2005 年度　第 4 学期　代数と幾何　追試験問題

７月２４日（月）１３：３０〜１５：３０ (120 分)　斎藤　毅

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意：　答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由をできる限りくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」ということばは使わずに，説明してください.

第 1 問　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ とする．$V = \mathbb{R}^4$ の自己準同型 $f : V \to V$ を，$f(x) = Ax$ で定める．次の問いに答えよ．

(1)　A の固有多項式を求めよ．

(2)　A の固有値をすべて求めよ．

(3)　A のすべての固有値 a に対し，一般固有空間 $\widetilde{V}_a \subset V$ の基底を，1 つ与えよ．

(4)　$\mathbb{R}^4$ の基底で，それに関する f の行列表示が A の Jordan 標準形を与えるものを，1 つ求めよ．

(5)　A の最小多項式を求めよ．

第 2 問　$V = \mathbb{R}^3$ の標準基底を e_1, e_2, e_3 とする．W を V の部分空間 $\langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ とし，$p : V \to V/W$ を標準全射とする．

(1)　商空間 V/W の基底を，1 つ与えよ．

(2)　標準基底 e_1, e_2, e_3 の双対基底を，$e_1^*, e_2^*, e_3^* \in V^*$ とする．(1) で求めた V/W の基底の双対基底の，双対写像 $p^* : (V/W)^* \to V^*$ による像を，e_1^*, e_2^*, e_3^* の 1 次結合として表わせ．

第 3 問　$\mathbb{R}^2$ の標準基底を e_1, e_2 とする．$e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, (e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2)$ によって生成される $V = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ の部分空間を W とする．

(1)　W の次元を求めよ．

(2)　$x = (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) \in V$ が W の元であるかどうか判定せよ．$x \in W$ なら，x を $e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, (e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2)$ の線形結合として表わせ．

略解 **1**　(1)

$$\begin{aligned}\det(X-A) &= \det\begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 & 1 \\ 0 & -1 & X & -1 \\ 0 & 0 & -1 & X-1 \end{pmatrix} = X\det\begin{pmatrix} X & 0 & 1 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X-1 \end{pmatrix} \\ &= X^2\det\begin{pmatrix} X & -1 \\ -1 & X-1 \end{pmatrix} + X\det\begin{pmatrix} -1 & X \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = X^2(X^2-X-1)+X \\ &= X^4-X^3-X^2+X. \end{aligned}$$

(2)　$X^4-X^3-X^2+X = X(X^2-1)(X-1) = X(X-1)^2(X+1)$ だから，固有値は $0, 1, -1$.

(3)　$\widetilde{V}_0$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\widetilde{V}_1$ の基底 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\widetilde{V}_{-1}$ の基底 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4)　上の (3) で求めた基底をならべればよい.

(5)　A の最小多項式は，$X(X^2-1)$ でわりきれ，$X(X-1)^2(X+1)$ をわりきる．A の Jordan 標準形は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから，$A(A^2-1) \neq 0$ である．よって，最小多項式は $X(X-1)^2(X+1)$.

2　(1)　$\overline{e_1}, \overline{e_2}$.

(2)　$p^*(\overline{e_1}^*) = e_1^* - e_3^*, p^*(\overline{e_2}^*) = e_2^* - e_3^*$.

3　(1)　$e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$ は V の基底である．$(e_1+e_2)\otimes(e_1+e_2) = e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$ だから，$\dim W = 3$ である．

(2)　$x = (e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2) = e_1\otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 = 2(e_1\otimes e_1) + 2(e_2 \otimes e_2) - (e_1+e_2)\otimes(e_1+e_2) \in W$ である．