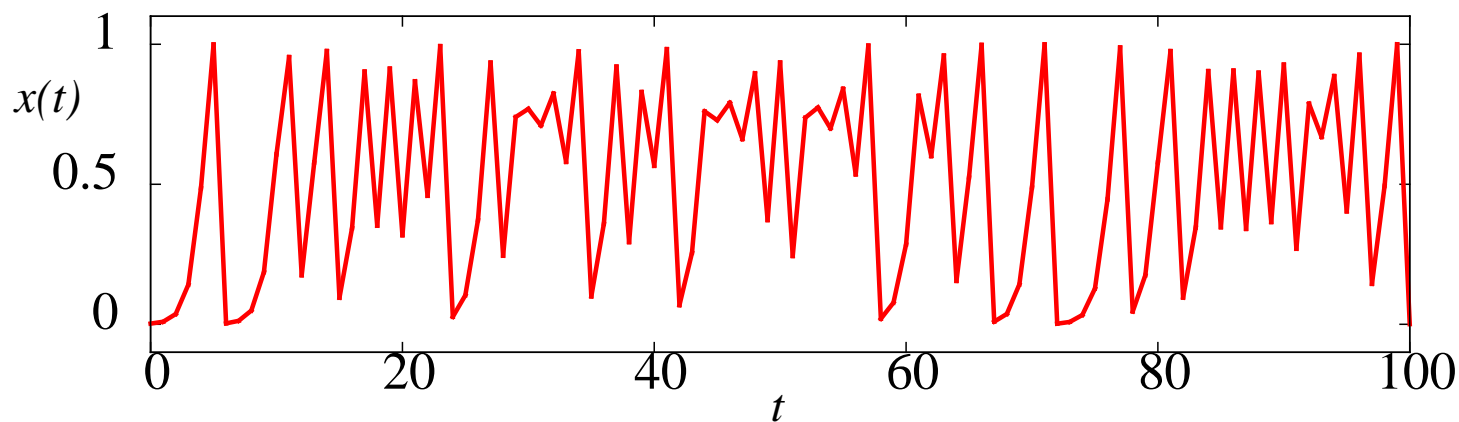
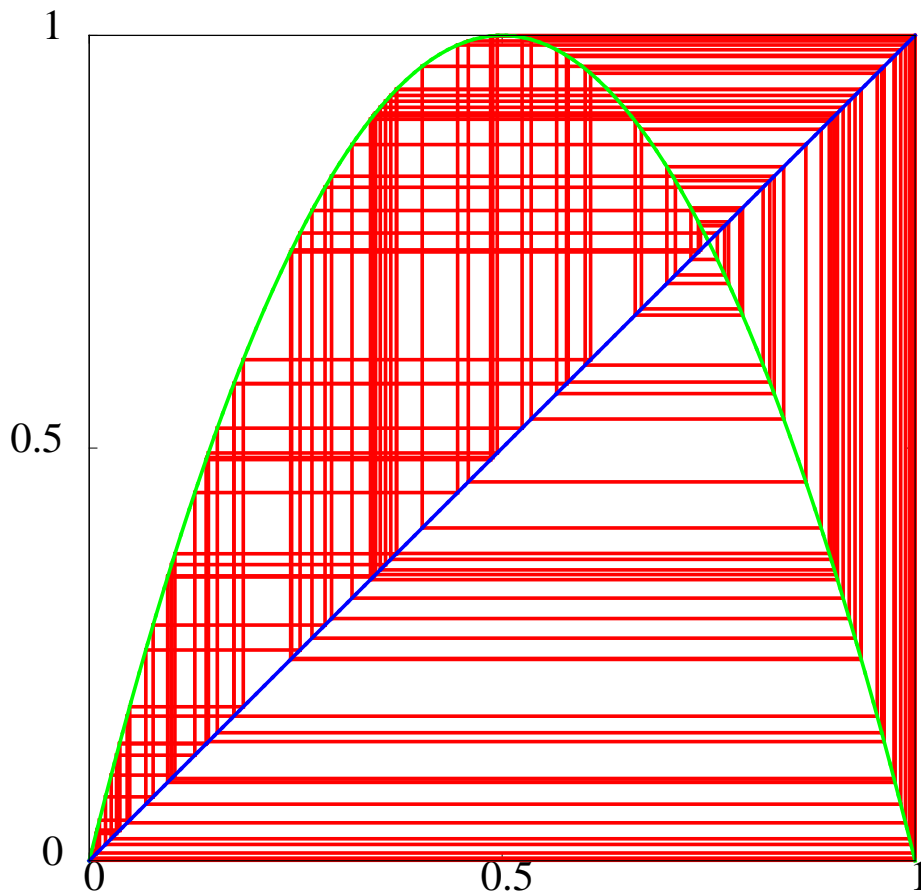
ロジスティックマップ

$$a = 3.84$$

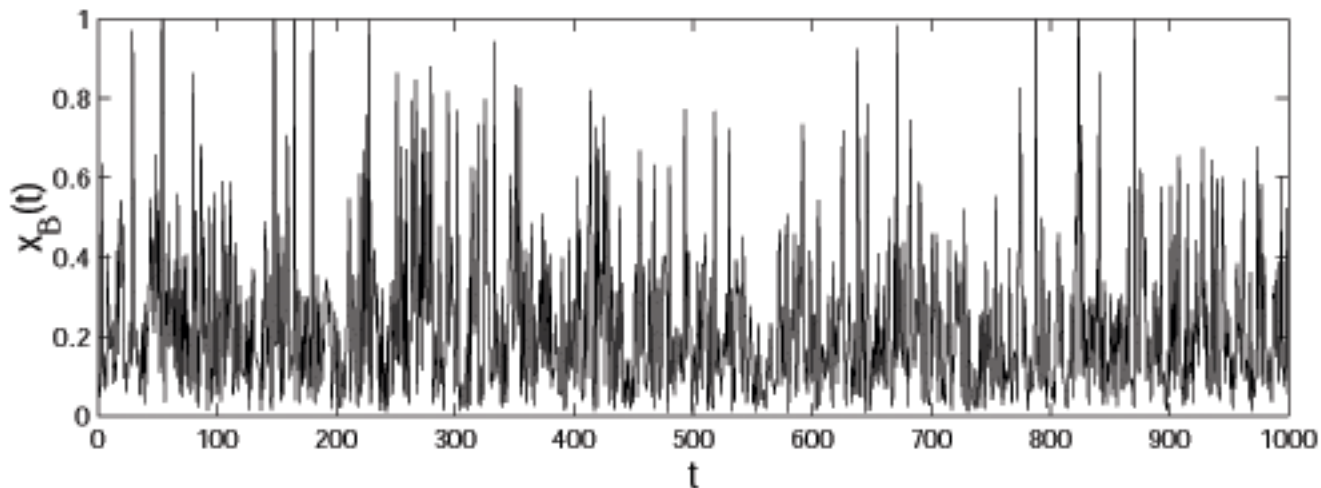
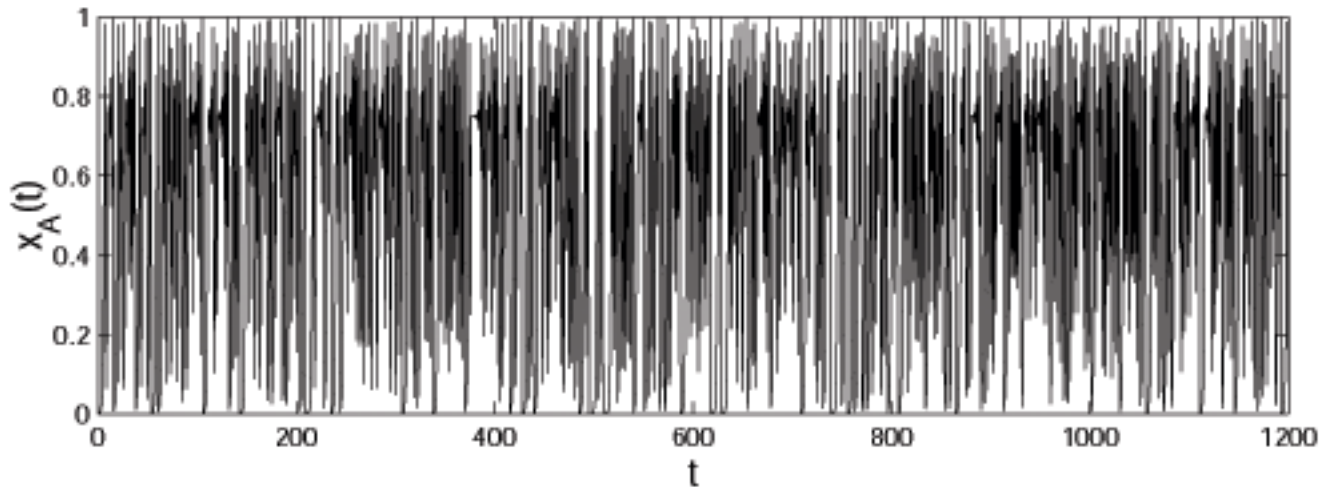


ロジスティックマップ

$a = 4.0$



二つの複雑な時系列信号がある



これらの時系列は,

1. 共に, 複雑な振る舞いを示している
2. 平均値と変動の大きさがほぼ同じ

少し違った見方をすると...

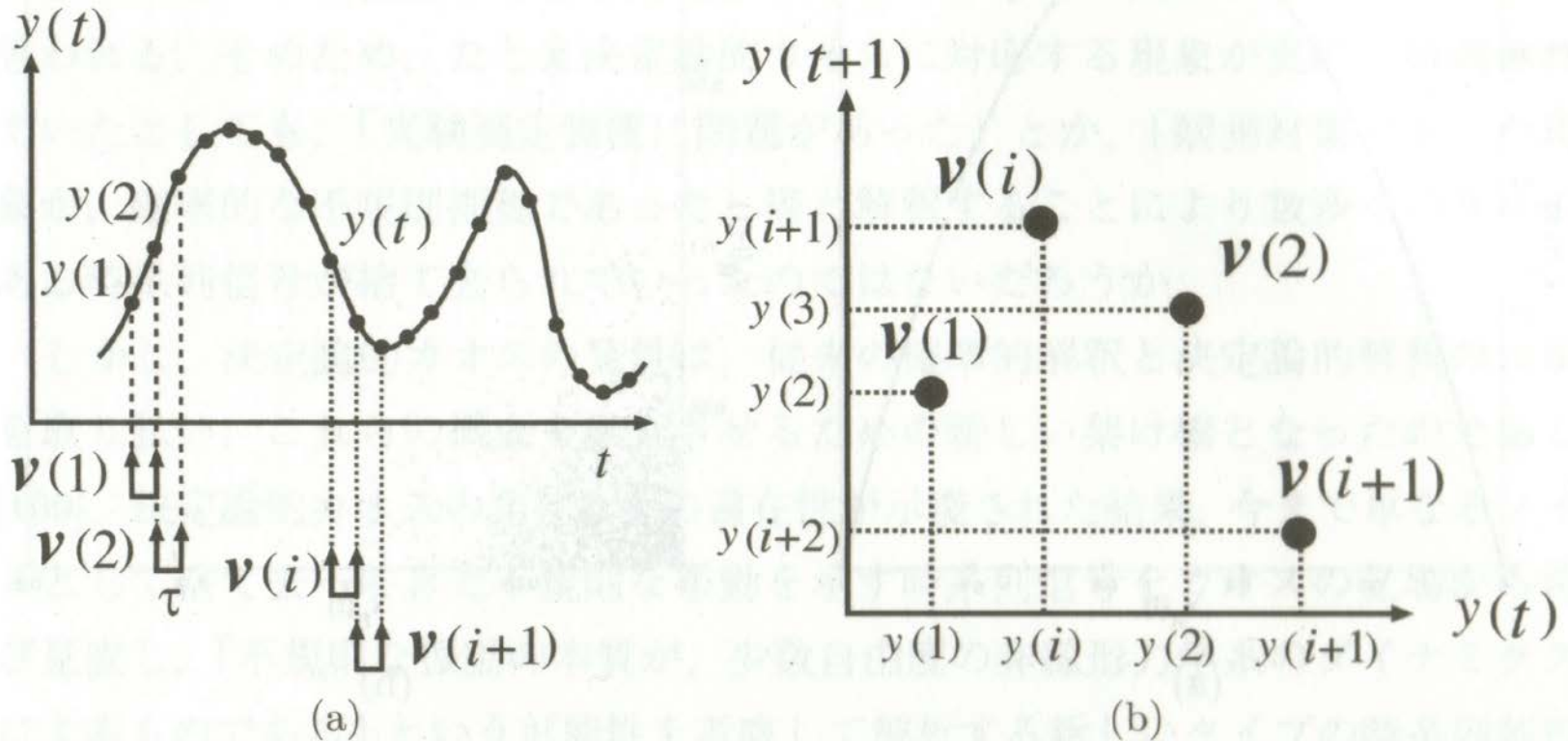
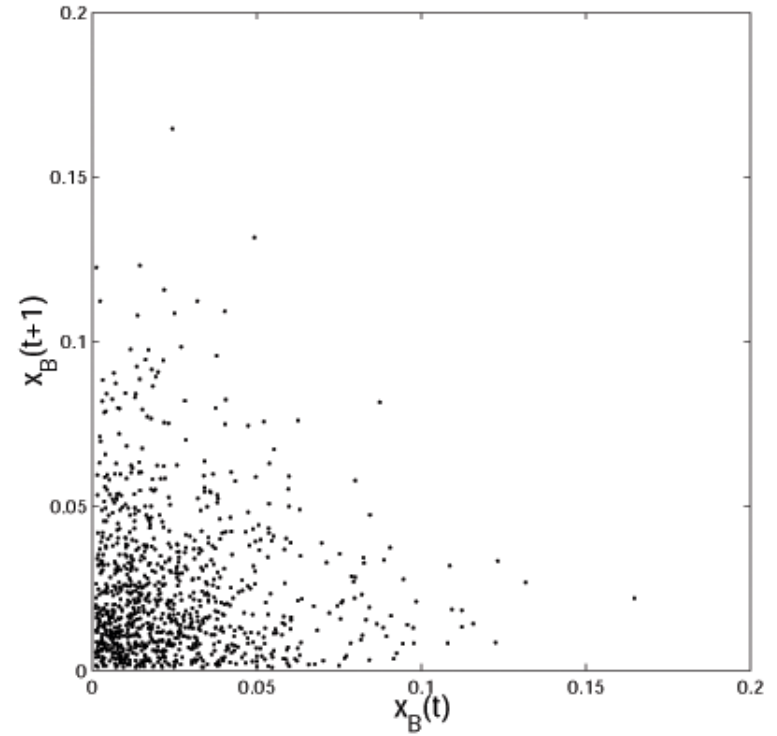
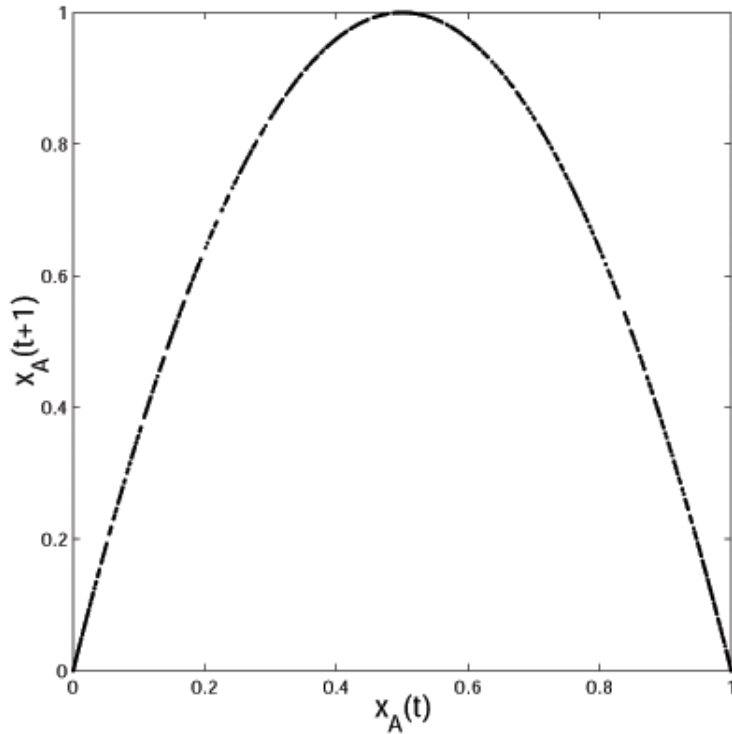


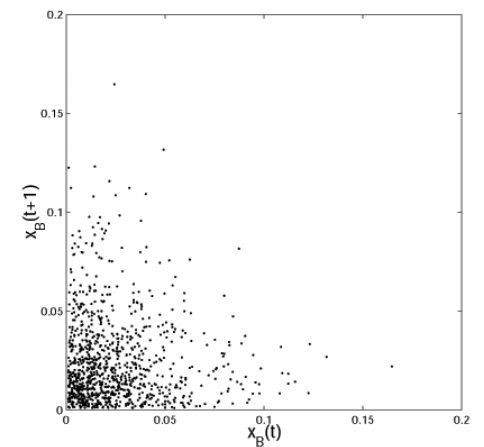
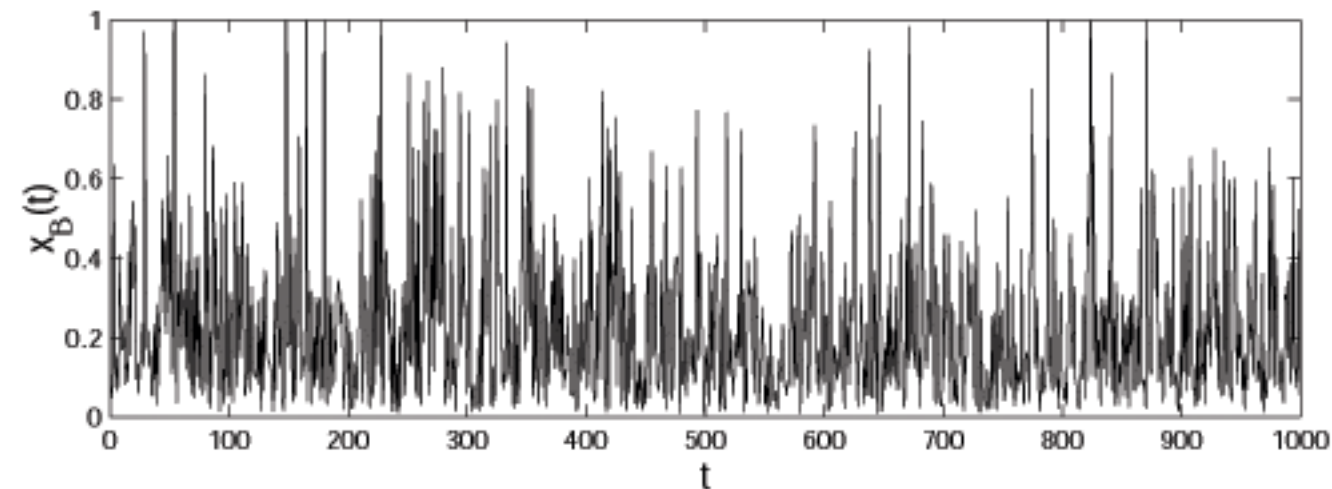
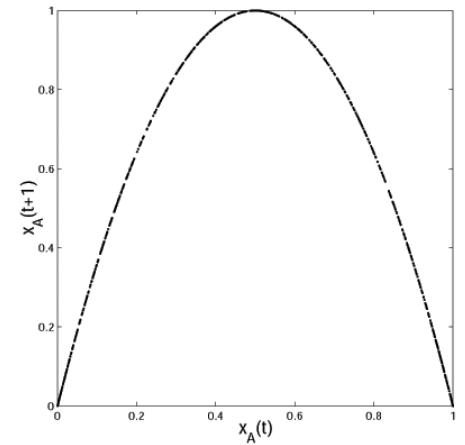
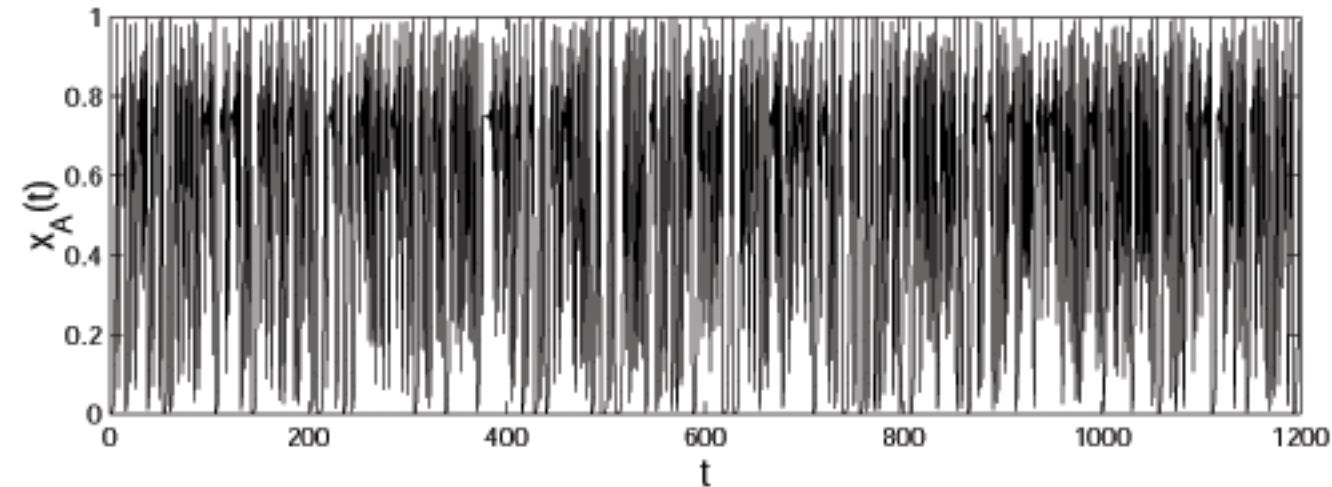
図 1.4: (a) 時系列信号 $y(t)$ の (b) 「状態空間」 $v(t)$ への変換.

共に複雑な挙動を示していたが...



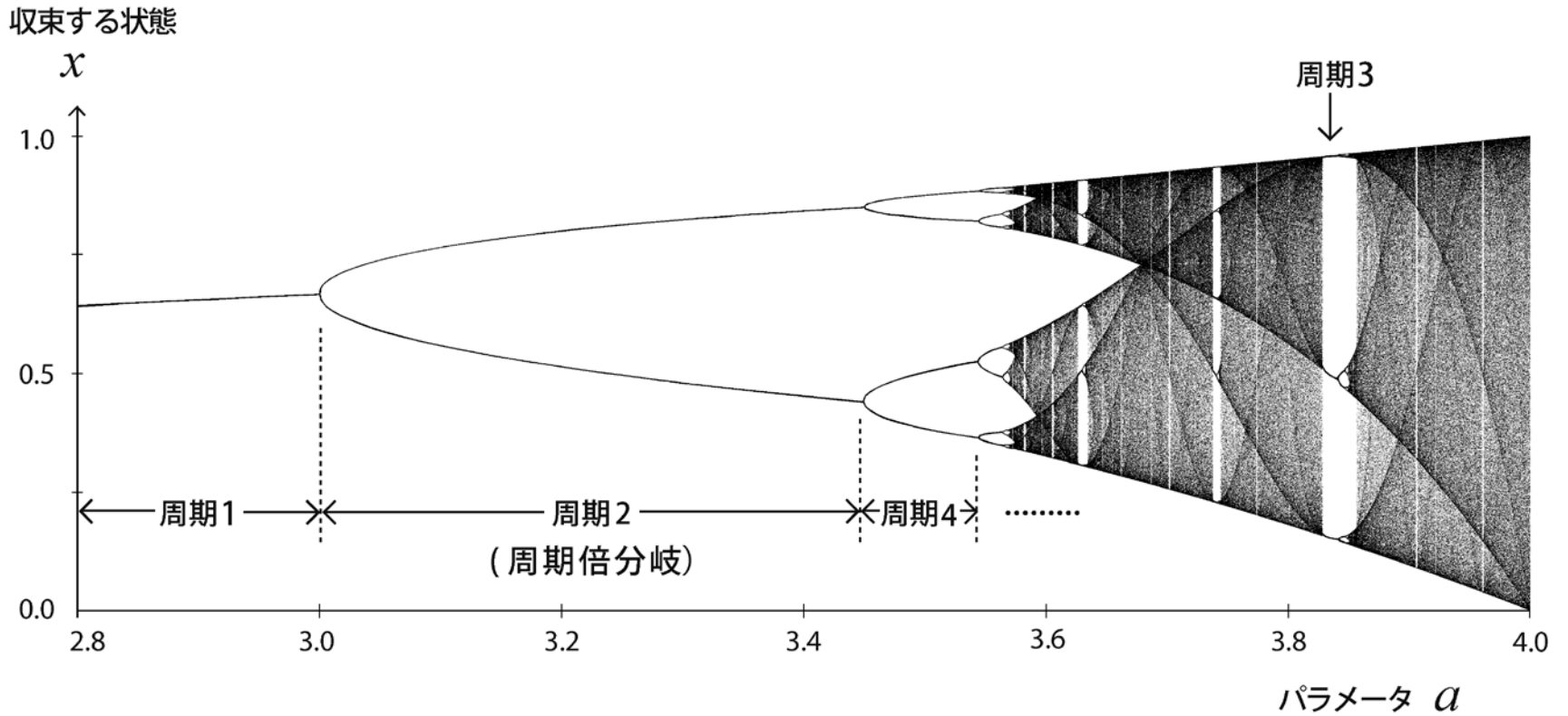
というように、差が現れる。

実は...

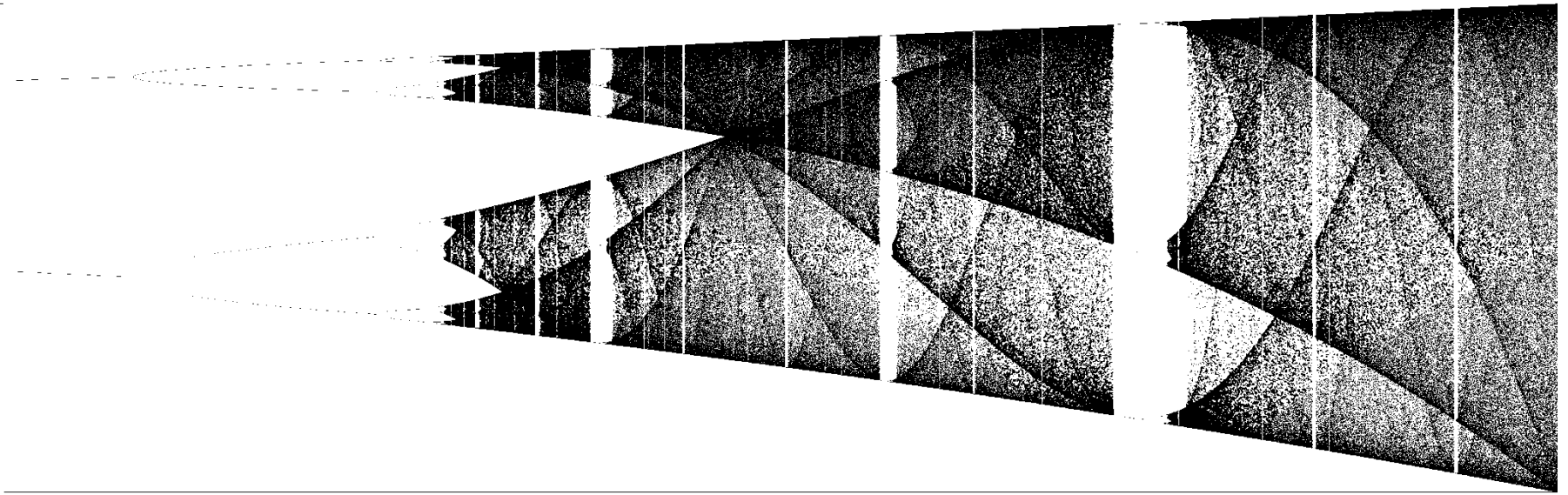


ロジスティック写像 $x(n+1) = 4x(n)(1-x(n))$

コバルト γ 線放射の時間間隔



「放物線で描かれる動的法則」の分岐図





✦ 松居エリ
Council of Fashion Designers, Tokyo
2010-11 Autumn/Winter Collection

A two-dimensional map for mathematical fashion:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (x_n \cos \theta - y_n \sin \theta)/r_n^2, \\ y_{n+1} = y_n - (x_n \sin \theta - y_n \cos \theta)/r_n^2, \end{cases}$$

where $r_n^2 = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$.

mathematics, art & fashion

2010 A/W ERI MATSUI COLLECTION

in collaboration with Dr. Kazu Aihara & Keiko Kimoto

date : March 23rd Tues.12:00~(open 11:30)
place : Billboard Live TOKYO (Tokyo Midtown Garden Terrace 4F)

Fortunately for us all, mathematicians use clothing.
So, why would anybody be surprised that there are clothing designers who use mathematics?

Math Horizons, SEP. 2007 published by the Mathematical Association of America: Gwen Fisher

数学者は服を着る。では、なぜ数学を使うファッションデザイナーがいるのに驚くのだろうか？

マス・ホリゾン誌：アメリカ数学会出版 2007/9：グウェン・フィッシャー

Mathematical Fashion:
Emergence Produced by Fusion between Universality and Individuality

-----Kazu Aihara

数理ファッション：普遍性と個別性の融合が生み出す創発 合原一幸

Art receives breath from chaotic rhythms -----Keiko Kimoto

カオスリズムはアートを呼吸させる 木本圭子

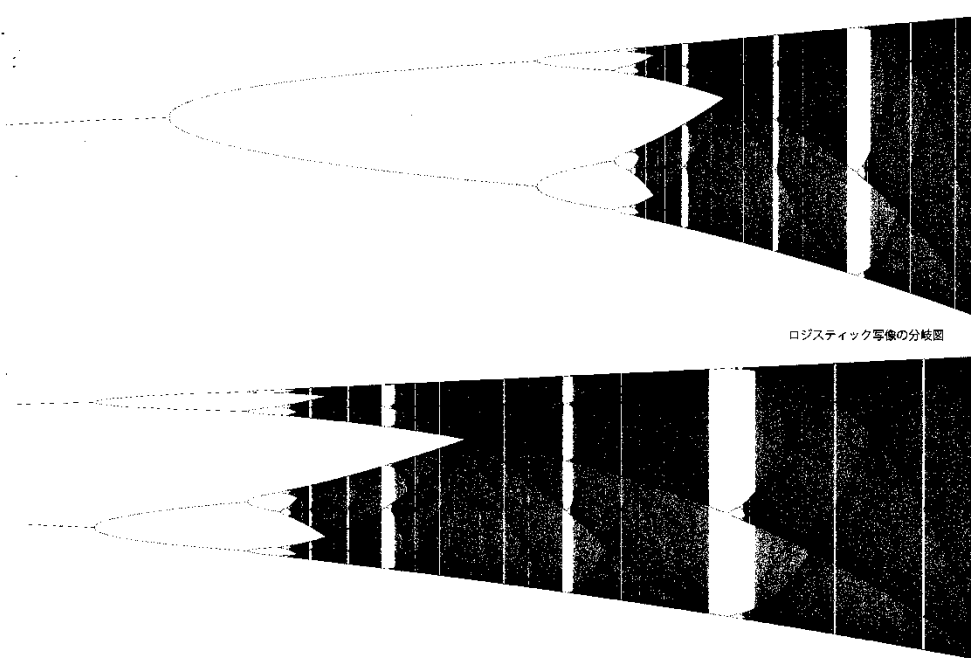
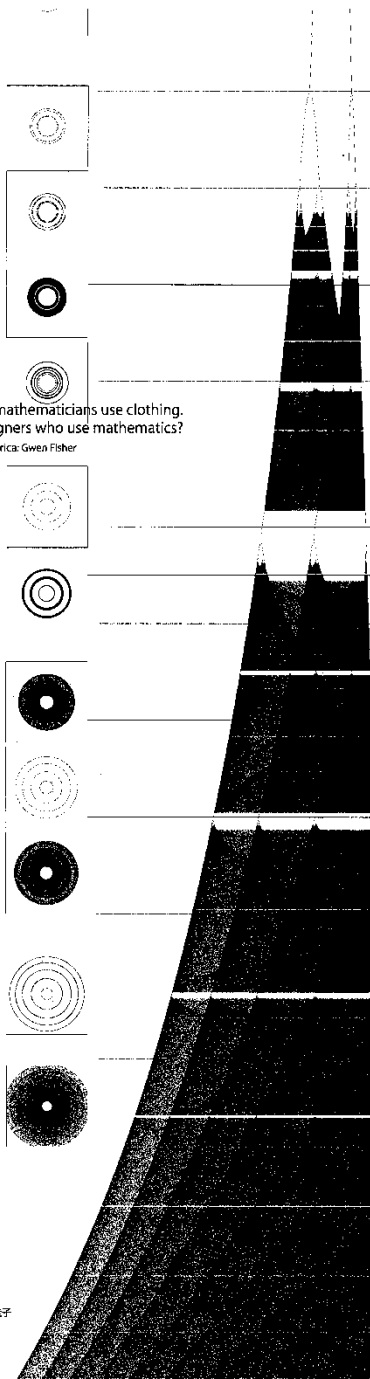
Feel the beauty within Mathematics. Feel the beauty of Mathematics
within Feeling.-----Eri Matsui

数理に美を感覚する。感覚すること自体に数理の存在を感覚する。 松居エリ

INVITATION

スローバード分帳版 制作 木本圭子

ERI MATSUI JAPAN 5-10-6 Minami-Aoyama Minato-ku TOKYO 03-5485-0012 www.erimatsui.com



ロジスティック写像の分岐図

ロジスティック写像の分岐図の拡大図

コラボレータープロフィール

合原一幸博士
東京大学生産技術研究所教授
同大学院情報工学系研究科教授
専門は、カオス工学、数理工学、生命情報システム論
主著に「カオス—まったく新しい動達の礎」(講談社)など

木本圭子氏
ビジュアル・アーティスト
非線形システムを用いた複雑化という観点からの新たな視覚表現・動向を探究。
映像作品「イマジナリー・ナンバーズ2006」で
第10回文化庁メディア芸術祭アート部門大賞受賞。
2005.11~2009.3 ERATO 合原権蔵数値モデルプロジェクト技術員

SOUND 提供
合原一幸氏 (京都大学理学研究科)



TOKYO MIDTOWN AREA MAP



TOKYO MIDTOWN ACCESS MAP

Billboard Live TOKYO

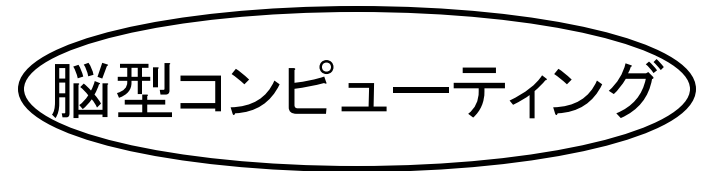
東京都港区赤坂 9-7-4 東京ミッドタウンガーデンテラス 4F 03-3405-1133
お問い合わせ ERI MATSUI JAPAN 03-5485-0012
当日お問い合わせ ERI MATSUI JAPAN 岸田 090-4665-1828

・本場で一名様をご招待いたします。
・本状封筒を受付にてお渡しくださいませ。
・万が一の場合お立ち見になる場合がございますのでご了承ください。



✦ 松居エリ
Council of Fashion Designers, Tokyo
2010-11 Autumn/Winter Collection

実世界

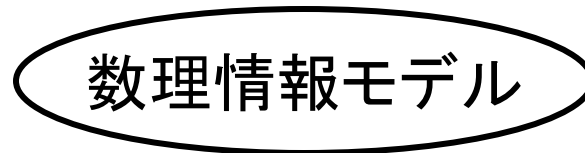


数理世界

数理情報
解析

実験的
知見

実装
修正



Abstract Models vs Detailed / Realistic Model
Generality / Universality vs Individuality / Particularity

アトム の 7 つ の 偉 力 と は



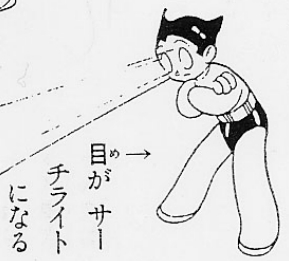
→ ジェット推進で
大空を
すばらしい速度で
とべる



どんなむずかしい計算でも
一秒間でやれる



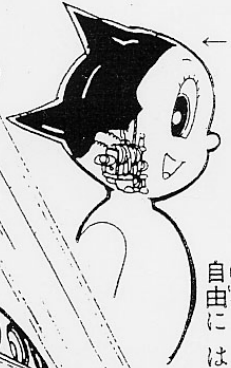
↑ 耳のボタンをおすと
ちからせんぱい
きく力が一千倍になる



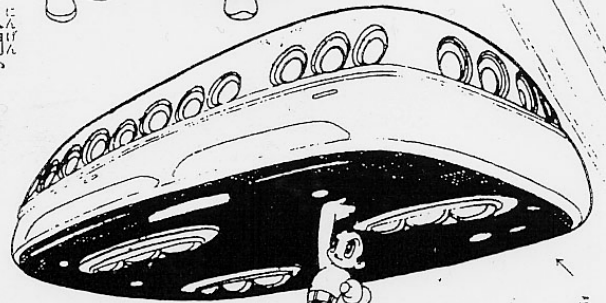
→ 目がサー
チライ
ト
になる



→ あいてが悪人かよい人間か
すぐにみつけられる



ノドの変話器のおかげで六十万国語を
自由にはなせる



↑ うでの力は
十萬馬力
でも
いもので
もこのと
おりです

21世紀：生命科学の世紀

脳：

The Decade of the Brain

1990's in USA

The Century of the Brain in Japan

- ① 脳を知る
- ② 脳を守る
- ③ 脳を創る
- ④ 脳を育む

ゲノム：

ポストゲノムシーケンス

理工学系からの 脳科学入門

合原一幸 — [編]
神崎亮平



東京大学出版会

脳を知り，脳を創る

ニューラルネットワーク，昆虫の微小脳，
ブレイン-コンピュータ-インターフェース。

脳科学の基礎から
最新のトピックスまでを網羅。

✦

合原一幸、神崎亮平編
『理工学系からの脳科学入門』
東京大学出版会、2008年

Progress of Understanding the Brain

Homogeneous
一樣



Heterogeneous
非一樣

Linear
線形



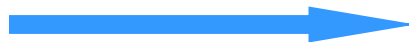
Nonlinear
非線形

Static
靜的



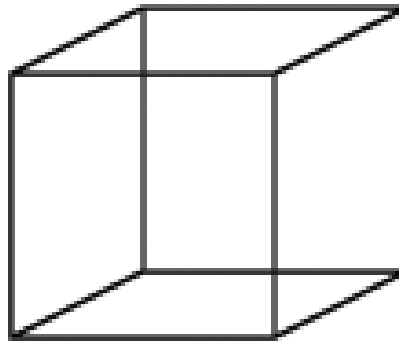
Dynamic
動的

Stationary
定常

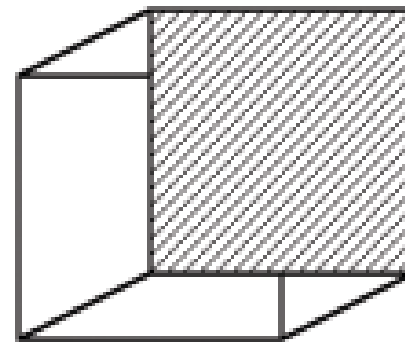
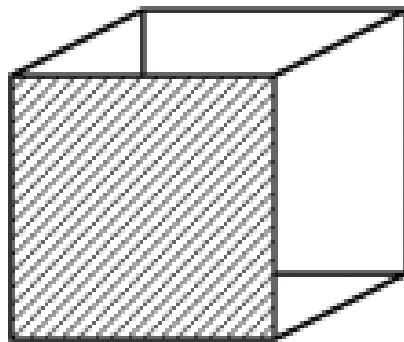


Nonstationary
非定常

ネッカーキューブと2つの解釈



(a)



(b)



Wikipediaより転載(2012/01/10)
<http://ja.wikipedia.org/wiki/ファイル:Younggoldwoman.jpg>

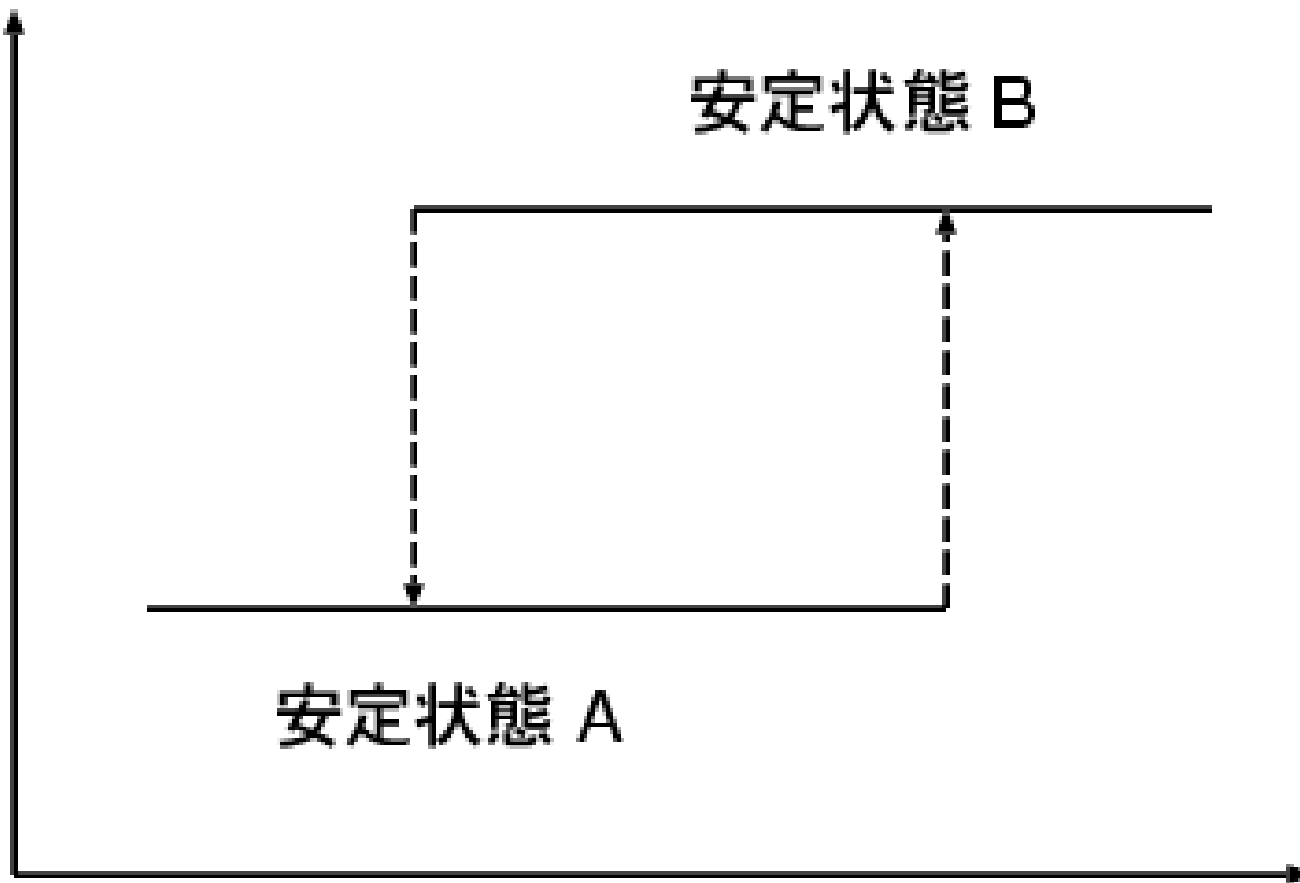


図1 画像解釈の多様性とヒステリシスの例(画像の作成は宮崎玲氏による)



Co-existence of two perceptions and hysteresis. A picture of man's face at the

状態



パラメータ

ヒステリシス現象

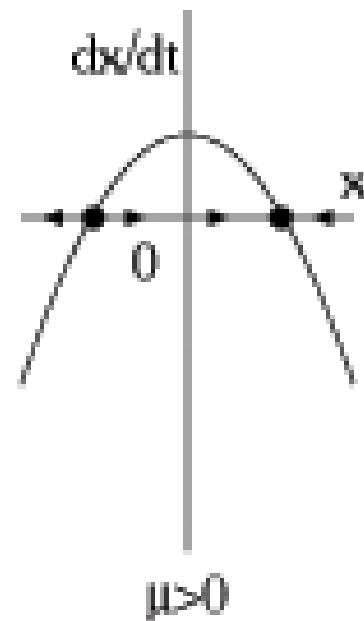
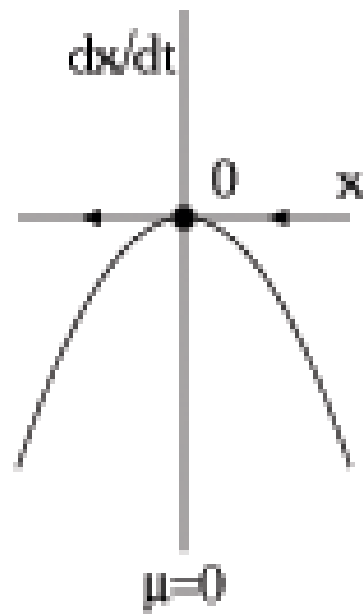
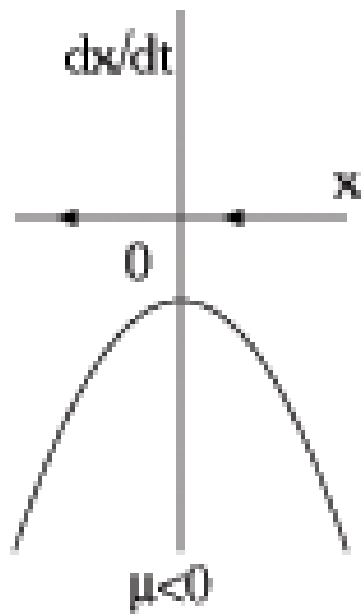
Saddle-Node Bifurcation

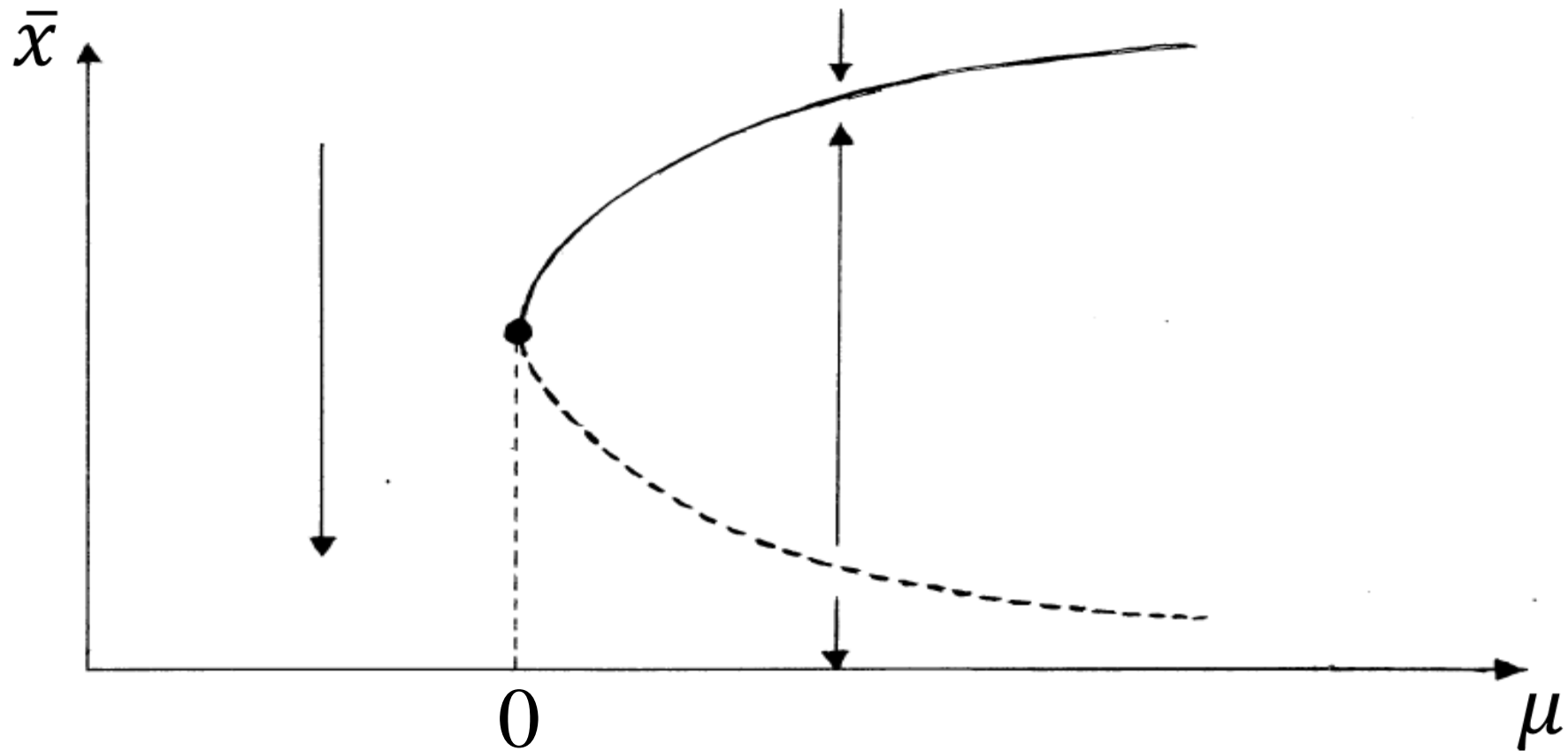
$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2$$

where x : the state variable

μ : the bifurcation parameter

the equilibrium point $\longleftrightarrow dx/dt = 0$





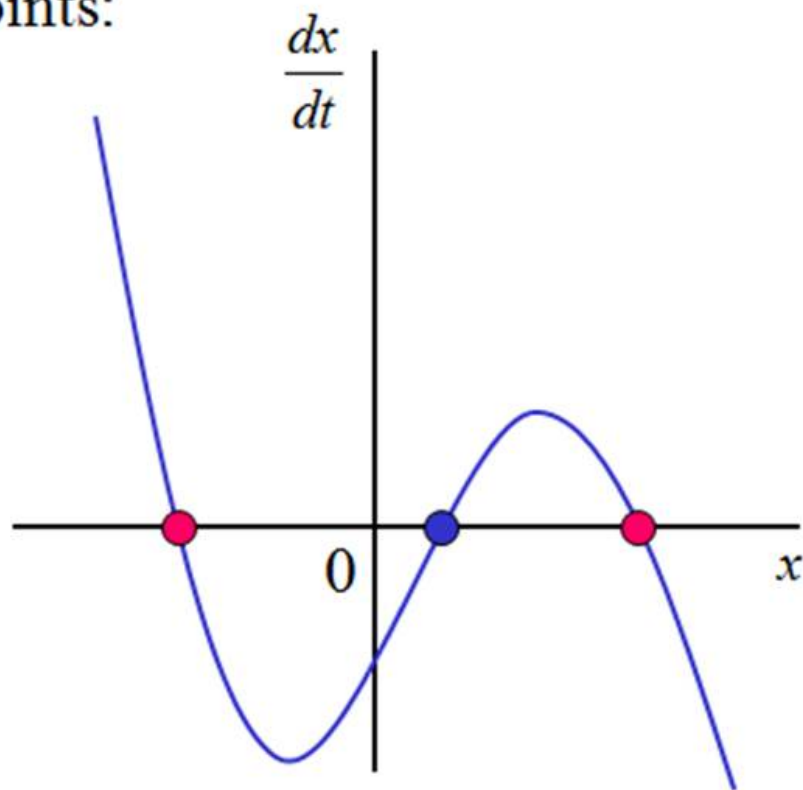
$$\frac{dx}{dt} = a + bx - x^3$$

where x : the state variable

a, b : the bifurcation parameters

the condition for the equilibrium points:

$$\frac{dx}{dt} = a + bx - x^3 = 0$$



Cusp Catastrophe

$$\frac{dx}{dt} = a + bx - x^3$$

where x : the state variable

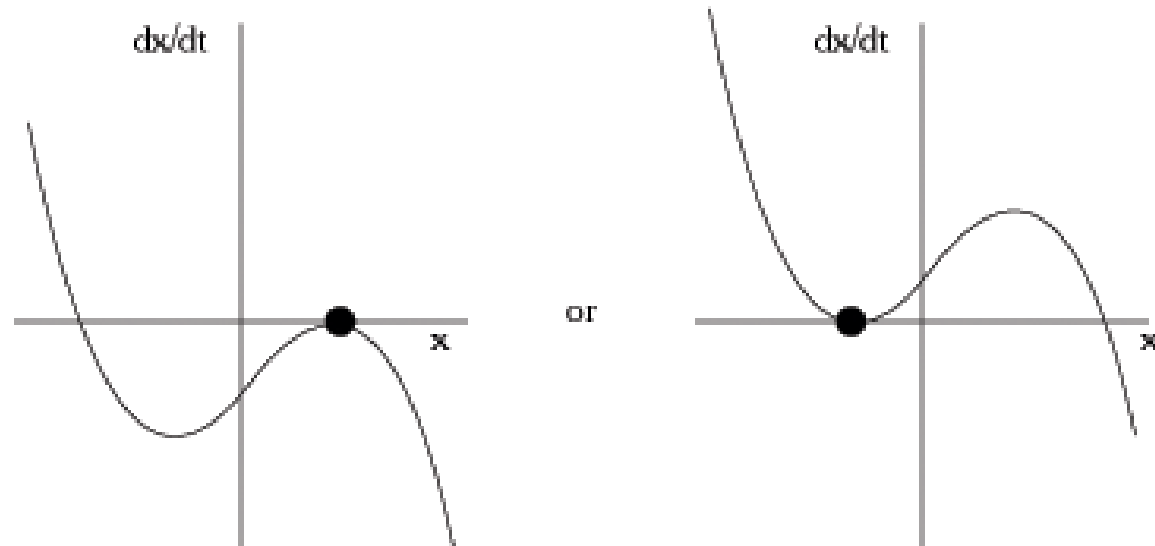
a, b : the bifurcation parameters

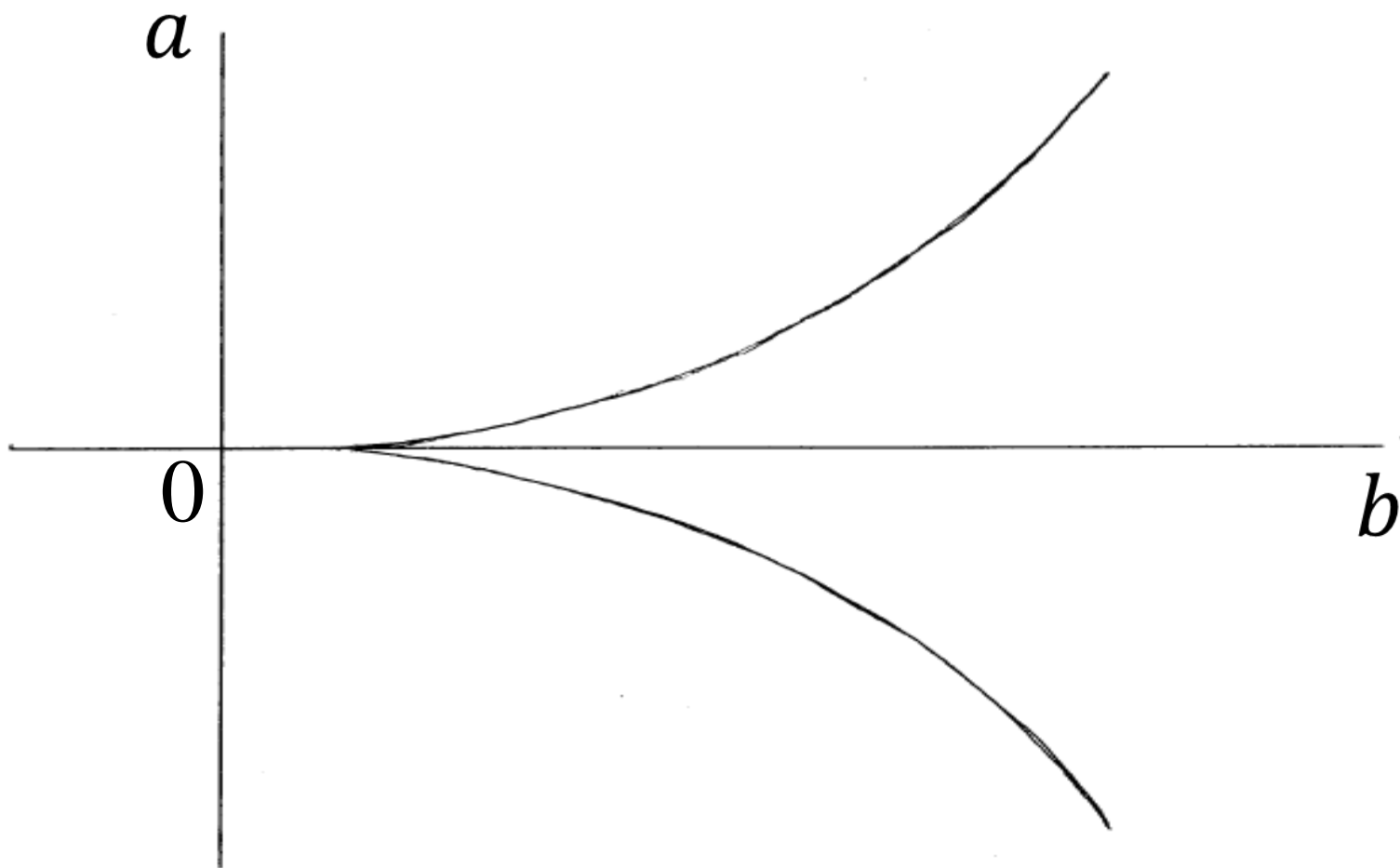
the condition for the equilibrium points :

$$\frac{dx}{dt} = a + bx - x^3 = 0 \tag{1}$$

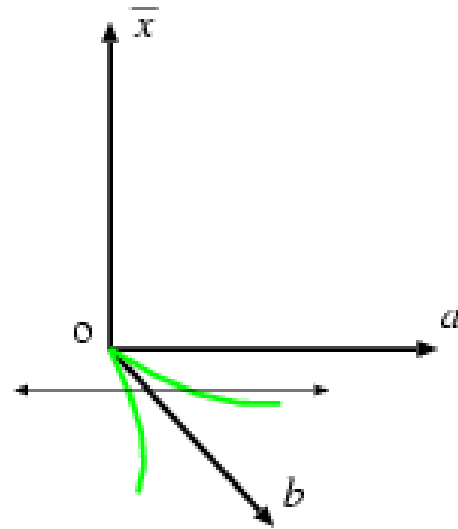
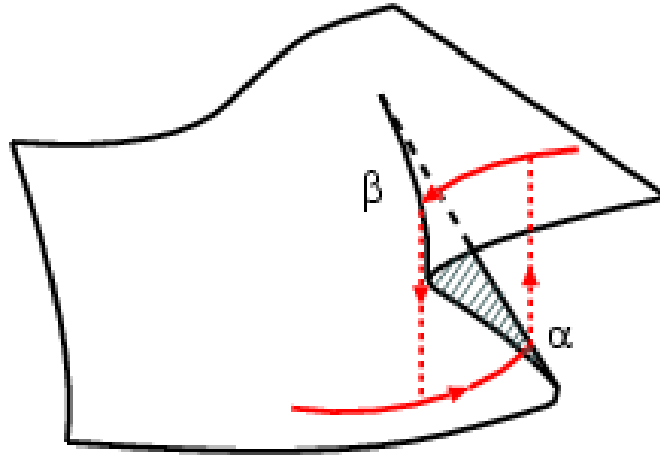
the condition for the saddle-node bifurcation :

$$\frac{d}{dx}(a + bx - x^3) = b - 3x^2 = 0 \tag{2}$$





$$a^2 = \frac{4}{27}b^3$$

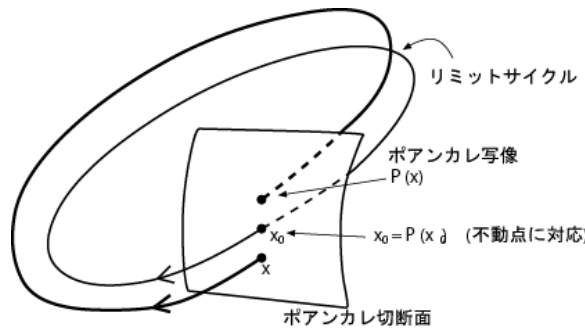


非線形システムの変岐構造

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t)) \xrightarrow[\text{ポアンカレ断面図}]{t \in \mathbb{R}} x(t+1) = f(x(t)) \xrightarrow[\text{線形化}]{t \in \mathbb{Z}} \xi(t+1) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \xi(t)$$

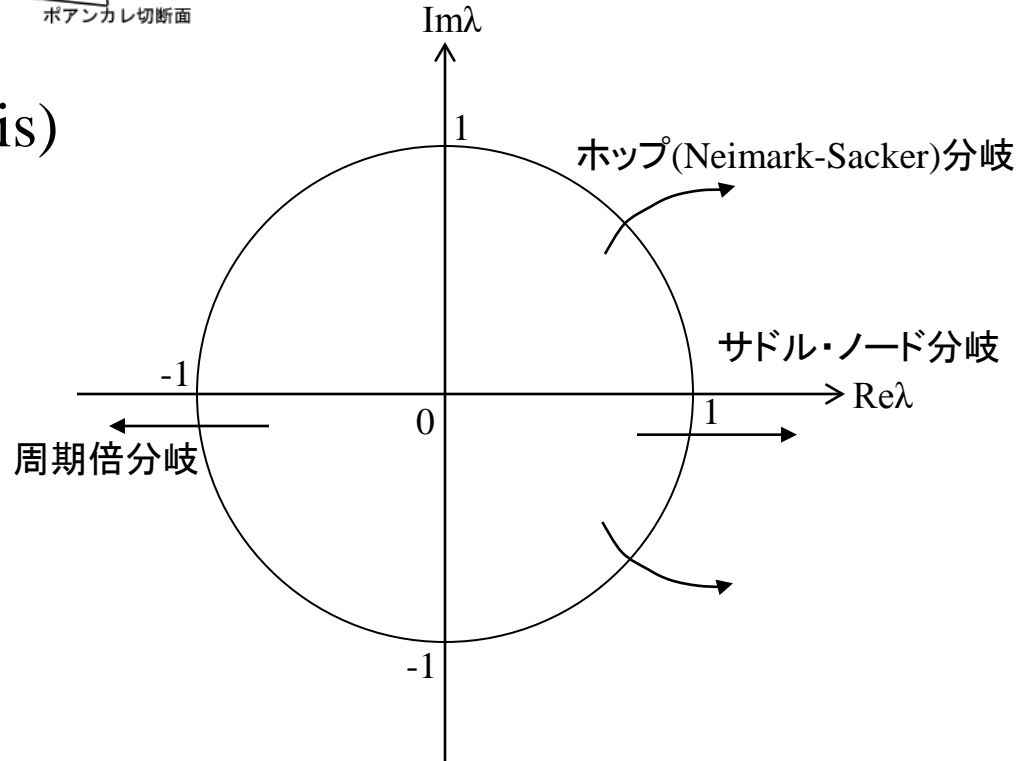
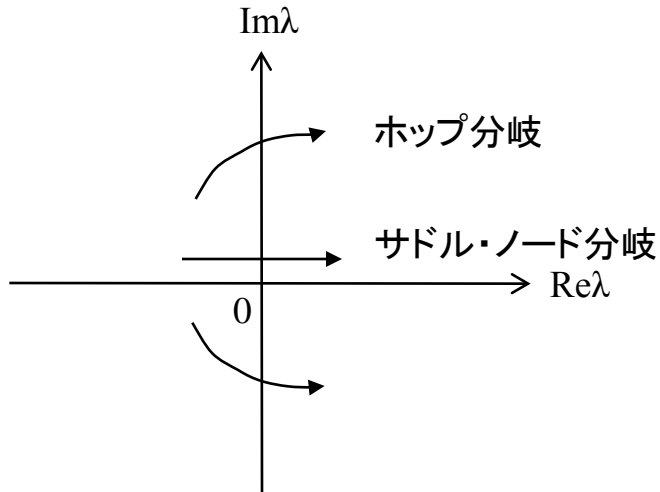
↓
線形化

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial X} \cdot \xi(t)$$



↓
分岐解析

分岐解析(Bifurcation Analysis)

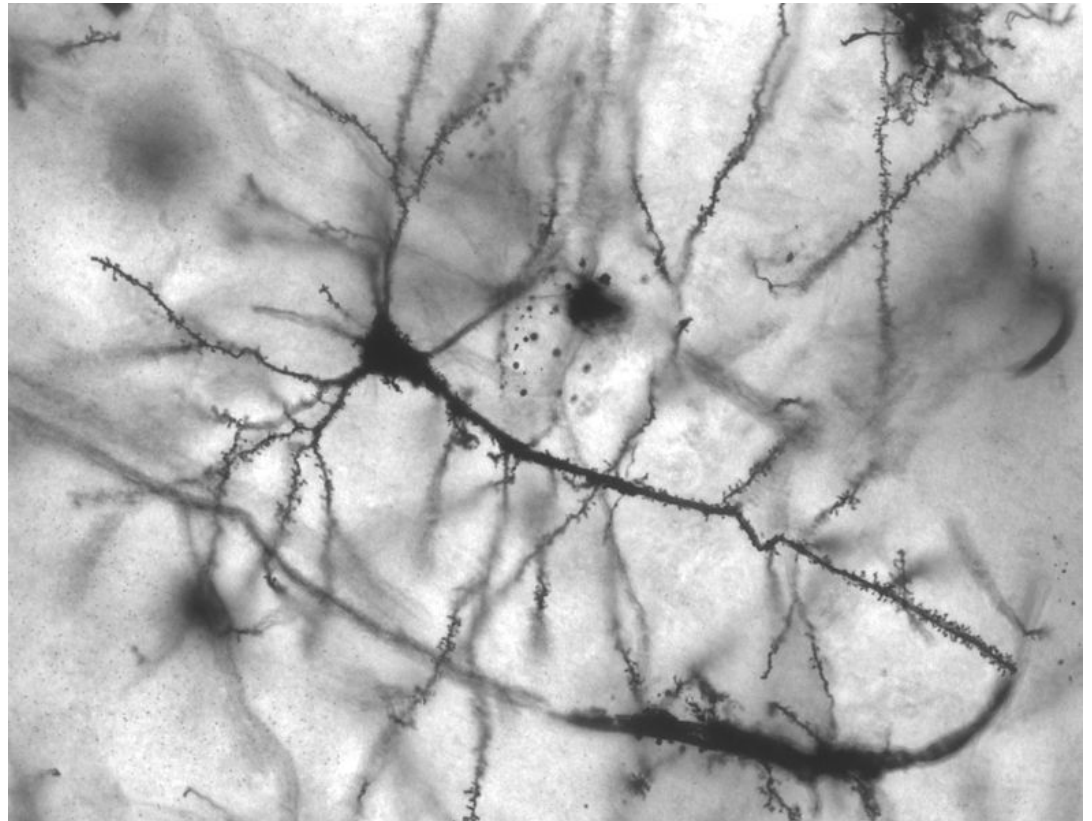




Santiago Cajal

Wikipediaより転載(2011/12/20)
<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cajal-Restored.jpg>

カハール Santiago Ramón y Cajal (1 May 1852 – 17 October 1934)

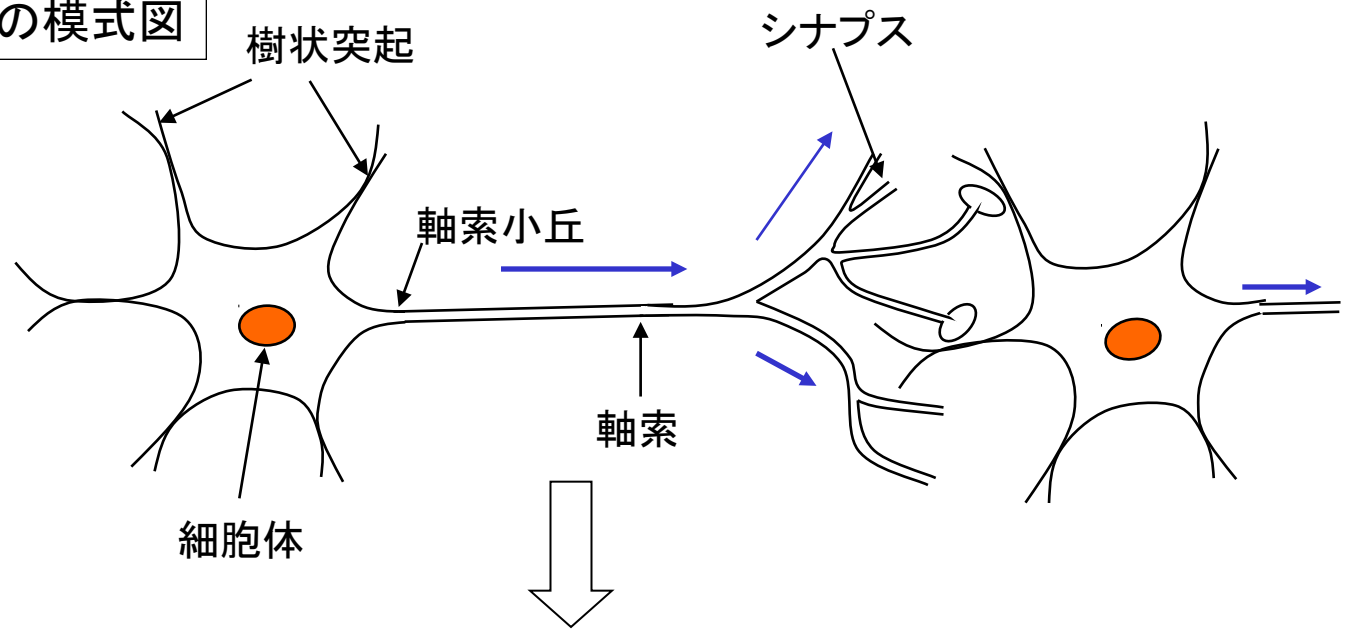


⚡ Wikipediaより転載(2011/12/20)
http://ja.wikipedia.org/wiki/ファイル:Pyramidal_hippocampal_neuron_40x.jpg

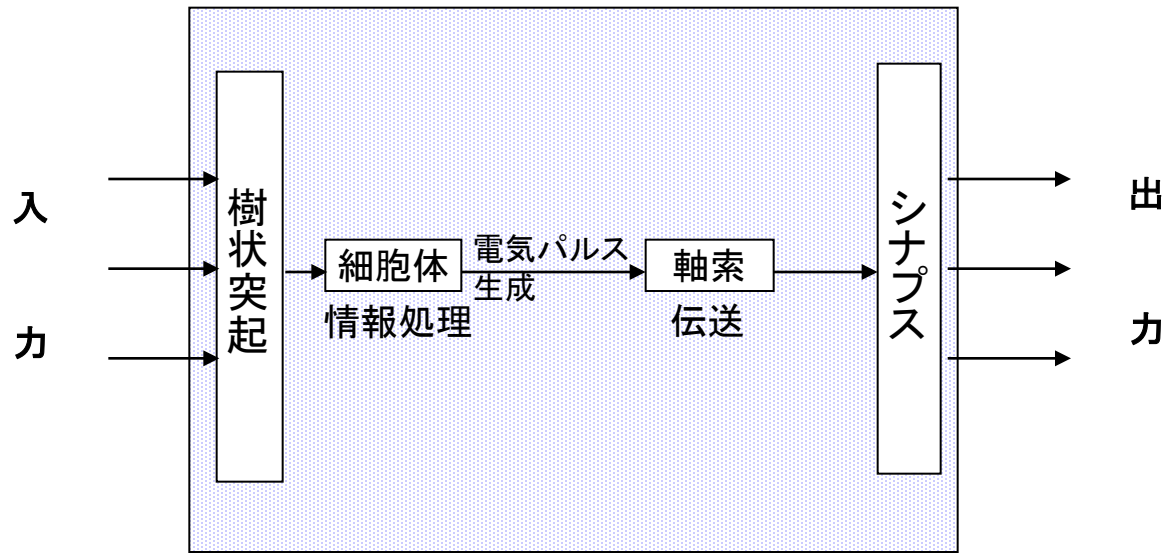
著作権の都合により、
ここに挿入されていた画像を削除しました。

Christof Koch, *Biophysics of Computation : Information Processing in Single Neurons*. Oxford University Press, 1999
(2004) p.50 Fig. 3.1 “Dendritic Trees of the World”

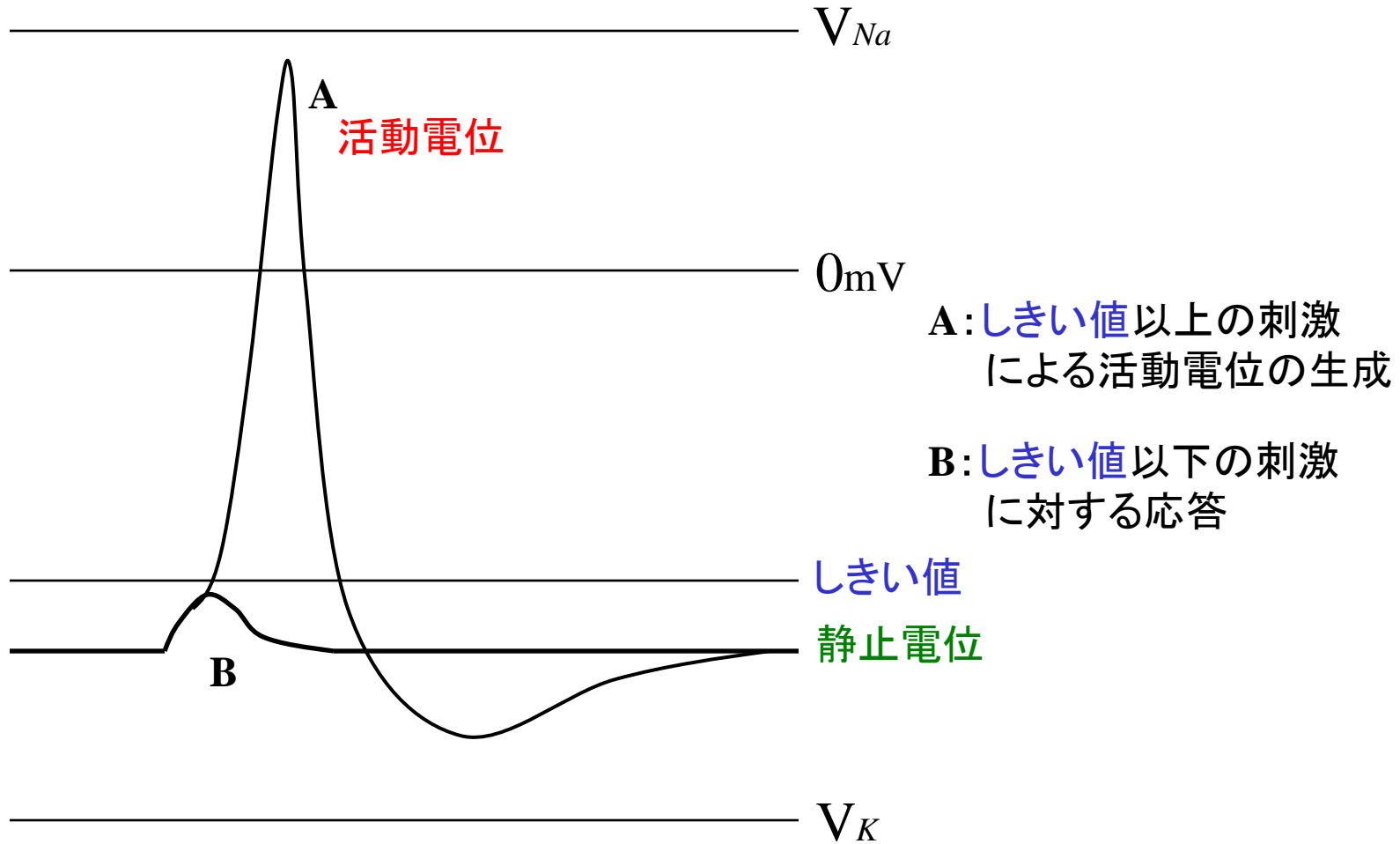
ニューロンの模式図



機能モデル



神経膜における活動電位生成の非線形過程



A. L. Hodgkin
(1914-1998)

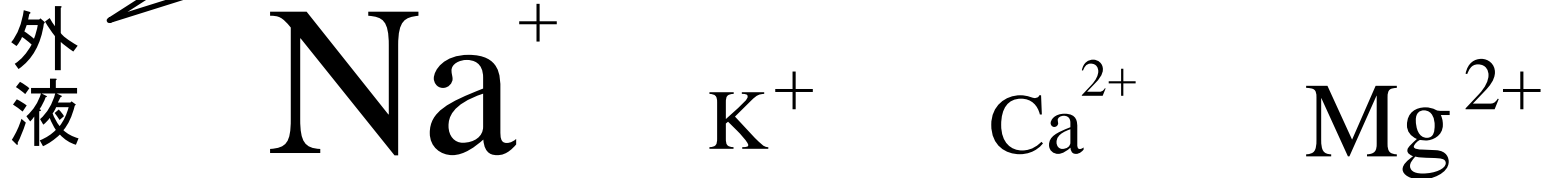


A. F. Huxley
(1917-)

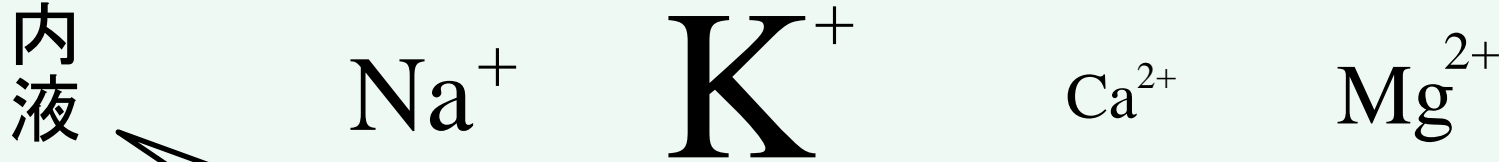


ヤリイカ神経膜をはさんだ内・外液のイオン構成

外液中にはNaイオンが多い

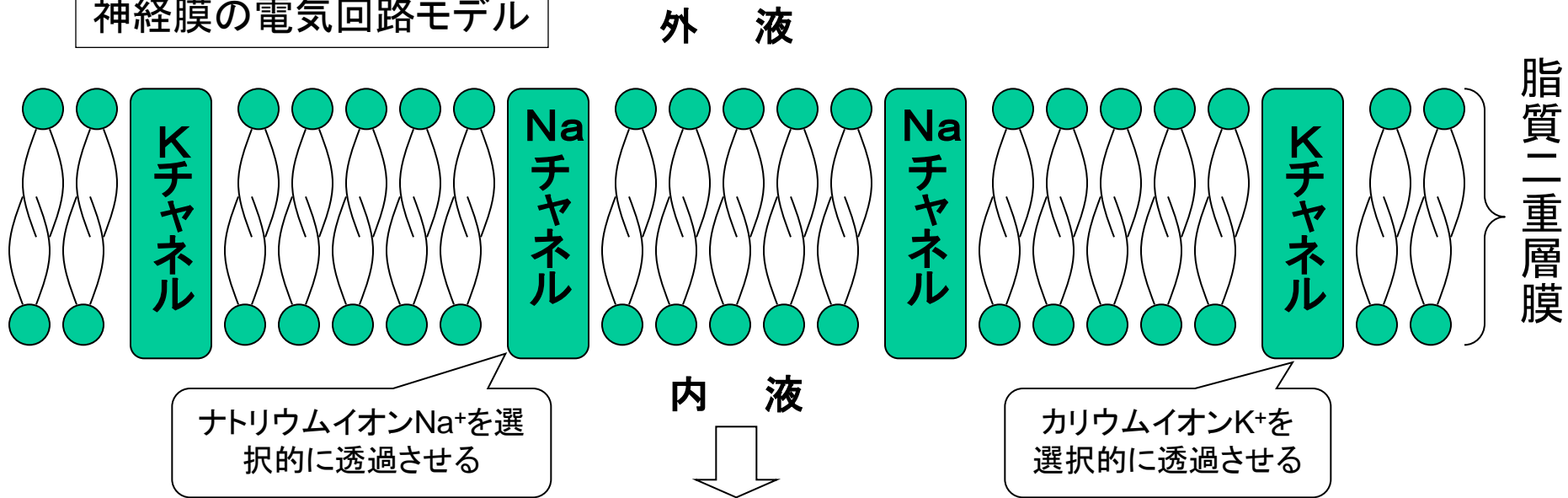


神経膜

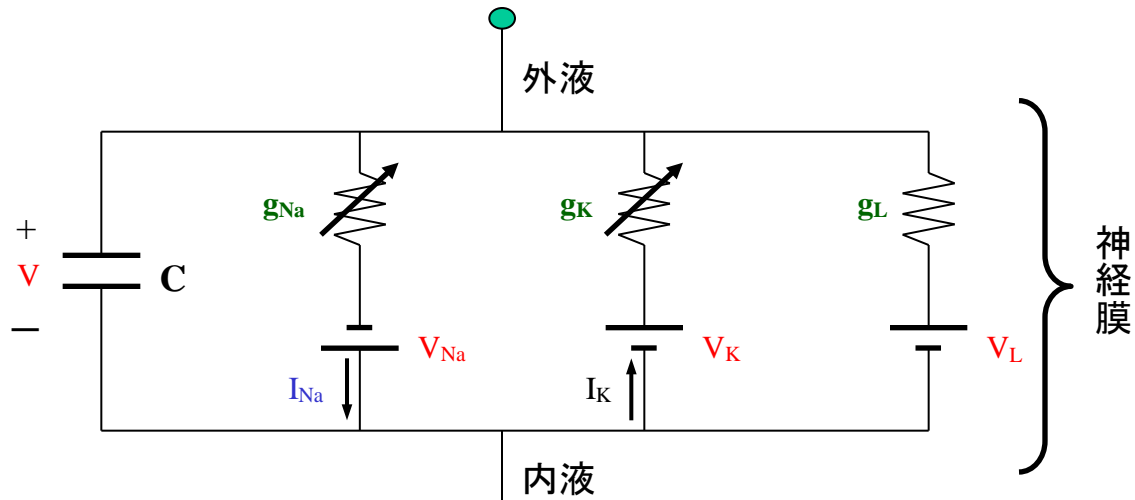


内液中にはKイオンが多い

神経膜の電気回路モデル



等価的な電気回路モデル



g_{Na} : 非線形なナトリウムコンダクタンス

g_{K} : 非線形なカリウムコンダクタンス

I_{Na} : ナトリウムイオンによる内向きイオン電流

I_{K} : カリウムイオンによる外向きイオン電流

$$\begin{aligned} I &= I_c + I_{Na} + I_K + I_L \\ &= C \frac{dV}{dt} + g_{Na}(V, t)(V - V_{Na}) \\ &\quad + g_K(V, t)(V - V_K) + g_L(V - V_L) \end{aligned}$$

ここで、

V : 膜電位

I : 膜電流

$$g_{Na}(V, t) = 120m^3h$$

$$g_K(V, t) = 40n^4$$

ホジキン-ハクスレイ方程式 (1963年ノーベル医学生理学賞)

$$\frac{dV}{dt} = I - 120.0m^3h(V - 115.0) - 40.0n^4(V + 12.0) - 0.24(V - 10.613)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{0.1(25 - V)}{\exp\left(\frac{25 - V}{10}\right) - 1}(1 - m) - 4 \exp\left(\frac{-V}{18}\right)m$$

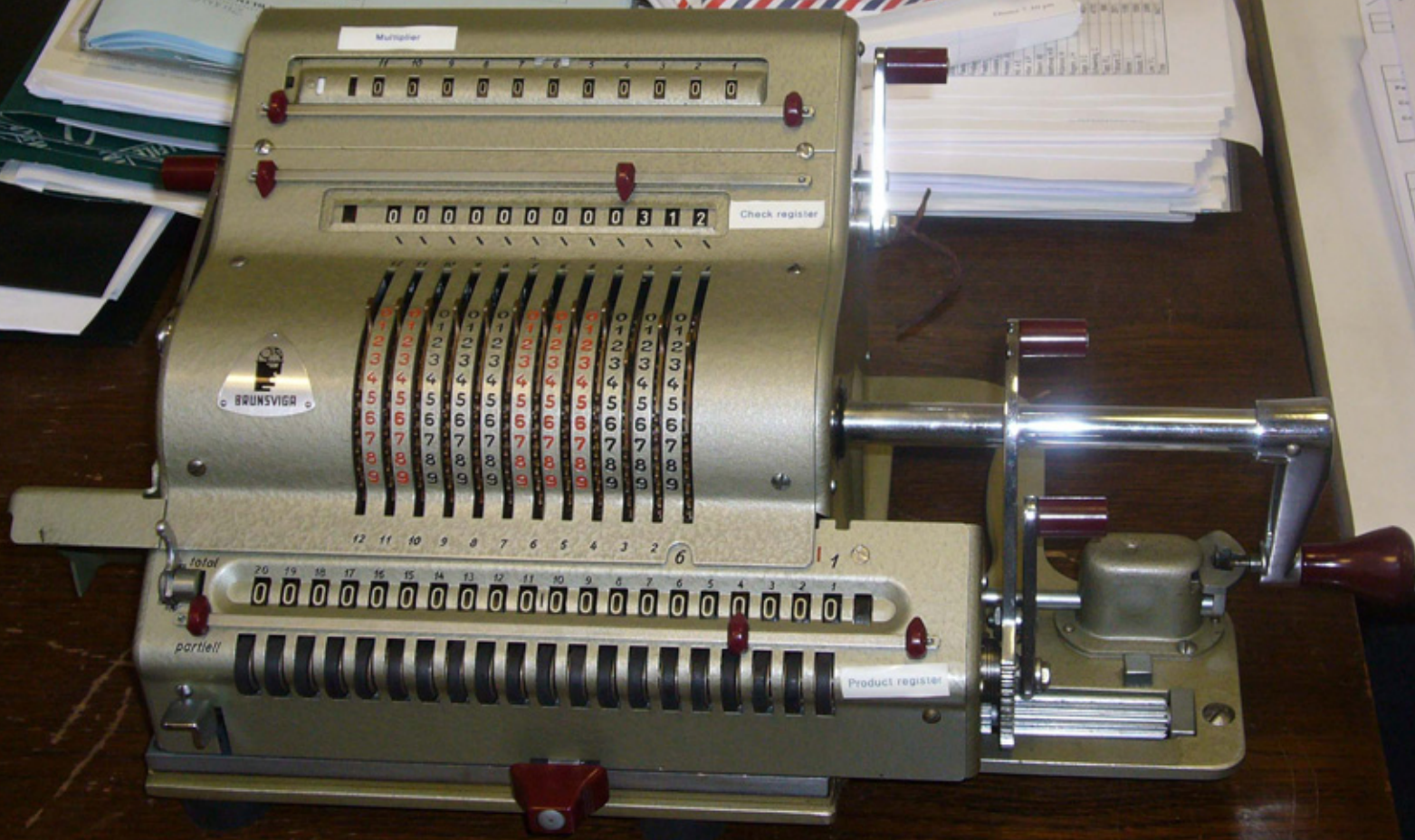
$$\frac{dh}{dt} = 0.07 \exp\left(\frac{-V}{20}\right)(1 - h) - \frac{1}{\exp\left(\frac{30 - V}{10}\right) + 1}h$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{0.01(10 - V)}{\exp\left(\frac{10 - V}{10}\right) - 1}(1 - n) - 0.125 \exp\left(\frac{-V}{80}\right)n$$

A.L.Hodgkin のエッセイ

Finally there was the difficulty of computing the action potentials from the equations which we had developed. We had settled all the equations and constants by March 1951 and hoped to get these solved on the Cambridge University computer. However, before anything could be done we learnt that the computer would be of the air for 6 months or so while it underwent a major modification. Andrew Huxley got us out of that difficulty by solving the differential equations numerically using a hand-operated Brunsviga. The propagated action potential took about three weeks to complete and must have been an enormous labour for Andrew. But it was exciting to see it come out with the right shape and velocity and we began to feel that we had not wasted the many months that we had spent in analysing records.

A.L.Hodgkin et al., (1977) *The Pursuit of Nature: Informal Essays on the History of Physiology*. Cambridge University Press, p.19.



FitzHugh-Nagumo Equations

(R.FitzHugh, 1969; J.Nagumo, S.Arimoto, and S.Yoshizawa, 1962)

$$\frac{dV}{dt} = V - \frac{V^3}{3} - W + I$$

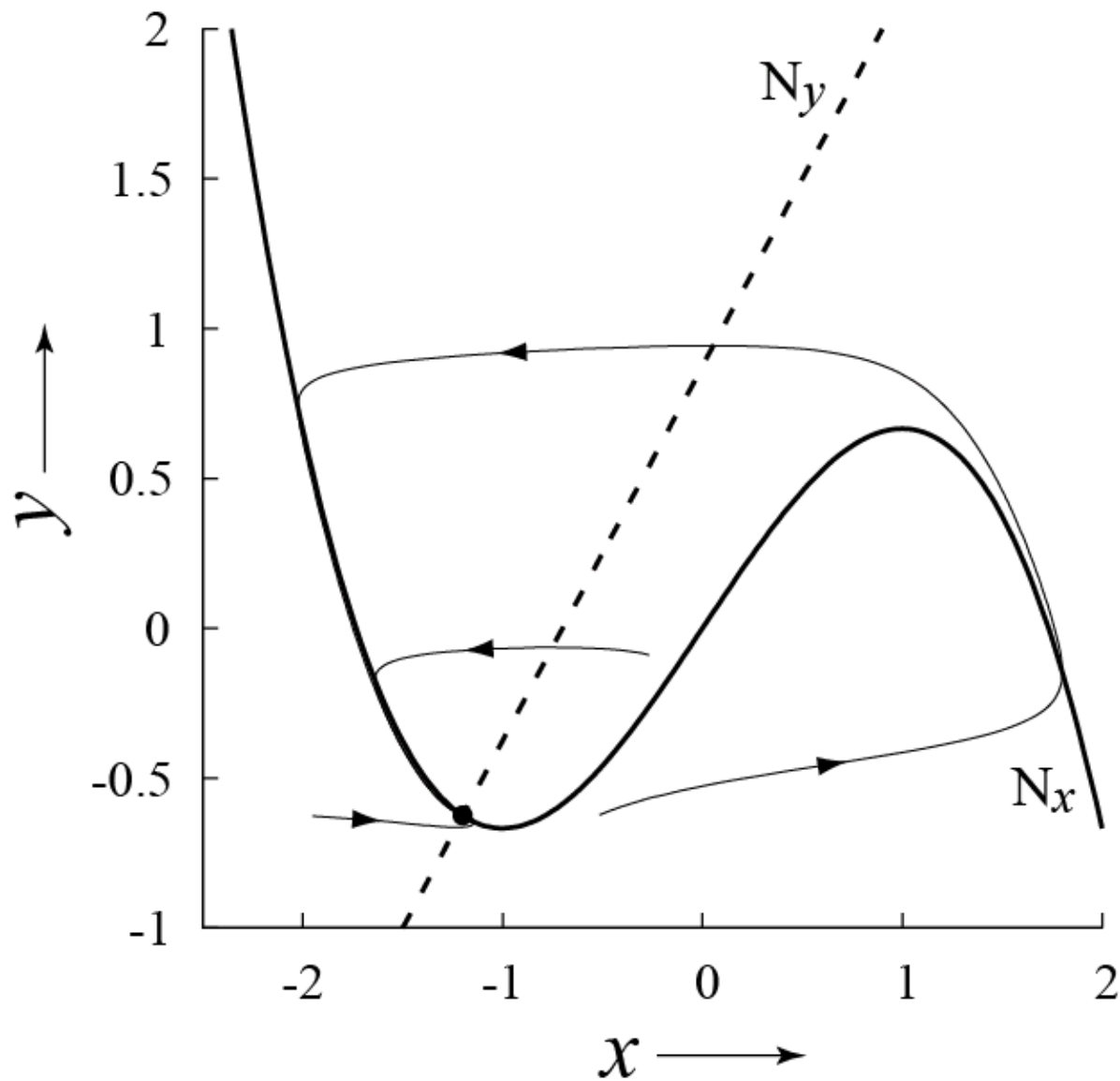
$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon(V + a - bW)$$

where

V : the membrane potential

I : the membrane current

W : the recovery variable

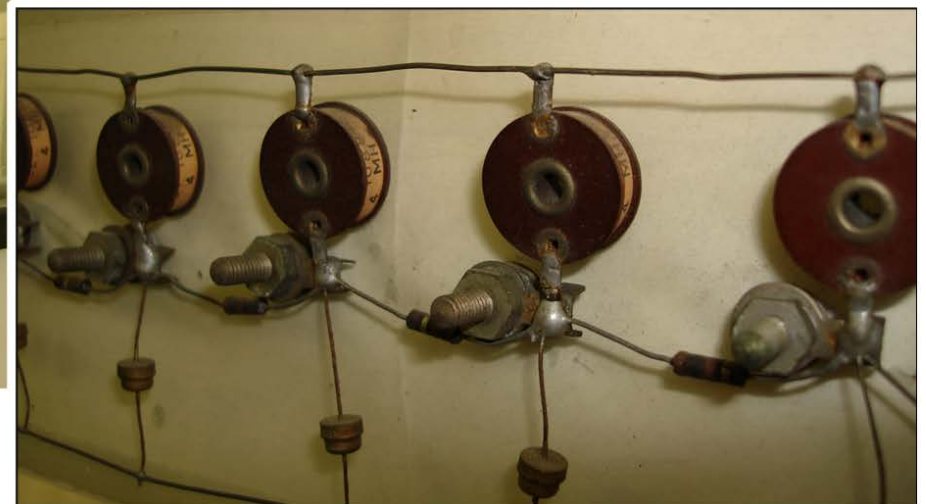
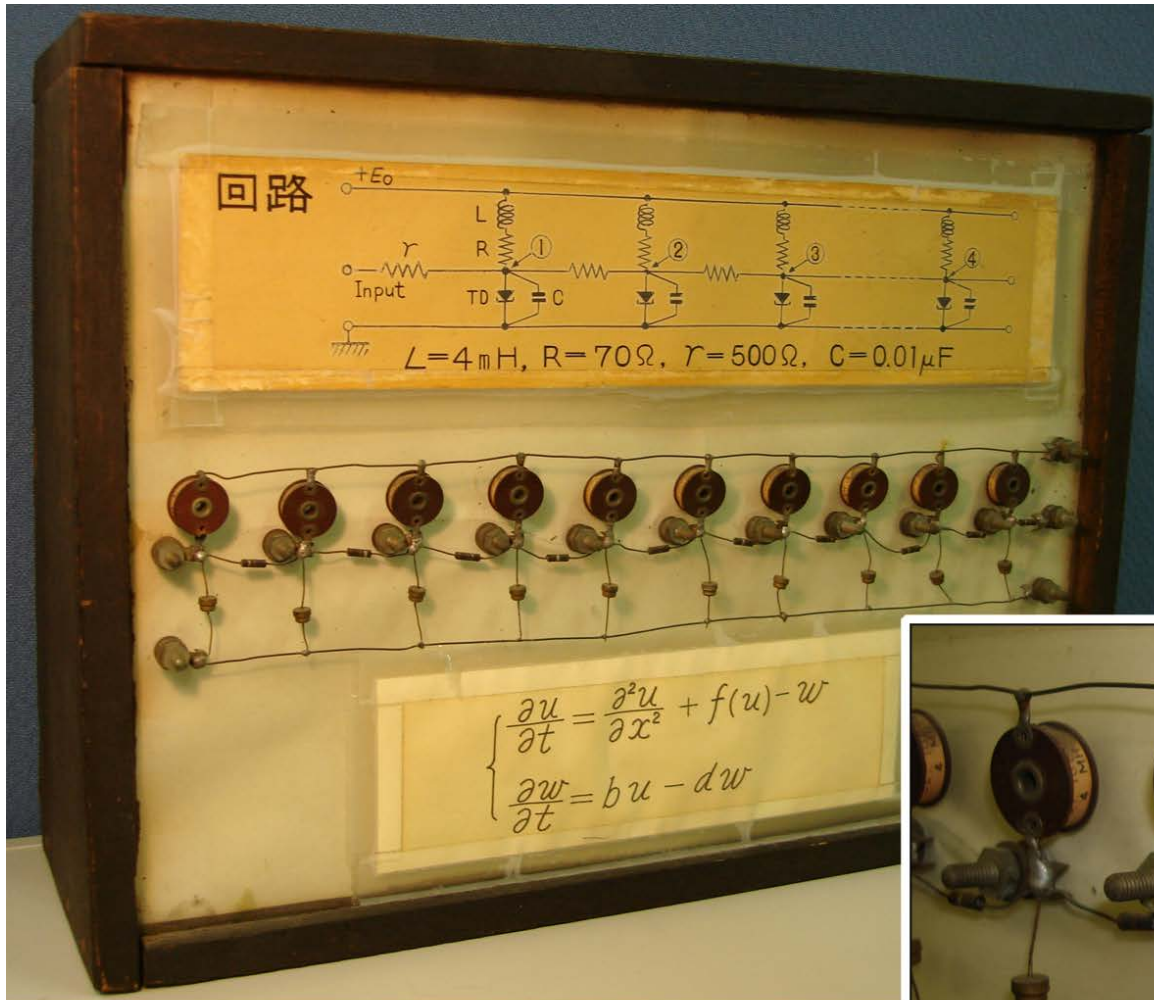


FHN方程式の解の例。ただし、 $a=0.7$, $b=0.8$, $c=4.0$, $I=0$ 。
 (本図は辻繁樹氏による)。



南雲の回路モデル (1962)

Cf: エサキダイオード誕生 (1957)



FHN 方程式の電気回路モデル